AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM FASES: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE LOGARITMOS

Elias Angelo Bonfim

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, orientada pela Profa. Dra. Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni.

IFSP
São Paulo
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Bonfim, Elias Angelo.
Avaliação da aprendizagem em fases: uma proposta para o ensino de logaritmos - São Paulo: IFSP, 2016.
147f.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática
Orientadora: Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni.

1. Avaliação da aprendizagem. 2. Prova em fases. 3. Logaritmos. I. Título do trabalho.

ELIAS ANGELO BONFIM

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM FASES
Uma proposta para o ensino de logaritmos

Dissertação apresentada e aprovada em 15 de março de 2016 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Lucia Scott Franco de Camargo Azzi Collet
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Maria Cristina Rizzetto Cerqueira
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Luciana Magalhaes Rebelo Alencar
IFCE – Câmpus Caucaia
Membro da Banca

“Mas em todas estas coisas somos mais do que vencedores, por aquele que nos amou”.

Romanos 8:37

Aos Meus Pais

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

- A Deus por tudo que me tem proporcionado;
- Aos meus pais, Ivan e Josefina, que educaram-me e apoiaram-me nessa trajetória;
- Aos meus irmãos, João e Ester, que me acompanharam nessa trajetória;
- À minha família por todo apoio;
- À minha orientadora, Professora Doutora Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni, que acreditou em minha potencialidade para o desenvolvimento desta pesquisa;
- Aos professores participantes da banca de qualificação e de defesa: Professora Mestre Valeria Ostete Jannis Lucheta, Professora Doutora Lucia Scott Franco de Camargo Azzi Collet, Professora Doutora Maria Cristina Rizzetto Cerqueira e Professora Doutora Luciana Magalhaes Rebelo Alencar, pelas reflexões e sugestões que tornaram esse trabalho muito mais rico;
- À Professora Mestre Vania Batista Flose Jardim pelos artigos e livros sugeridos;
- Aos Professores Mestres Marco Aurélio Granero Santos e Luciano Aparecido Magrini por sugestões, revisões e discussões muito pertinentes ao trabalho;
- À Professora Doutora Graziela Marchi Tiago pelo apoio, incentivo. Suas observações sobre avaliação foram muito pertinentes para a pesquisa;
- Aos amigos do mestrado que me proporcionaram momentos divertidos e de profunda reflexão durante as aulas;
- Aos meus professores, desde a 1° série do Ensino Fundamental até os professores do Programa do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, onde pude aprender e qualificar minha prática profissional com o exemplo de vocês;

- Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Câmpus São Paulo por proporcionar a estrutura necessária para o andamento do curso;
- À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro.

RESUMO

A avaliação é um dos temas que geram mais controvérsias na atualidade. Pesquisadores constantemente discutem e estudam quais seriam as melhores formas de avaliar e as contribuições para o processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, nem sempre os professores estão a par dessas discussões. Desse modo, surgem diferentes processos avaliativos que nem sempre estão a favor da aprendizagem nem estão baseados nos documentos oficiais. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ressaltam que novas perspectivas sobre ensino e aprendizagem requerem novas concepções e metodologias para a avaliação. Nesse contexto este trabalho estuda: as diferentes abordagens de avaliação, como os documentos oficiais tratam de avaliação e uma nova proposta para avaliação dos conceitos de logaritmos utilizando uma prova em fases. Essa prova foi idealizada para uma aplicação em três fases. Os itens que compõem a prova em fases foram classificados de acordo com o que propõe a Taxonomia dos Objetivos Educacionais (ou Taxonomia de Bloom) e o referencial para a correção dessa prova é baseado na Escala para Avaliação em Matemática. Como se trata de uma pesquisa qualitativa, o referencial metodológico fundamenta-se em Ludke e André (1986). Devido a situações que ocorreram no ambiente escolar durante a aplicação da pesquisa, não foi possível aplicar de forma integral a prova em fases em uma turma do Ensino Médio, entretanto, houve a fundamentação teórica do instrumento de avaliação para uma nova aplicação, além de indicar perspectivas para a prova em fases. Concluímos que nosso instrumento de avaliação traz um novo repensar as práticas avaliativas para os docentes e para os estudantes, uma vez que é possível a utilização de um único instrumento para realizar as abordagens da avaliação (diagnóstica, formativa e somativa) e contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chaves: Avaliação da aprendizagem, Prova em fases, Logaritmos.

LEARNING ASSESSMENT IN STAGES: A PROPOSAL FOR TEACHING OF LOGARITHMS

ABSTRACT

Assessment is one of the topics that generates more controversy today. Researchers constantly discuss and study what are the best ways to assess and what contributions assessments canbring teaching-learning process. However, not always teachers are aware of these discussions. Thus, different assessments processes are used that not always facilitate learning or are based on official documents. The National Curriculum Parameters (PCN) point out that new perspectives on teaching-learning require new concepts and assessment methodologies. In this context, this work studies: the different approaches to assessment, how the official documents dealing with assessment and a new proposal for teach logarithms using a stages test. This test was designed for an application in three stages. The items, which compose the stages test, were classified according to proposing the Educational Objective Taxonomy (or Bloom's Taxonomy) and the reference for the correction of this test is based on the Assessment Scale in Mathematics. As this is a qualitative research, the methodological approach adopted follows Ludke and Andre (1986). Because of situations that occurred at school during the research developmente, it was not possible to apply in the totality the stages test in a class of high school, however, there was theoretical embasement of the assessment instrument for a new application, and it indicates prospects for the stages test. We conclude that our assessment instrument brings a new aproach to assessment practices, for teachers asa well as for students, since it is possible to use a single instrument to perform different assessments approaches (diagnostic, formative and summative) and this contributes to the teaching-learning process.

Keywords: Learning assessment, Stages test, Logarithms.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Monstros, bichos de sete cabeças, medo, abuso de poder, entre outros tantos termos não agradáveis foram associados à avaliação (HOFFMANN; 2012, ALVES, CABRAL; 2015). Diante de tantos adjetivos e termos que tratam a avaliação como um momento ruim no cotidiano escolar, novas perspectivas estão sendo estudadas, tanto por parte de pesquisadores quanto por parte de documentos oficiais, que a trazem para um momento de formação, reflexão e direcionamento das práticas.

O tempo dedicado à avaliação discente ocupa grande parte da atividade docente: há o tempo de preparação dos exercícios de uma prova, o tempo de preparar os estudantes para realizarem a prova, o tempo de corrigir as provas dos estudantes, o tempo para realizar os registros no Diário de Classe, o tempo de fazer a devolutiva para os estudantes... Enfim, de todo o trabalho docente, pode-se dizer que demanda mais tempo é a avaliação. Os estudantes também têm dedicado muito tempo a esta: muitas vezes os estudos são dedicados apenas à avaliação - o conhecimento é trabalhado de forma que, muitas vezes, o objetivo é apenas o de atender à avaliação (interna e externa) - como resolver testes e provas, conseguir uma boa classificação em uma avaliação externa, e não como instrumento de aprendizagem em si. Entretanto, pouco se entende sobre a finalidade da avaliação no trabalho docente e discente.

Em parte, os docentes cumprem esse "ritual pedagógico" sem ao menos refletir sobre suas potencialidades no processo de ensino e aprendizagem. Possivelmente, muitos instrumentos de avaliação são utilizados, como provas, trabalhos, seminários, de forma desconexa. Em busca de melhoria neste processo, a avaliação é um dos temas relacionados à Educação que mais tem levantado polêmicas e controvérsias.

Um exemplo disso é o uso da avaliação com caráter disciplinador, de controle da sala de aula. Frases como "se vocês não prestarem a atenção na aula, dificultarei ao máximo na prova" ainda são ouvidas nas salas de aula, desvirtuando a real função da avaliação da aprendizagem. Hoffmann (2012) destaca imagens que estudantes têm em relação à avaliação, e uma grande parte dessas imagens são referentes a aspectos negativos, como por exemplo, relacionar a avaliação com um "bicho de sete cabeça", um monstro. Isso revela que a avaliação ainda tem sido utilizada com objetivos contrários a aprendizagem, como um instrumento de controle.

Para Luckesi (2012) o objetivo da avaliação é garantir o sucesso - ela é o principal instrumento que auxilia ao professor à atestar se o estudante aprendeu ou não. Entretanto, ainda há a avaliação com caráter classificatório, que busca classificar estudantes entre bons e ruins, por exemplo.

Afinal, como questiona Perrenoud (1999), a avaliação está a favor da seleção (entre bons e ruins) ou das aprendizagens (garantir o sucesso)?

Apesar de tantas contestações, não há como fugir da avaliação, ela faz parte tanto do cotidiano escolar como da vida de qualquer cidadão. Luckesi (2011, p.137) afirma que “a avaliação é uma ferramenta da qual o ser humano não se livra”. Entretanto, o autor complementa que ela deve ser utilizada da melhor forma possível.

Para auxiliar os professores nesse processo, há instruções em documentos oficiais e diferentes estudos que podem guiar os professores em sua prática avaliativa em sala de aula. Apesar de haver instruções nos documentos oficiais, Perrenoud (1999) afirma que elas são poucas, fato que causa imprecisão no processo de avaliar. Além disso, poucos são os trabalhos acadêmicos que se referem ao processo avaliativo dos estudantes e que relacionam os documentos oficiais, as abordagens da avaliação e a prática em sala de aula atual (MACIEL, 2003; BONFIM, TIAGO, BARONI, 2014).

Desse modo, os professores ficam um tanto perdidos nesse momento escolar, em que documentos oficiais sugerem o aprendizado de certos conteúdos, metodologias e estratégias para professores aplicarem em suas aulas, mas diante das avaliações, questões como “o que”, “como” e “por quê“ avaliar ficam sem respostas, deixando o professor escolher seus métodos e aplicá-los. Os PCN (1997) alertam que mudanças na concepção de aprendizagem, interpretação e abordagens do ensino de Matemática implicam nas finalidades da avaliação - uma vez que novas metodologias de ensino são praticadas por professores, novas concepções e novos instrumentos de avaliação são necessários para essas mudanças.

A questão que deseja-se responder com essa pesquisa é**: Um instrumento de avaliação pode ser aplicado no ensino médio com o intuito de trazer ao mesmo tempo, uma contribuição ao docente para seu (re)planejamento das**

aulas e também de reflexão para o estudante sobre o seu processo de ensino e aprendizagem?

Tendo em vista a dificuldade da avaliação na atividade docente, essa pesquisa tem como foco a avaliação interna, que entendemos como um processo no qual o professor que ministra as aulas é o mesmo que desenvolve as avaliações (RABELO, 2009).

Como base, esta pesquisa está centrada na prática avaliativa de um professor que leciona Matemática no 1° ano do Ensino Médio, cujo conteúdo ensinado é o de logaritmos, sendo esse um conteúdo matemático que gera muitas possibilidades de aplicação.

Com tal questão de pesquisa identificamos os seguintes objetivos específicos para esse trabalho:

- Elencar as diferentes abordagens de uma avaliação interna;
- Elencar e relacionar os documentos oficiais e o que eles tratam como avaliação interna;
- Propor a prova em fases como instrumento de avaliação;
- Categorizar as questões da prova de acordo com a Taxonomia de Bloom de forma a obter o objetivo educacional de cada questão;
- Propor a Escala de Avaliação em Matemática como metodologia norteadora na correção da prova em fases;
- Estudar os limites e possibilidades do instrumento de avaliação prova em fases em relação ao processo de ensino e aprendizagem de logaritmos.

Nesse contexto, este trabalho está dividido em cinco capítulos, cuja ideia central de cada um está descrita a seguir:

- No capítulo 1 abordou-se a motivação e a relevância para a realização dessa pesquisa assim como a questão norteadora e os objetivos específicos;
- O capítulo 2 é dedicado aos procedimentos metodológicos adotados para a pesquisa. Além disso, abordamos também uma revisão bibliográfica de pesquisadores que tratam de avaliação e apresentamos os documentos oficiais que norteiam a avaliação no Brasil e no estado de São Paulo. As relações entre as teorias

propostas para a avaliação e os documentos oficiais vigentes são apresentadas nesse momento;

- No capítulo 3 é apresentada a nossa proposta de avaliação. Nesse capítulo também está fundamentado o instrumento de avaliação “prova em fases”: os objetivos educacionais, a categorização das questões de acordo com a Taxonomia de Bloom, uma possível solução para a prova e um olhar sobre ela utilizando a Escala para Avaliação em Matemática;
- No capítulo 4 apresentamos a aplicação da primeira fase em uma turma do ensino médio de uma escola estadual. Nele está contido uma análise de um questionário dedicado ao professor da turma;
- No último capítulo trazemos nossas considerações finais e perspectivas para trabalhos futuros.

Os anexos trazem os Termos de Consentimento Livre Esclarecidos voltados aos participantes da pesquisa. O produto final da pesquisa encontra-se no Apêncice A.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Neste trabalho apresentamos uma abordagem qualitativa, e assim, utilizamos os conceitos de metodologia de pesquisa dispostos por Ludke e André (1986).

Uma pesquisa qualitativa é uma pesquisa que busca uma aproximação com o lugar de trabalho, nesse caso a sala de aula e os agentes envolvidos nela, tendo mais preocupação com o processo da pesquisa do que com o produto dela.

Com relação aos procedimentos metodológicos, apesar de Ludke e André (1986) definirem que pesquisa bibliográfica e documental são sinônimos, para este trabalho utilizaremos a ideia de Oliveira (2007, p.5) *apud* Sá-Silva (2009) onde o autor propõe que pesquisa bibliográfica "é uma modalidade de estudo e análise de documentos de domínio científico tais como livros, periódicos, enciclopédias, ensaios críticos, dicionários e artigos científicos". Já a pesquisa documental "recorre a materiais que ainda não receberam tratamento analítico, ou seja, as fontes primárias".

De outra maneira, pode-se dizer que a análise documental é uma fonte estável e rica de conhecimento. Os documentos são "uma fonte poderosa de onde podem ser retiradas evidências que fundamentam afirmações e declarações do pesquisador" podendo ser consultados várias vezes e servir de base para novas pesquisas (LUDKE, ANDRE. 1986, p. 39). Já a pesquisa bibliográfica possui as mesmas características da pesquisa documental no que diz respeito às afirmações de Ludke e André (1986). Entretanto, na pesquisa bibliográfica, são considerados artigos, livros, dissertações e teses de pesquisadores que tratam de avaliação e que carregam neles opiniões e posicionamentos.

Segundo Patton (1980, p. 42) *apud* Ludke e André (1986), a análise de dados qualitativos é um processo criativo que exige grande rigor intelectual e muita dedicação: "Não existe uma forma melhor ou mais correta. O que exige é sistematização e coerência do esquema escolhido com o que pretende o estudo". Logo, para que exista uma distinção entre as informações, neste trabalho os documentos oficiais são considerados como pesquisa documental e as leituras dos pesquisadores que tratam de avaliação são tratadas como pesquisa bibliográfica.

Nas próximas subseções apresentamos uma breve pesquisa bibliográfica e documental sobre avaliação e documentos oficiais (subseção 2.1) e uma descrição das metodologias para elaboração da prova em fases: Conceitos de Logaritmos (subseção 2.2), Taxonomia de Bloom (subseção 2.3) e Escala para Avaliação em Matemática (subseção 2.4).

2.1. Processos de avaliação da aprendizagem e as abordagens da avaliação

Nessa seção apresentamos um histórico sobre a avaliação da aprendizagem e as abordagens da avaliação. Apresentamos também as práticas de professores de Matemática do início do século XX e os documentos oficiais que legitimavam aquela prática, como também alguns pesquisadores que contribuíram com teorias de avaliação e suas principais ideias.

2.1.1. Avaliação da aprendizagem no início do século XX

Os processos de avaliação no Brasil têm um histórico marcado por diversas experiências. Em diferentes momentos da nossa história foram utilizados diversos processos avaliativos que tinham objetivos variados. Segundo Valente (2008), no ano de 1927 haviam orientações para que as avaliações fossem por meio de testes orais, onde determinava-se como seria a postura do examinador e do estudante nesse processo.

Esse processo era individualizado e composto normalmente por uma junta examinadora, onde os examinadores pediam, em geral, para que o estudante escrevesse ou citasse um teorema ou um conceito, mesmo sem aplicação ou contexto. Não havia a cobrança de conteúdos aplicados por essas juntas, e os conteúdos cobrados eram fruto da “decoreba” dos estudantes. O examinador considerava aprovado o estudante que respondesse com rapidez e demonstrasse convicção com sua resposta. Esse processo de avaliação permaneceu durante anos e dessa forma eram selecionados os estudantes que prosseguiriam nos estudos.

Ainda segundo Valente (2008), com o aumento na quantidade dos estudantes, esse processo se mostrou lento, pois a banca examinadora examinava um estudante de cada vez. Desse modo, houve a necessidade de aumentar a quantidade de estudantes avaliados com a preocupação de não diminuir a qualidade dessa avaliação. Nesse momento teve início a utilização dos exames de admissão, organizados por juntas, com as características do método avaliativo anterior, onde a principal delas, era não se cobrar conteúdos aplicados. Valente (2001) afirma que "o exame de admissão funcionou como um verdadeiro 'rito de passagem' no processo de seleção à continuidade dos estudos, representada pelo ginásio acadêmico, que teve procura intensificada a partir de 1930". Sousa (2009, p. 15) argumenta que "a finalidade da avaliação, até ser aprovada a lei de 1961, era apenas classificatória", dessa forma, os estudantes eram classificados mediante seu nível de desempenho em provas e exames. A "lei de 1961" dessa citação é a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 4024 de 20 de dezembro de 1961 (BRASIL, 1961). Essa foi a primeira legislação específica que tratou de assuntos da Educação no Brasil.

Valente (2008) ainda mostra que após a aprovação da Lei de 1961, o processo avaliativo passou a ser de responsabilidade da unidade escolar. É o que trata o artigo nº 39 desta lei: "A apuração do rendimento escolar ficará a cargo dos estabelecimentos de ensino, aos quais caberá expedir certificados de conclusão de séries e ciclos e diplomas de conclusão de cursos" (BRASIL, 1961). Desse modo, a unidade escolar tinha que seguir os regulamentos do Ministério da Educação e visitas de responsáveis pela avaliação, chamados de inspetores, tinham o objetivo de fiscalizar os processos de avaliação feitos pela unidade escolar.

É nesse momento que o papel do professor passa a ser não apenas aquele que ensinaria o conteúdo, mas também estava na responsabilidade dele o processo avaliativo, como traz o §1º do artigo nº 39 (BRASIL, 1961):

> na avaliação do aproveitamento do estudante preponderarão os resultados alcançados, durante o ano letivo, nas atividades escolares, asseguradas ao professor, nos exames e provas, liberdade de formulação de questões e autoridade de julgamento.

Essa mudança ascendeu uma discussão sobre um modelo justo de avaliação, que não prejudicasse os estudantes e professores e que fosse legítimo.

Entre as LDB de 1961 e de 1996 (atualmente em vigor), houve ainda a LDB de 1971 (BRASIL, 1971), onde, pela primeira vez, afirma-se que "na avaliação do aproveitamento, a ser expressa em notas ou menções, preponderarão os aspectos qualitativos sobre os quantitativos e os resultados obtidos durante o período letivo sobre os da prova final, caso esta seja exigida". Desse modo, levando em consideração os resultados obtidos durante o período letivo, a lei ascende a discussão que a avaliação não é apenas o momento da prova final, mas todo o processo de ensino e aprendizagem, que deve ser apreciado pelo professor para uma tomada de decisão.

Nas Leis de 1961 e 1971 não é abordada a ideia de avaliação contínua e cumulativa, mas elas já traziam um indicativo de mudança de concepção sobre o ato de avaliar e o fato de considerar "a avaliação durante o ano/período letivo", ou na linguagem atual, durante o processo de ensino e aprendizagem. Este fato mostra que o processo avaliativo estava centrado num momento único e que se esperava que os professores utilizassem todo o processo de ensino e aprendizagem em consideração nas suas avaliações. Entretanto, segundo Sousa (2009), a prática avaliativa realmente praticada na escola, não muda apenas com a promulgação de uma legislação. As leis estão sujeitas a interpretação com base nos valores e crenças de quem as implementa. Assim, mesmo com uma legislação que direcione a prática avaliativa, há outros fatores que contribuem para o cumprimento ou não da Lei.

Luckesi (2012) afirma que, na LDB 9394/1996, foi a primeira vez que o termo "avaliação da aprendizagem" surge nos documentos oficiais. Até então era comum a utilização dos "exames escolares" e da "aferição do rendimento escolar" em que o objetivo era de examinar e classificar os estudantes em grupos de aprovados e reprovados, por exemplo.

Para Luckesi (2012), a avaliação deve ser considerada como um instrumento para o professor utilizar em favor do melhor aproveitamento da aprendizagem dos estudantes. O autor ainda afirma que a avaliação faz um diagnóstico da realidade. Sendo assim, dependendo do resultado da avaliação, é possível determinar se é necessário ou não alterações no modo de ensinar, mudanças no currículo, ou qualquer outra alteração da dinâmica em sala de aula.

Na próxima seção apresentamos uma pesquisa documental dedicada a fatos da história da avaliação da aprendizagem e a alguns pesquisadores que proporcionaram novas concepções e suas principais ideias.

2.1.2. As abordagens da avaliação

Para Perrenoud (1999, p. 9),

> a avaliação não é uma tortura medieval. É uma invenção mais tardia, nascida com os colégios por volta do século XVII e tornada indissociável do

> ensino de massa que conhecemos desde o século XIX, com a escolaridade obrigatória.

As ideias de avaliação cognitiva do rendimento escolar começaram a ser discutidas no início do século XX quando Robert Thorndike (1910-1990) publicou trabalhos voltados à mensuração das mudanças do comportamento humano. Esses trabalhos resultaram no desenvolvimento de testes padronizados para medir habilidades e aptidões de estudantes. Esses conceitos de avaliação da aprendizagem foram introduzidos no Brasil na década de 30 refletindo práticas dos Estados Unidos, através das ideias de Ralph Tyler (1902-1994), onde ganharam destaque práticas como o registro de comportamento e questionários, por exemplo.

A avaliação da aprendizagem teve distintos momentos no decorrer desse século. Até a década de 1950, a avaliação tinha influência da psicologia e estava centrada em capacidades individuais mensuradas através de testes. Entre 1960 e 1970, na busca de garantir a produtividade escolar, a avaliação foi influenciada pelo tecnicismo, que tinha como objetivo tornar o ensino eficiente e funcional. Fiorentini (1995, p.15) descreve que "esta seria a pedagogia "oficial" do regime militar pós-64 que pretendia inserir a escola nos modelos de racionalização do sistema de produção capitalista".

A década de 1980 foi marcada pelo início da discussão sobre a função social da escola, resultando em implicações na avaliação da aprendizagem, fato que levou ao estudo de práticas avaliativas de natureza seletiva e classificatória e a tentativa de elaborar novas práticas que rompessem com essa natureza. Nesse momento, pesquisadores como Luckesi e Perrenoud, apresentam discussões sobre o autoritarismo na avaliação e sobre a necessidade de um olhar sobre a avaliação no processo de aprendizagem, não apenas nos resultados de exames finais, como estava sendo exercido.

Além disso, alguns pesquisadores classificaram a avaliação em algumas abordagens de acordo com a sua finalidade, com o momento realizado e com a relação entre o processo de ensino e aprendizagem (PERRENOUD, 1999; RUSSELL; AIRASIAN, 2014). Essas abordagens são: a avaliação diagnóstica, a avaliação somativa e a avaliação formativa (Figura 1).

Avaliação diagnóstica (ou inicial), de acordo com Russell e Airasian (2014, p. 42) fornece aos professores "o tipo de informação prática e direta do que eles precisam para fazer a sala de aula funcionar com eficiência". Com isso, podemos dizer que o objetivo da avaliação diagnóstica é avaliar o que o estudante já tem conhecimento (ou não) para que se possa elaborar um planejamento coerente e estratégias para recuperar algum conteúdo não aprendido. Em consequência, professores podem utilizar os resultados da avaliação diagnóstica com o intuito de verificar quais serão as potencialidades e deficiências quando será ministrado um novo tema, procurando desde o início prever as possíveis dúvidas durante o processo de ensino e aprendizagem e estar ciente para intervir de forma efetiva contribuindo com a aprendizagem e o método de ensino.

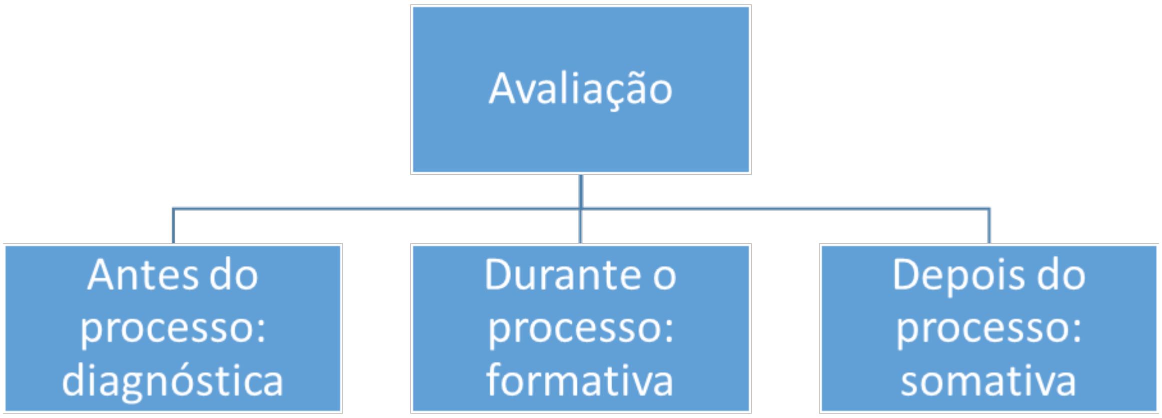


Figura 1 – Abordagens da avaliação.
Fonte: Adaptado de Alves (2008).

Ainda sobre a avaliação diagnóstica, Villa Torre *et al* (2009, p.66) afirmam que essa abordagem da avaliação pode trazer contribuições ao processo de ensino e aprendizagem por poder cumprir diferentes objetivos:

> - Informar ao professor a bagagem, isto é, os conhecimentos dos alunos antes de iniciar algum processo de ensino-aprendizagem;
> - Diagnosticar as potencialidades dos alunos;
> - Criar estratégias para que o aluno tome consciência de suas próprias explicações ou conhecimentos sobre determinado assunto ou fenômeno que está sendo estudado.

Avaliação somativa é o tipo de avaliação que é realizada ao final de um determinado ciclo. Por exemplo, uma prova dada no final do ano para avaliar o que o estudante aprendeu durante o ano, e que serve para determinar se o estudante está apto ou não para seguir seus estudos. Esta abordagem é comumente utilizada para determinar a aprovação ou reprovação e para certificação (RABELO, 2009 *apud* MONTEIRO, 2012).

A desvantagem dessa abordagem da avaliação é que não é dada a oportunidade de saber se o estudante evoluiu durante o processo, e também, deixa de lado todo o processo em que ele foi submetido. Além do que, o professor não tem a oportunidade de rever os conteúdos que o estudante não aprendeu com o intuito de promover/contribuir com a aprendizagem, sendo dessa forma, de caráter contrário à avaliação formativa.

Para Russell e Airasian (2014) a avaliação somativa também pode ser entendida como o momento em que o professor realiza a análise dos instrumentos utilizados para avaliar, e posteriormente, para tomar uma decisão, por exemplo, de aprovar ou reprovar o estudante. Desse modo, a avaliação somativa vai ao encontro das práticas escolares como o exame final, que fica sob a responsabilidade de, geralmente, apenas um professor.

O conceito de “avaliação formativa” foi introduzido por Scriven em 1967. Em 1983, Benjamin Bloom se utiliza dos conceitos de avaliação formativa em avaliação da aprendizagem de estudantes “com o objetivo de orientá-los para a realização do seu trabalho, ajudando-os a localizar suas dificuldades e a prosseguir em sua aprendizagem” (CABRERA, 2010).

Na literatura sobre avaliação da aprendizagem, o uso do termo “avaliação formativa” é recente. Entretanto, Villas Boas (2006) diz que termos como avaliação mediadora, emancipadora, dialógica, fundamentada e cidadã podem também ser entendidas como avaliação formativa.

Assim, a avaliação formativa (também chamada de instrucional) é a avaliação na qual todo o processo é avaliado e analisado. Não é a partir de um único instrumento de avaliação que se determina a aprendizagem de um estudante. Ela é feita no decorrer do processo de aprendizagem, possibilitando ao professor ver a evolução dos estudantes. Caso um conteúdo não seja assimilado por uma parte do grupo, tem-se a chance de rever esse conteúdo, como uma recuperação paralela (VILLAS BOAS, 2005), a fim de não apenas avaliar o estudante, mas avaliar a sua própria prática profissional, sempre tendo o objetivo de promover/contribuir com a aprendizagem. Para Russell e Airasian (2014, p. 120) “as avaliações formativas são usadas para alterar ou aprimorar as instruções enquanto ainda estão em andamento”. Dessa forma, diferentemente da avaliação somativa, podemos dizer que a avaliação formativa é realizada para promover o ensino e aprendizagem no que diz respeito às possíveis mudanças que podem ocorrer durante as aulas.

Assim sendo, a avaliação vista pelos documentos oficiais, deve ter a característica de ser contínua e cumulativa, características essas que a tornam mais próximas às avaliações de caráter formativo. Nessa linha de pensamento, Villas Boas (2006, p.78) complementa que:

> a avaliação cumpre, também, função formativa, pela qual os professores analisam, de maneira freqüente e interativa, o progresso dos estudantes, para identificar o que eles aprenderam e o que ainda não aprenderam, para que venham a aprender, e para que reorganizem o trabalho pedagógico. Essa avaliação requer que se considerem as diferenças dos estudantes, se adapte o trabalho às necessidades de cada um e se dê tratamento adequado aos seus resultados. Isso significa levar em conta não apenas os critérios de avaliação, mas, também, tomar o estudante como referência. A análise do seu progresso considera aspectos tais como: o esforço por ele despendido, o contexto particular do seu trabalho e as aprendizagens adquiridas ao longo do tempo. Consequentemente, o julgamento da sua produção e o feedback que lhe será oferecido levarão em conta o processo de aprendizagem por ele desenvolvido, e não apenas os critérios de avaliação.

Portanto, podemos dizer que a avaliação formativa busca avaliar qualitativamente as respostas dadas pelo estudante, buscando uma análise do progresso do mesmo e uma reflexão sobre o trabalho pedagógico realizado pelo professor.

Ainda sobre avaliação formativa, para Perrenoud (1999, p.78), a avaliação "formativa consiste em toda prática de avaliação contínua que pretenda contribuir para melhorar as aprendizagens em curso, qualquer que seja o quadro e qualquer que seja a extensão concreta da diferenciação do ensino". Perrenoud (1999) complementa que a abordagem formativa da avaliação deve ir de encontro às dificuldades de aprendizagem, com o intuito de diagnosticá-la e contribuir para a melhora do estudante, não sendo importante o momento da ação, desde que seja para contribuir para o desenvolvimento do estudante.

Russell e Airasian (2014), para facilitar o entendimento das abordagens da avaliação, apresentam uma descrição das abordagens e suas características. Neste trabalho, essas descrições foram adaptadas e estão dispostas no Quadro 1.

Geralmente, das três abordagens de avaliação mencionadas, a avaliação somativa é a que prevalece na sala de aula quando se faz a verificação da aprendizagem. Villas Boas (2006) destaca que uma das manifestações negativas da avaliação somativa na escola é o uso para uma avaliação classificatória, sendo essa uma prática que está impregnada na escola e que é extremamente difícil de libertar-se. Há um maior interesse por parte dos dirigentes educacionais em realizar a avaliação com uma função classificatória (entre aprovados ou reprovados, por exemplo) ou até mesmo para propósitos de avaliações externas.

Quadro 1 – Comparação entre as três abordagens das avaliações em sala de aula.

	Avaliação diagnóstica (ou inicial)	**Avaliação formativa**	**Avaliação somativa**
Propósito	Dar ao professor uma rápida ideia e conhecimento prático das características dos seus estudantes.	Planejar atividades educativas e monitorar o progresso da instrução.	Realizar aspectos burocráticos do ensino, como dar notas, agrupar estudantes e decidir seus lugares.
Período	Durante a primeira ou a segunda semana de aula.	Diariamente ao longo do ano letivo.	Periodicamente durante o ano letivo.
Método de coleta de evidências	Principalmente observação formal.	Observação formal e trabalhos para planejamento; observação informal para monitoramento.	Provas, trabalhos, relatórios, *quizzes* e projetos formais.
Tipo de evidências coletadas	Cognitivas, afetivas e motoras.	Principalmente cognitivas e afetivas.	Principalmente cognitivas.
Forma de arquivar as informações	Informações armazenadas na cabeça do professor; poucos relatórios escritos	Planos de aulas escritos; monitoramento não escrito de informações.	Relatórios formais no livro do professor ou nos arquivos da escola

Fonte: Adaptado de Russell e Airasian (2014, p. 18).

Mesmo tendo as avaliações diagnóstica e formativa uma maior efetividade sobre a aprendizagem dos estudantes, a preferência é pela avaliação somativa. Luckesi (2012) adverte o hábito dos professores de avaliar e de verificar. Segundo o autor, o ato de avaliar está ligado ao diagnóstico da realidade da aprendizagem e uma tomada de decisão em relação ao estudante. Já o ato de verificar apenas situa um conceito ou nota que não interfere numa mudança de posição em relação à aprendizagem do estudante.

Segundo Luckesi (2012), os exames escolares trazem consigo um caráter autoritário à avaliação somativa, geram classificações entre os estudantes “bons” e “ruins”, criando exclusão entre os próprios estudantes, fato que não vai ao encontro da democratização e da qualidade da escola.

Sadler (1989) destaca a utilidade da avaliação somativa na possibilidade da certificação e nos conceitos finais de cursos. Por outro lado, a função da avaliação formativa é “que valorize o estudante e sua aprendizagem e o torne parceiro de todo o processo, conduzindo à inclusão, e não à exclusão” (VILLAS BOAS, 2006, p. 77). Entretanto, para Villas Boas (2006), a diferença entre avaliação formativa e somativa está na utilização e nos efeitos dos dados obtidos, e não pelos instrumentos de coleta. A autora ainda ressalta a importância de encontrar utilidades dos dados da avaliação somativa para propósitos formativos na escola e na sala de aula.

Portanto, Sadler (1989) e Villas Boas (2006) concordam quando consideram que a diferença entre avaliação formativa e somativa se dá nos propósitos ao qual elas são utilizadas. Sadler (1989) aponta que os estudantes precisam saber o que se espera deles. Para Villas Boas (2006), o *feedback* vai ao encontro desse apontamento, tornando o processo avaliativo, um processo conjunto entre professores e estudantes, cada um com seus papéis e cientes de suas responsabilidades.

Na próxima seção apresentamos os documentos oficiais atuais e uma breve discussão que traz uma relação entre os documentos oficiais e as abordagens de avaliação.

2.1.3. Documentos oficiais relacionados à avaliação da aprendizagem

Nesta seção tratamos dos documentos oficiais relacionados à avaliação da aprendizagem. Para tanto, realizamos uma análise documental da LDB nº 9394/94, dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), e de documentos oficiais do Estado de São Paulo que tratam de Educação e de avaliação.

2.1.3.1. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

Em 1996, passou a vigorar Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB nº 9394/96), que faz mudanças no âmbito do sistema de educação brasileiro em comparação à antiga legislação (SOUSA, 2009); e é essa Lei que vigora até o momento (BRASIL, 1996).

De acordo com a LDB 9394/96, Art. 24, inciso V:

> a verificação do rendimento escolar observará os seguintes critérios:

> a) avaliação contínua e cumulativa do desempenho do estudante, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais;
> b) possibilidade de aceleração de estudos para estudantes com atraso escolar;
> c) possibilidade de avanço nos cursos e nas séries mediante verificação do aprendizado;
> d) aproveitamento de estudos concluídos com êxito;
> e) obrigatoriedade de estudos de recuperação, de preferência paralelos ao período letivo, para os casos de baixo rendimento escolar, a serem disciplinados pelas instituições de ensino em seus regimentos (BRASIL, 1996).

Desse modo, a legislação buscou nortear quais seriam as principais normas que serviriam de parâmetro para os professores em relação à estrutura e funcionamento da Educação Básica; não sendo apenas em relação à avaliação, mas com o processo escolar como um todo. Entretanto, anos após a promulgação da Lei, fica a questão se a LDB está sendo praticada nas instituições escolares do país.

Cury (2002) retrata que muitas passagens da Lei que contribuiriam para a democratização e qualidade da escola não estão sendo praticadas. Entre essas passagens, Cury (2002) destaca o não cumprimento da LDB 9394/96 no repasse de verbas da União aos Fundos Estaduais entre 1998 e 2001, a falta de vagas na Educação Infantil e a distância para a universalização do Ensino Médio.

2.1.3.2. Parâmetros Curriculares Nacionais

Em 1998, o Ministério da Educação e do Desporto (assim chamado na época), desenvolveu os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que são as diretrizes utilizadas para a Educação Básica. Os PCN foram elaborados com a intenção de fiservirem de apoio aos Currículos nas escolas públicas e privadas do Brasil e, consequentemente, no apoio a prática do professor em sala de aula, sendo desta forma não sendo uma lei, mas parâmetros e orientações. Em relação à avaliação, os PCN (Brasil, 1998, p. 97), apresentam que:

> a avaliação é hoje compreendida pelos educadores como elemento integrador, entre a aprendizagem e o ensino, que envolve múltiplos aspectos:
> a) o ajuste e a orientação na intervenção pedagógica para que o aluno aprenda da melhor forma;
> b) obtenção de informações sobre os objetivos que foram atingidos;
> c) obtenção de informações sobre o que foi aprendido e como;
> d) reflexão contínua para o professor sobre sua prática educativa;
> e) tomada de consciência de seus avanços, dificuldades e possibilidades.

A partir da análise dos PCN podemos afirmar que a avaliação tem o objetivo de contribuir para uma reflexão sobre as práticas docentes, e não como um instrumento utilizado para classificação ou para julgamento. Sousa (2009, p. 2) indica que os documentos oficiais propiciam uma tendência para a avaliação. Entretanto, “uma legislação não se impõe por si própria, estando sujeita, em sua aplicação, às apreciações e interpretações que seus usuários fazem, com base em suas crenças e valores”.

2.1.3.3. Currículo do Estado de São Paulo e a Resolução da Secretaria Estadual da Educação nº 30 de 10/05/2007

Outro documento oficial que norteia a prática dos professores em sala de aula do estado de São Paulo é o currículo da rede estadual. Os currículos das redes estaduais de ensino no Brasil estão fundamentados na LDB e nos PCN.

O Currículo do Estado de São Paulo é dividido em quatro partes, de acordo com as áreas de conhecimento (SÃO PAULO, 2010). Diferentemente do que é apresentado nos PCN, o Currículo do Estado de São Paulo apresenta a Matemática como uma área do conhecimento (nos PCN, a Matemática está incluída na área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias). O Quadro 2 apresenta essa divisão.

Quadro 2 – Áreas de conhecimento do Currículo do Estado de São Paulo

Ciências da Natureza e suas Tecnologias
Ciências Humanas e suas Tecnologias
Linguagens, Códigos e suas Tecnologias
Matemática e suas Tecnologias

No Currículo de Matemática, por exemplo, não há muitos apontamentos sobre os objetivos da avaliação nem sugestões de quais seriam os modos adequados para o acompanhamento da aprendizagem dos estudantes. Nele, ressalta-se que a responsabilidade de avaliar cabe a todos os professores e que

> os instrumentos de avaliação componham um espectro amplo, incluindo não somente prova, mas também trabalhos; não apenas provas sem consulta, mas também provas com consulta; não somente tarefas para serem realizadas em prazos definidos mas também outras com duração considerada necessária pelos estudantes; não apenas trabalhos individuais, mas também trabalhos em grupos, que valorizem a colaboração entre os estudantes; não apenas tarefas por escrito, mas também relatos orais; não

> somente trabalhos que esgotem os limites de uma aula, mas também projetos que extrapolem as dimensões do espaço e do tempo de uma aula etc (SÃO PAULO, 2010, p. 54).

Após todas as instruções em relação aos instrumentos de avaliação, podemos concluir que o Currículo de Matemática do estado de São Paulo, por exemplo, não deixa claro qual será a forma para se utilizar os dados obtidos através deles. Fica a cargo do professor e da escola a escolha dos instrumentos de avaliação e a utilização ou não dos dados para uma tomada de decisão em relação ao processo de ensino e aprendizagem dos estudantes.

Mais instruções sobre avaliação da aprendizagem são encontradas no Caderno do Gestor (caderno de instruções direcionadas aos professores coordenadores) (SÃO PAULO, 2010). Essas instruções indicam que a avaliação deve ter uma abordagem formativa, onde espera-se que "o professor conheça as competências e os interesses dos alunos e a avaliação seja contínua, diagnóstica e sistemática, dessa forma permitindo ao professor readaptar seu planejamento" (SÃO PAULO, 2010).

Em 2007, uma forma da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo padronizar a apresentação das sínteses bimestrais e finais foi apresentada com a Resolução SE Nº 30, de 10/05/2007, que realizou alterações em relação à resolução anterior como segue abaixo.

> Art. 1º - a partir de 2007, nas escolas da rede estadual, as sínteses bimestrais e finais dos resultados da avaliação do aproveitamento do aluno, em cada componente curricular, serão expressas em escala numérica de notas em números inteiros de 0 (zero) a 10 (dez), com arredondamento para o número inteiro imediatamente superior.
> Parágrafo único - As sínteses bimestrais e finais devem decorrer da avaliação do desempenho escolar do aluno, realizada por diferentes instrumentos de avaliação e de forma contínua e sistemática, ao longo do bimestre ou do ano letivo.
> Art. 2º - ao final do ano letivo, o professor deverá emitir, simultaneamente, a nota relativa ao último bimestre e a nota que expressará a avaliação final, ou seja, aquela que melhor reflete o progresso alcançado pelo aluno ao longo do ano letivo, por componente curricular, conforme a escala numérica citada no artigo anterior.
> Art. 3º - Será considerado como patamar indicativo de desempenho escolar satisfatório a nota igual ou superior a cinco.

Nesse momento alterou-se as sínteses como BOM, REGULAR, RUIM, A, B, C, etc. por uma escala numérica em notas de 0 (zero) a 10 (dez), padronizando essa apresentação. Essa resolução também corrobora instruções de outros documentos oficiais quando cita que a avaliação deve ser "realizada por diferentes instrumentos de avaliação e de forma contínua e sistemática" (SÃO PAULO, 2007).

Os documentos oficiais citados apresentam a avaliação em uma perspectiva que faz menção, mesmo sem usar os termos, às abordagens da avaliação. Na próxima subseção realizamos uma discussão sobre as abordagens da avaliação e suas relações com os documentos oficiais.

2.1.4. Relação entre as abordagens da avaliação e os documentos oficiais

No momento em que a LDB 9394/96 cita que devem prevalecer os "aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais", subtendemos que a abordagem formativa da avaliação, na qual todo um processo é analisado, deve prevalecer sobre a abordagem da avaliação somativa – costumeiramente utilizada como a prova realizada no final do processo de ensino. Dessa forma, podemos inferir que todo o processo de ensino e de aprendizagem deve ser considerado no momento da avaliação final, e consequentemente, essa consideração deve ter maior peso do que a avaliação que é realizada apenas ao final de um ciclo, por exemplo.

Diante disso, os PCN (1998) enfatizam a abordagem formativa, quando considera a avaliação como elemento integrador entre a possibilidade de ajustes no processo de ensino e sua intervenção, a utilidade da avaliação para o professor realizar uma reflexão quanto à sua prática, e o estudante que se torna consciente sobre o seu próprio aprendizado. Dessa forma, torna a avaliação como um processo em que os participantes da escola refletem acerca de seus resultados e os tornam participantes do processo avaliativo. Portanto, essas instruções vão ao encontro das ideias de Luckesi (2012, p.118) quando consideram que na avaliação deve ocorrer a participação dos estudantes na discussão dos objetivos atingidos.

Os PCN (1997) ainda enfatizam o uso dos resultados expressos pelos instrumentos de avaliação na interpretação de sinais e indícios, que permitem ao professor a reorganização de atividade pedagógica. Nessa interpretação de sinais e indícios, considerar o erro como algo inevitável e interpretá-lo "como um caminho para buscar o acerto" é algo que o professor deve considerar em sua prática (PCN, 1997, p. 41).

Os PCN (1997) ainda indicam que o professor deve identificar o erro e planejar uma intervenção adequada. Nesse aspecto, a abordagem diagnóstica/formativa é mencionada, mesmo sem usar os termos, mas essas características citadas propõem para essa prática avaliativa vão ao encontro às características citadas por Russel e Aurasian (2014), Luckesi (2012) e outros.

No trecho, “o acompanhamento e a reorganização do processo de ensino e aprendizagem na escola inclui, necessariamente, uma avaliação inicial, para o planejamento do professor, e uma avaliação ao final de uma etapa de trabalho” (PCN, 1998, p. 97), apontam como sugestão aos professores duas abordagens da avaliação: a avaliação diagnóstica e a avaliação somativa. Sendo a primeira para o professor diagnosticar o que os estudantes já sabem para pôr seu planejamento em prática, e a segunda, com o subsídio da avaliação diagnóstica, para recolher “todas as informações sobre o que o estudante aprendeu ao acompanhá-lo” (PCN, 1998, p. 98). Este é trazido como o momento para formalizar o que foi aprendido pelo estudante.

Pelos meios em que o professor realiza a avaliação, os PCN (1998, p. 98) elaboraram o Quadro 3. Nesse quadro, observamos que a avaliação deve ser considerada como um todo, inclusive com o auxílio de produções de outras disciplinas e de diferentes linguagens, como verbal, textual, escrita, numérica, entre outras.

Os PCN (1998, p. 99) consideram ainda a avaliação como responsabilidade do professor, entretanto, “delegá-la aos estudantes, em determinados momentos, é uma condição didática necessária para que construam instrumentos de autorregulação para as diferentes aprendizagens”. Nesse contexto, a auto-avaliação é o instrumento que dará aos estudantes a possiblidade de analisar suas próprias aprendizagens, possiblidades e limites além de dialogar com professor sobre seus pontos de vista.

Os PCN do Ensino Médio (2000) relatam que as mudanças que ocorreram no ensino irão demandar novos conceitos de avaliação. Uma das mudanças relatadas é o abandono de provas únicas e isoladas, pois o processo de avaliação deve ser contínuo para que sirva de orientação para o trabalho docente. Há ainda o destaque para a pobreza de uma avaliação que seja apenas uma repetição do que foi ensinado, pois a avaliação deve “apresentar situações em que os estudantes utilizem e vejam que realmente podem utilizar os conhecimentos, valores e habilidades que desenvolveram” (PCN, 2000, p. 51).

É possível observar uma mudança de parâmetro entre os PCN (1998) e os PCN Ensino Médio (2000). O primeiro garante que em relação à avaliação, “é importante, em primeiro lugar, garantir que sejam semelhantes às situações de aprendizagem comumente realizadas em sala de aula” (PCN, 1998, p. 99) e, o outro ressalta que não deve ser uma simples repetição do que foi aprendido, isso torna a avaliação pobre.

Quadro 3 – Considerações sobre avaliação

• observação sistemática: acompanhamento do processo de aprendizagem dos estudantes, utilizando alguns instrumentos, como registro em tabelas, listas de controle, diário de classe e outros;
• análise das produções dos estudantes: considerar a variedade de produções realizadas pelos estudantes, para que se possa ter um quadro real das aprendizagens conquistadas. Por exemplo: se a avaliação se dá sobre a competência dos estudantes na produção de textos, deve-se considerar a totalidade dessa produção, que envolve desde os primeiros registros escritos, no caderno de lição, até o registro das atividades de outras áreas e das atividades realizadas especificamente para esse aprendizado, além do texto produzido pelo estudante para os fins específicos desta avaliação;
• atividades específicas para a avaliação: os estudantes devem ter objetividade ao expor sobre um tema, ao responder um questionário. Para isso, é importante, em primeiro lugar, garantir que sejam semelhantes às situações de aprendizagem comumente realizadas em sala de aula; em segundo lugar, deixar claro para os estudantes o que se pretende avaliar, pois, inevitavelmente, estarão mais atentos a esses aspectos.

Fonte: PCN (1998, p. 98)

Eis um desafio para o professor atuante nesses dois momentos da educação básica: relacionar conceitos ensinados e avaliações com documentos oficiais discrepantes em ciclos diferentes de aprendizagem. Nesse trecho, fica registrado uma possível angústia do docente que leciona tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio quando se depara com a situação em que: para um nível de ensino se espera que a avaliação seja semelhante às atividades já realizadas, enquanto que no outro nível de ensino, se espera que as avaliações não sejam repetições das atividades. Tal angústia também pode ocorrer com os estudantes, que familiarizados com o modo de avaliação esperado do Ensino Fundamental, quando ao chegar no Ensino Médio, passam por um momento de transição imediato para outro modo de avaliar. Nesse caso, cabe reflexão por parte dos professores para que essa transição, do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, não se torne um momento de angústia. Consenso entre os PCN (1998) e os PCN Ensino Médio (2000) é que se avalie o que foi ensinado e numa linguagem que o estudante entenda.

Podendo essa transição ser também entendida como uma evolução do que se espera dos estudantes, esse momento de transição colabora para que professores estimulem os estudantes a adquirirem autonomia.

Considerando os documentos da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) e o Currículo de Matemática, ambos trazem a avaliação na discussão dos instrumentos de avaliação - no uso de mais de um instrumento, para que se valorize a produção dos estudantes. Entretanto o que fazer com os resultados desses instrumentos não está declarado no documento. Subtende-se que cabe ao professor decidir o que fazer com esses resultados. A Resolução SE nº 30, de 10/05/2007, teve a característica de padronizar a divulgação dos resultados das sínteses (avaliações) na escala numérica com o intervalo [0; 10] e considerar como desempenho satisfatório a nota maior ou igual a cinco. Dos documentos da SEE analisados, apenas o Caderno do Gestor faz menção às abordagens da avaliação, considerando que a avaliação tenha uma abordagem formativa. Realizando essa instrução, espera-se que os professores atuantes em sala de aula conheçam e façam uso das abordagens da avaliação com intuito de atingir o objetivo da avaliação, que, segundo Luckesi (2012) é garantir o sucesso.

Ainda, podemos considerar que muitas atitudes que o professor tem em sala de aula são reflexo da experiência de quando esse ainda era estudante e o que ele julga importante para o desenvolvimento dos estudantes. Heinig e Steuck (2007) relacionam que um professor aprende a ser professor em sala de aula, e desse modo, muitas das concepções que ele constrói são com base nas experiências de quando era estudante, e como consequência, muitas decisões são tomadas sem o conhecimento total dos documentos oficiais ou de teorias que embasam essas decisões.

Novamente tomamos Sousa (2009), quando relata que as ações avaliativas praticadas na escola, não mudam apenas com a promulgação de uma legislação. As leis estão sujeitas a interpretação com base nos valores e crenças de quem as implementa. O professor, nesse processo, se torna o construtor de sua ação avaliativa. Ele cria seu próprio processo ao interpretar os documentos oficiais e as ideias de pesquisadores e ao realizar suas práticas, além do fator da sua formação.

Tanto os documentos oficiais quanto os pesquisadores dão ênfase à avaliação como um processo contínuo e dão um tratamento importante aos diferentes instrumentos de avaliação. Por isso, há a necessidade de que os professores conheçam os documentos oficiais e os considerem quando desenvolverem suas atividades avaliativas. É também importante conhecer as abordagens de um processo avaliativo para as tomadas de decisões.

Portanto, sugerimos que os professores tenham foco no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, entendendo que os três caminham juntos na prática escolar, sendo que um complementa o outro e oferecem subsídios para a maior qualidade do ensino, sendo a avaliação um instrumento indispensável para permitir constatar, conforme menciona o Parecer CNE/CEB nº 12/97, "em que medida os objetivos colimados foram alcançados".

Na próxima seção trazemos uma breve introdução ao conceito de logaritmos visto durante o ensino médio que norteia a construção da nossa proposta de prova em fases.

2.2. Logaritmos

Para a avaliação da aprendizagem utilizando como instrumento a prova em fases, que será melhor explicado no capítulo 3, o conteúdo matemático escolhido foi o de logaritmos. Tal escolha é motivada pela possibilidade de utilização dos logaritmos na modelagem matemática de fenômenos e situações do cotidiano. Entretanto, apesar de sua aplicabilidade, o ensino de logaritmos vem sendo "deixado de lado" pelos professores, especialmente devido a quase inexistência de exercícios com este tema na mais importante avaliação externa atual: o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Forest (2014, p. 27) relata que "o conteúdo logaritmo aparece em raras oportunidades, e quando apareceu, foi em forma de um problema de aplicação, que exigia do aluno, além do conhecimento da definição e propriedades dos logaritmos, a interpretação do texto". Entretanto, ressaltamos que na edição do ENEM de 2015 houve uma questão sobre função logarítmica e em outras edições da avaliação houveram questões envolvendo logaritmos em aplicações em Questões de Ciências da Natureza.

Soares (2012), em seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), discutiu a evolução dos logaritmos, e juntamente com o aspecto histórico, o autor desenvolveu uma comparação entre concepções de Napier, no desenvolvimento dos primeiros estudos relacionados à logaritmos, com as concepções contidas no livro didático Dante (1999) afim de situá-las como esse conhecimento é ensinado nos dias de hoje.

O surgimento dos logaritmos ocorreu no século XVII, século esse que foi marcado pelas contribuições à Matemática. Sobre isso, Eves (2004, p. 341) mostra que

> muitos dos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra fizeram com que as demandas para que esses cálculos se tornassem cada vez mais rápidos e precisos crescessem sempre e continuamente. Quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores.

Segundo Sampaio (2015, p.1), nessa época, “os astrônomos se viam diante da tarefa de multiplicar dois ou mais números de 8 ou mais casas decimais cada, bem como de extrair raízes quadradas ou cubicas desses números”, tarefa difícil de se realizar, uma vez que não existiam calculadoras e tais cálculos demoravam horas para serem executados.

O desenvolvimento dos logaritmos se deve aos estudos de John Napier (1550 – 1617). A primeira publicação abordando esse tema foi em 1614, em um texto intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilha Lei dos Logaritmos). Abaixo há imagens da caixa de tabelas de cálculo matemático e dos ossos de Napier, objetos esses que auxiliavam Napier nos cálculos (imagens gentilmente cedidas por LUCHETTA, V. O. J.).

Figura 2 – Caixa de tabelas de cálculo matemático, cerca do ano de 1680, que funcionam da mesma forma como os ossos de Napier (tradução nossa).

Figura 3 – Os ossos de Napier, conjunto de marfim de cerca do ano de 1650, que convertem a multiplicação e divisão em simples problema de adição e subtração (tradução nossa).

A época em que Napier começou o estudo dos logaritmos foi um momento histórico muito singular na humanidade. A Idade Moderna foi um período de transição, a produção feudal logo sendo substituída pelo sistema capitalista de produção, o desenvolvimento e aperfeiçoamento de instrumentos como a bússola, a pólvora. Época marcada pelas grandes navegações, e além disso, novas experiências culturais e cientificas se espalhavam pela Europa trazendo novos olhares para o mundo.

Como reflexo disso, concepções mudaram com as ideias de Nicolau Copérnico (1473 – 1543), de Issac Newton (1642 – 1727), de Galileu Galilei (1564 – 1642), de René Descartes (1595 – 1650), entre de muitos outros personagens da nossa história.

Para Napier, vivenciando todas essas mudanças, “a matemática era um simples passatempo e ele só se interessava por certos aspectos dela” (SOARES, 2012, p.29). Assim, mesmo tendo a matemática como mero passatempo, ajudou no desenvolvimento dos logaritmos, trazendo diversas contribuições para a Ciência em geral.

Para Boyer (1996), Napier pode ter se motivado ao desenvolver os conceitos de logaritmos com o intuito de simplificar cálculos extremamente extensos relacionados à Astronomia. Desse modo, começou a pensar em um sistema de somas e subtrações, através de potências, que pudessem substituir as multiplicações e divisões.

A noção de logaritmo que Napier desenvolveu não é a mesma que é apresentada nos livros didáticos atuais. Soares (2012) relacionou as ideias de logaritmos de Napier e os conteúdos apresentados pelo livro didático de Dante, que podemos dizer ser o tratamento moderno desse conceito, e construiu o Quadro 4 resumindo essas comparações.

Ainda em seu trabalho, Soares (2012) complementa com a contextualização na matemática, a interdisciplinaridade e as aplicações[1] apresentadas por Napier e Dante, em suas respectivas obras (Quadro 5).

A importância do estudo dos logaritmos é evidenciada em suas aplicações, como na simplificação de cálculos extensos para a astronomia e navegação que foram úteis no passado e deram lugar a novas aplicações, como por exemplo, nos

[1] Ressaltamos que as aplicações citadas não são exclusividade do livro didático de Dante, outros autores também apresentam essas aplicações.

estudos de crescimento de populações, de datação de fósseis, entre outras aplicações.

A linearização de curvas é um outro importante recurso que pode ser realizado com o auxílio dos logaritmos. Alguns fenômenos físicos são expressos por funções tipo $y = ax^n$ ou $y = ae^x$, e com o recurso da linearização, é possível realizar mudanças de parâmetros com essas curvas e transformá-las em retas.

Quadro 4 – Comparações entre Dante e Napier

Definição de logaritmo	
Dante	Napier
$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	$\log N = L \Leftrightarrow N = 10^7(1-10^{-7})^L$

Consequências da definição de logaritmo	
Dante	Napier
$\log_a 1 = 0$	$\log 10^7 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log 10^7(1-10^{-7}) = 1$
$\log_a a^n = n$	$\log 10^7(1-10^{-7})^B = B$
$a^{\log_a N} = N$	$(1-10^{-7})^{\log N} = \frac{N}{10^7}$
$\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$	$\log N = \log B \Leftrightarrow N = B$

Propriedades operatórias dos logaritmos	
Dante	Napier
$\log_a(M\,.\,N) = \log_a M + \log_a N$	$\log \frac{M.N}{10^7} = \log M + \log N$
$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$	$\log\left(10^7 \frac{M}{N}\right) = \log M - \log N$
$\log_a M^N = N.\log_a M$ $\log_a M^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a M$	$\log \frac{N^n}{(10^7)^{n-1}} = n \log N$ $\log \frac{N^{\frac{1}{n}}}{(10^7)^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{\log N}{n}$
$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$	Não existe mudança de base

Fonte: Soares (2012, p. 52)

Quadro 5 – Comparações entre as abordagens de Dante e Napier

	Dante	Napier
Contextualização na matemática	Análise combinatória; matemática financeira; equação exponencial	Geometria; trigonometria
Interdisciplinaridade	Geografia; física; química; biologia	Física
Aplicações	Informática; dinâmica das populações; economia	Astronomia; navegação; comércio

As aplicações dos logaritmos como facilitador de cálculos perderam espaço com o advento das calculadoras e computadores. Entretanto, há inúmeras aplicações de funções logarítmicas, como descreve Miguel e Miorim (2002, p. 99) *apud* Soares (2012):

> [...] crescimento de bactérias em um meio em função do tempo, a quantificação de níveis de intensidade sonora, o estudo quantitativo do resfriamento de um corpo aquecido em função do tempo, a resolução de problemas envolvendo juros compostos, a expressão e determinação quantitativas de certas noções de orientação geográfica em determinados tipos de projeções cartográficas, o estudo quantitativo da relação entre a altura e a frequência dos sons emitidos por notas musicais, a construção de escala de medição do grau de acidez ou alcalinidade de uma solução química, a construção das escalas de medição da intensidade de terremotos, o estudo quantitativo da desintegração radioativa dos átomos de substâncias radioativas, etc [...]

Enfim, o estudo dos logaritmos tem grande importância pela sua história e pelas possibilidades de aplicação. Sendo assim, esse conteúdo pode ser tratado no Ensino Médio de forma contextualizada, atual e de maneira interdisciplinar.

No Quadro 6 apresentamos como dois livros didáticos, indicados no Guia do Livro Didático 2015 do Programa Nacional do Livro Didático, dispõem os conteúdos ensinados de logaritmos atualmente.

Como aplicação dos logaritmos, Dante (2013) mostra o estudo de populações, cálculo do pH de uma solução, além de mostrar exemplos em que são utilizadas calculadoras científicas.

Iezzi *et al* (2014) inclui no capítulo dedicado aos logaritmos uma breve história sobre a invenção dos logaritmos. Como aplicação, é trabalhada a escala de acidez e sua conexão com os logaritmos.

Quadro 6 – Conteúdos de logaritmos em livros didáticos

Dante (2013)	**Iezzi *et al* (2014)**
Definição de logaritmo de um número	Introdução
Consequências da definição de logaritmos	Definição
Propriedades operatórias de logaritmos	Consequências
Mudança de base do logaritmo	Sistemas de logaritmos
Cálculo de logaritmos	Propriedades operatórias
Aplicação dos logaritmos na resolução de equações exponenciais e problemas	Mudança de base

Na grade curricular do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, o ensino de logaritmos está situado no 3° bimestre do 1° ano do Ensino Médio, logo após o estudo do crescimento exponencial e das funções exponenciais. Desse modo, entendemos como pré-requisitos ao estudo dos logaritmos, a familiaridade por parte dos estudantes com as potências, equações exponenciais, resolução de equações, etc.

Na próxima seção trazemos uma breve descrição sobre a Taxonomia de Bloom, que será utilizada para classificar e estabelecer os objetivos educacionais de cada item da prova em fases.

2.3. Taxonomia De Bloom

A Taxonomia de Bloom é definida como um instrumento "cuja finalidade é auxiliar a identificação e a declaração dos objetivos ligados ao desenvolvimento cognitivo" (FERRAZ; BELHOT, 2010, p. 421). Ela é dividida em três categorias de domínio: cognitivo, afetivo e psicomotor. Apesar de pesquisadores discutirem os três domínios, o domínio cognitivo é o mais utilizado e conhecido (FERRAZ; BELHOT, 2010). Considerando a categoria de domínio cognitivo, o modelo original proposto por Bloom é resumidamente descrito na Figura 4.

Figura 4 – Categorias do domínio cognitivo proposto por Bloom, Englehart, Furst, Hill e Krathwolk, que ficou conhecido como Taxonomia de Bloom.
Fonte: Ferraz e Belhot (2010, p. 424)

Entretanto, em 2001 houve uma revisão desse modelo - novas descobertas na área de ensino e aprendizagem contribuíram para essa revisão. A Figura 5 descreve essas mudanças.

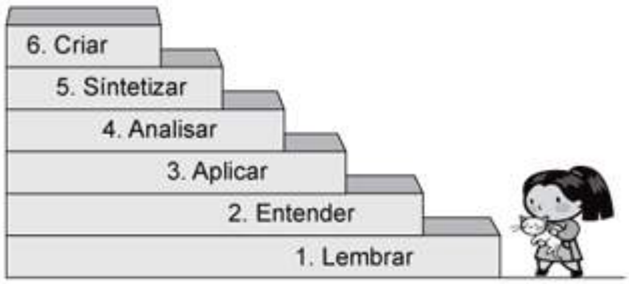


Figura 5 – Categorização atual da Taxonomia de Bloom proposta por Anderson, Krathwohl e Airasian, no ano de 2001.
Fonte: Ferraz e Belhot (2010, p. 427)

Cada categoria determina outras subcategorias, como mostra o Quadro 7. Essas subcategorias fornecem embasamento para a classificação a partir de verbos de ação utilizados nas questões. De acordo com Russell e Airasian (2014, p.165), “as questões da prova são feitas para fornecer um contexto em que o estudante deve aplicar uma habilidade ou conhecimento-alvo para produzir uma resposta”, dessa forma, os verbos de ação mostrados no Quadro 7 auxiliam o docente no momento de planejar a sua avaliação. Assim, os verbos de ação baseados na Taxonomia de Bloom estão associados às habilidades ou conhecimentos-alvo das questões.

Quadro 7 – Estrutura da dimensão do processo cognitivo na Taxonomia revisada dos objetivos educacionais.

CATEGORIAS	SUBCATEGORIAS	VERBOS DE AÇÃO
1. Lembrar – Buscar conhecimento relevante na memória de longo termo	a. Reconhecimento b. Lembrando	Reconhecer Lembrar
2. Entender – Determinar o significado de mensagens instrucionais, incluindo comunicação oral, escrita e gráfica	a. Interpretando b. Exemplificando c. Classificando d. Resumindo e. Inferindo f. Comparando g. Explicitando	Interpretar Exemplificar Classificar Resumir Inferir Comparar Explicitar
3. Aplicar – Executar ou usar um procedimento em uma dada situação	a. Executando b. Implementando	Executar Implementar
4. Analisar – Quebrar o material em suas partes constituintes e detectar como as partes se relacionam entre si e com o da estrutura ou propósito do todo	a. Diferenciando b. Organizando c. Atribuindo	Diferenciar
5. Sintetizar/ Avaliar – Fazer julgamentos baseados em critérios e padrões	a. Checando (Verificando) b. Criticando	Checar (Verificar) Criticar
6. Criar – Unir elementos para formar um todo coerente e novo ou fazer um produto original	a. Gerando b. Planejando c. Produzindo	Gerar Planejar Produzir

Fonte: Adaptado de Marcelino e Recena (2012, p. 165)

Ao utilizar a Taxonomia de Bloom nas questões para aplicação da prova, procura-se padronizar a linguagem para a análise dos objetivos cognitivos delas. A utilização da Taxonomia de Bloom também colabora para que o instrumento de avaliação utilizado tenha um fundamento teórico que coopere com o professor e os estudantes nesse processo, uma vez que a utilização dela traz benefícios ao ensino. Consideramos a utilização da Taxonomia de Bloom no contexto escolar benéfico ao ensino e assim, concordamos com Ferraz e Belhot (2010) no que se refere a

> - Oferecer a base para o desenvolvimento de instrumentos de avaliação e utilização de estratégias diferenciadas para facilitar, avaliar e estimular o desempenho dos estudantes em diferentes níveis de aquisição de conhecimento; e
> - Estimular os educadores a auxiliarem seus discentes, de forma estruturada e consciente, a adquirirem competências específicas a partir da percepção da necessidade de dominar habilidades mais simples (fatos) para, posteriormente, dominar as mais complexas (conceitos).

Esses benefícios vão ao encontro das ideias de avaliação formativa quando se relacionam às escolhas e aperfeiçoamento dos instrumentos de avaliação para a obtenção de resultados mais precisos sobre a aprendizagem dos estudantes, assim como na readequação dos conteúdos, para que os estudantes adquiram competências requeridas. Portanto, há a necessidade da utilização de um instrumento de avaliação, que além de auxiliar o professor na abordagem formativa, também serve de suporte para as abordagens diagnóstica e somativa.

Na próxima subseção apresentamos uma breve introdução à metodologia Escala para Avaliação em Matemática, que sugerimos para ser utilizada pelo professor como norteadora da correção da prova em fases.

2.4. Escala para Avaliação em Matemática

A Escala para Avaliação em Matemática descrita por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) *apud* Dante (2013) é utilizada para avaliar o conhecimento matemático apresentado na resposta do estudante. Essa metodologia utiliza três itens na sua avaliação: o Pensamento Matemático; as Estratégias, Processos e Modos de Pensar; e a Comunicação Matemática.

O Pensamento Matemático permite identificar se o estudante compreende os conceitos e princípios envolvidos no exercício. O item Estratégias, Processos e Modos de Pensar permite identificar se o estudante usa informações relevantes para a resolução, indica os elementos importantes e faz relações entre eles, além de indicar e mostrar a estratégia escolhida para a resolução da questão. Já o item Comunicação Matemática permite identificar a resposta dada para o exercício, seja com desenhos, diagramas, contra-exemplos, etc.

No exemplo abaixo utiliza-se a escala descrita para mostrar como ela é utilizada na análise das questões da prova em fases desse trabalho. Na resolução do exercício, simulamos uma possível resolução por parte dos estudantes, baseada em nossa experiência em sala de aula.

Exemplo: (DANTE, 2013) A expressão $M = C(1+i)^n$ nos permite calcular o montante M, resultante da aplicação do capital C a juros compostos, à taxa anual i, ao completar um período de n anos. Nessas condições, se o capital de $R\$\ 100.000{,}00$ for aplicado a juros compostos e à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de $R\$\,500.000,00$? (Dados: $\log 1{,}12 = 0{,}05$ e $\log 6 = 0{,}8$)

- Pensamento matemático: esperamos que o estudante perceba que se trata de um exercício no qual ele deve encontrar o valor de uma variável a partir de uma expressão dada e valores fornecidos pelo problema.
- Estratégias, processos e modos de pensar: espera-se que o estudante faça escolhas de dados relevantes para a resolução do exercício, utilize-os na expressão corretamente e realize os cálculos. Uma possibilidade, é que o estudante adote a seguinte estratégia utilizando o conceito de logaritmos já visto em sala:

$M = C + J = R\$100\ 000{,}00 + R\$500\ 000{,}00 = R\$\ 600\ 0000{,}00$

$C = R\$\ 100\ 000{,}00$

$i = 12\% = 0{,}12$

$n = ?$

$M = C(1+i)^n$

Neste caso, o estudante utiliza a expressão dada no exercício, substituindo corretamente pelos valores dados. Além disso, faz a correta transformação da taxa dada em porcentagem para número decimal para que utilize no cálculo com números reais. Ele também reconhece qual variável o problema solicita para a solução.

$600\ 000 = 100\ 000\ (1 + 0{,}12)^n$

$$1{,}12^n = \frac{6}{1}$$

$\log 1{,}12^n = \log 6$

$n \cdot \log 1{,}12 = \log 6$

$n \cdot \log 1{,}12 = \log 6$

$$n = \frac{\log 6}{\log 1{,}12}$$

$$n = \frac{0{,}8}{0{,}05}$$

$n = 16\ anos$

O estudante substitui corretamente os valores na expressão e aplica propriedades de logaritmos, até obter logaritmos conhecidos onde os valores aproximados foram dados no exercício.

- Comunicação matemática: espera-se que o estudante exponha a resposta de maneira organizada, utilizando de linguagem matemática, e não confundindo ou atribuindo novas variáveis. Por exemplo, “serão necessários 16 anos de tempo de aplicação”.

3 A PROVA EM FASES PARA O ENSINO DE LOGARITMOS

Nesse capítulo, trazemos dados de pesquisas acadêmicas sobre a prova em fases e nossa proposta para a avaliação dos conceitos de logaritmos.

3.1. O que é a prova em fases?

A prova em fases é um instrumento de avaliação que pode ser utilizado em vários momentos do processo de ensino e aprendizagem. De acordo com Mendes (2014), é baseada na prova de duas fases idealizada por De Lange (1987), quando o aluno faz a prova, o docente corrige e após isso, devolve ao aluno com apontamentos parciais e indicações de erros grosseiros. O aluno pode refazer os exercícios, caso considere necessário. Trevisan e Mendes (2015) destacam que a prova em fases tem o mesmo formato de uma prova escrita, que é resolvida em sala de aula e individualmente, onde as questões são associadas aos objetivos de aprendizagem a serem explorados num determinado tempo.

Nesse modelo o estudante tem contato com a prova em várias fases, podendo fazer exercícios em uma fase e na outra, refazê-los considerando o que aprendeu entre uma fase e outra. Durante as fases, o professor não corrige a prova de uma maneira “certo ou errado”; quando há erros nas resoluções dos exercícios, o professor intervém com considerações e reflexões para que o estudante tome consciência, entendendo o que falta para a resolução estar correta.

Pesquisas recentes envolvendo a prova em fases foram desenvolvidas pelo Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA) da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Essas pesquisas são teses de doutorado, orientadas pela Doutora Regina Luzia Corio de Buriasco com diferentes números de fases:

Quadro 8 – Pesquisas envolvendo a prova em fases

Pesquisador	Aplicação	Número de fases
Trevisan (2013)	Ensino técnico em vestuário	Seis
Pires (2013)	Formação continuada de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental	Três
Mendes (2014)	Disciplina de Cálculo no Ensino Superior	Dez

Com isso, o número de fases é um ponto a ser considerado: é uma variável que depende da opção dos professores. Há pesquisas realizadas com a aplicação de três fases (Pires, 2013) e até dez fases (Mendes, 2014). Desse modo, a escolha do número de fases depende o professor frente ao seu planejamento e frente às demandas escolares a que é submetido. Trevisan e Mendes (2015) classificam a escolha do número de fases como propostas “agressivas” (com muitas fases e que tendem a ser composta por um conteúdo mais abrangente) e propostas “conservadoras” (com menos fases, abrangendo menos conteúdos). Portanto, não há uma regra que determina o número de fases, isso é decidido de acordo com o planejamento e as perspectivas do docente.

Trevisan (2013) aplicou a prova em fases sobre trigonometria em uma turma do ensino técnico em vestuário. Teve duração de um semestre letivo e houve seis aplicações. Na visão do autor, essa pesquisa trouxe um novo repensar às próprias práticas avaliativas, fato que trouxe novas concepções sobre avaliação. Entretanto, diz que ainda é um desafio a utilização de “novos” modos de avaliar, uma vez que, de acordo com Trevisan (2013, p. 142) “muitas vezes entram em conflito com tradições pedagógicas já instituídas, chegando mesmo a ser vista como “ameaça” aos modelos de universidade, de aula, de professor e de estudante tradicionalmente produzidos”, sendo assim uma dificuldade à primeira vista para os estudantes que se deparam com o novo.

Sobre as percepções dos estudantes sobre a prova em fases, Trevisan (2013) destaca alguns aspectos positivos, como por exemplo, a possibilidade de pesquisar questões parecidas com as da prova e se preparar exatamente para a realização dos exercícios da prova. Como aspectos negativos, sob a percepção dos estudantes, Trevisan (2013) destaca a ausência do “certo” e “errado” nas considerações entre as fases e a dificuldade em identificar questões que estariam aptos a resolver.

Pires (2013) realizou sua pesquisa com nove professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental e houve três fases. Como conteúdo da prova, foram selecionadas questões considerando “a sua potencialidade quanto à exploração de elementos caracterizadores do pensamento matemático, assim como a possibilidade de resolver a questão de mais de uma maneira, ou de ter mais de uma resposta” (PIRES, 2013, p. 18).

Como contribuição da prova em fases, Pires (2013) relata a possibilidade de mudança do olhar dos professores sobre a produção escrita dos estudantes, onde muitas vezes, apenas a análise dessa produção não dá conta do professor realmente identificar o que o aluno sabe, e que isso exige muitas vezes ir ao aluno e perguntar oralmente sobre sua aprendizagem. Como proposta para elaborar a prova em fases, destaca que a tarefa de elaboração das questões exige estudo e reflexão.

Mendes (2014) aplicou a prova em fases em dez momentos em uma turma com 48 alunos matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral do curso de Engenharia. Para Mendes (2014, p. 9), a prova em fases “revelou-se um recurso profícuo para o ensino, a aprendizagem e a avaliação, permitindo ao professor recolher informações e guiar o aluno em cada momento do processo”, entretanto, declara que a potencialidade do instrumento de avaliação depende diretamente da qualidade das intervenções escritas por parte do professor.

Uma limitação indicada por Mendes (2014) é a sobrecarga de trabalho, uma vez que as análises das provas são feitas individualmente, fato que demanda um tempo considerável quando se trata de turmas com grande número de estudantes e provas com muitas questões.

Como possibilidades para o professor, Mendes (2014, p. 206) destaca o “repensar e reorientar o encaminhamento das aulas a partir das informações de cada fase” e “desenvolver um diálogo escrito com o aluno que vai ao encontro do principal propósito da avaliação escolar: promover a aprendizagem”. Como possibilidade para o estudante, destacam-se “aprender em momentos de avaliação”, “auto-avaliar” e “desenvolver autonomia no sentido de ser protagonista de seu processo de aprender”.

Portanto, nas três pesquisas descritas acima, o instrumento de avaliação prova em fases está atrelada na possibilidade de um diálogo entre o que o professor está ensinando e o que os alunos estão aprendendo. A partir desse diálogo, há a possibilidade de tanto o professor quanto o estudante reverem sua atuação nesse processo escolar e tomarem novas decisões ou ratificarem as que já tenham tomado.

A prova em fases, preferencialmente, deve conter exercícios com diferentes níveis de complexidade, distribuídos de forma aleatória, isto é, a ordem dos exercícios na prova não é exatamente a ordem em que as aulas ocorrem e assim, os estudantes têm liberdade de ler todas as questões da prova e respondê-las na ordem em que lhe achar conveniente.

O instrumento de avaliação prova em fases corrobora com as ideias defendidas por Sadler (1989) e Villas Boas (2006). Para Sadler (1989), o estudante precisa saber o que se espera dele em relação à aprendizagem e para Villas Boas (2006), as intervenções do professor escritas na prova, materializam-se em um momento importante para o *feedback*. Portanto, a prova em fases tem a oportunidade de realizar um retorno de alerta ao estudante sobre a sua aprendizagem, dando a ele informações como se está ou não resolvendo as questões de acordo com o que se espera dele naquele momento do processo de aprendizagem do conteúdo. Para o professor, a prova em fases torna a avaliação num instrumento com as abordagens diagnóstica e formativa, contribuindo para o (re)planejamento das aulas.

Uma característica importante da prova em fases é a possibilidade de ser utilizada com abordagem diagnóstica, formativa ou somativa, dependendo do momento em que está o processo de ensino e aprendizagem. Ela subsidia o professor na tomada de decisão em qualquer momento do processo avaliativo. Assim, esse instrumento de avaliação quebra com o modelo diagnóstico-formativo-somativo de forma engessada, tornando esse processo dinâmico.

Na próxima seção, apresentamos nossa proposta de avaliação utilizando a prova em fases.

3.2. Nossa proposta de prova em fases

Neste trabalho, a prova foi elaborada com exercícios de diferentes níveis de complexidade, distribuídos de forma aleatória, sobre o conteúdo de logaritmos. A ordem dos exercícios não é exatamente a ordem em que as aulas ocorrem/ocorrerão. Assim, os estudantes têm liberdade de ler todas as questões da prova e respondê-las na ordem em que achar conveniente.

Consideramos que as questões contidas nessa prova devem ter as seguintes características:

- questões com diferentes tipos de dificuldades, considerando as habilidades do domínio cognitivo da Taxonomia de Bloom;
- questões abertas que requerem investigação e reflexão; e

- questões escolhidas pelo professor responsável pela avaliação interna.

A proposta de avaliação utilizando a prova em fases como instrumento de avaliação é desenvolvê-la em três fases:

- 1ª fase: nessa fase, é explicado aos estudantes como será a execução dessa prova e ainda terão o primeiro contato com a prova. Eles poderão resolver os exercícios, mas espera-se que os estudantes resolvam os exercícios que contemplem os conteúdos que são pré-requisitos para o entendimento de logaritmos, uma vez que esses exercícios estão na prova com o objetivo de realizar uma abordagem diagnóstica;
- 2ª fase: essa fase ocorre no decorrer do processo de ensino e aprendizagem. Nessa fase, os estudantes têm novamente acesso à prova. Ela virá com comentários e considerações nas questões resolvidas na primeira fase. Nessa fase, os estudantes podem resolver tanto exercícios que se sentirem confortáveis em resolver quanto refazer os exercícios da primeira fase. Essa fase tem uma abordagem diagnóstica e formativa, pois está no decorrer do processo de ensino e aprendizagem e o professor, de acordo com as respostas dos estudantes, pode replanejar suas aulas. Como vantagem para o estudante, questões que criaram dúvidas durante a resolução da 1ª. fase podem servir de ponto de partida para a investigação e estudo para a resolução da 2ª. fase;
- 3ª fase: nessa última fase, os estudantes recebem novamente a prova, com comentários relativos as questões já respondidas nas outras duas fases anteriores. Nessa fase ainda há uma abordagem formativa na avaliação pois novamente os estudantes têm acesso a prova com comentários e ainda podem refazer os exercícios resolvidos na primeira ou segunda fases e fazer os que ainda não foram resolvidos. Entretanto, após o término dessa fase, há uma abordagem somativa, pois o professor fará uma correção, agora sim utilizando termos como certo ou errado (ou atingiu ou não o objetivo da questão).

Consideramos nessa pesquisa a sugestão de Mendes (2014), que utiliza cores de tinta diferentes para os comentários do professor em cada fase:

- Respostas dos estudantes: lápis ou azul;
- Comentários da fase 1: vermelha;

- Comentários da fase 2: verde;
- Correção após a fase 3: preta.

Com relação aos comentários produzidos pelo professor entre as fases, elaboramos o seguinte quadro, como exemplo, onde são destacados elementos que consideramos importantes nesse momento da avaliação.

Enunciado: *Usando a definição de logaritmos, calcule* $\log_3 27$.

1ª fase	2ª fase	3ª fase
Possível apresentação de solução pelo estudante: $\log_3 27$ Fatorar 27: 27 | 2 13 | 2 6 | 2 3 | 3 1 $2^3 * 3$ $3^x = 2^3 * 3$ Observações: reconheceu que se trata de conceitos de logaritmos, utilizou uma estratégia coerente, entretanto, não a utiliza de forma correta nem apresenta uma resposta. Logo, ele apresenta o pensamento matemático e começa a delinear estratégias para resolução. Ainda não apresenta a comunicação matemática a contento. Sugestão: o professor	Possível apresentação de solução pelo estudante: $\log_3 27$ Fatorar 27: 27 | 3 9 | 3 3 | 3 1 3^3 $3^x = 3^3$ R: $x = 3$ Observações: como sequência da primeira fase, dessa vez o estudante realizou a decomposição em fatores primos e utilizou estratégias coerentes em busca da resolução. Entretanto, ele indica o valor numérico de x como resolução do exercício, fato esse que não foi solicitado no enunciado. Logo, o estudante apresenta o pensamento matemático, traçou uma estratégia de resolução coerente e apresenta uma dificuldade em sua comunicação matemática.	Possível apresentação de solução pelo estudante: $\log_3 27 = x$ Fatorar 27: 27 | 3 9 | 3 3 | 3 1 3^3 $3^x = 3^3$ $x = 3$ Portanto, se: $\log_3 27 = x \rightarrow \mathbf{\log_3 27 = 3}$ Observações: na terceira fase, em sequência à segunda fase, o estudante se comunica matematicamente de forma coerente e atinge o objetivo educacional esperado: Aplicar a definição de logaritmos. Logo, o estudante apresentou a contento os três itens da escala de avaliação em Matemática. Sugestão: nesta etapa o

deve interferir no ponto onde a resolução não está correta e indicar o que pode ser feito para resolver o exercício. Como por exemplo: “Reflita sobre a fatoração efetuada. O fator 2 é a melhor escolha para esse caso?”	Sugestão: como nessa segunda fase o aluno já mostrou uma evolução em relação à resolução apresentada na primeira fase, o professor sugere colocar o resultado de uma forma comumente encontrada, como por exemplo: “Reflita: o exercício pode o valor de x?”	professor pode elogiar o desempenho do aluno, como por exemplo: “Muito bem”, “Parabéns”, ou algum sinal de correto.

Na próxima seção apresentamos as questões presentes na nossa prova em fases, a categorização delas de acordo com a Taxonomia de Bloom e um olhar para a correção de acordo com a Escala para Avaliação em Matemática.

3.3. Apresentando a prova em fases de logaritmos

O processo de escolha dos exercícios presentes na prova foi realizado pelo pesquisador juntamente com o professor da turma. Inicialmente, foram selecionados 41 exercícios. Neles haviam aplicações dos logaritmos na química, física, biologia e em matemática financeira. Essa lista de exercícios foi apresentada ao professor, e a partir dela, ele poderia selecionar os exercícios que considerasse conveniente e também propor novos exercícios. Dessa forma, o professor selecionou 15 exercícios da lista e propôs um novo exercício para compor a prova.

Evidenciamos que nessa escolha, o professor não selecionou nenhum exercício que havia aplicações de logaritmos. Percebemos que a escolha do professor foi focada em exercícios de aplicação de definição e de propriedades dos logaritmos.

Foram indicados também os objetivos educacionais de cada questão (OE), uma possível solução para cada item e uma análise de cada item da prova à luz das ideias de Ponte *et al* (2006) *apud* Dante (2013) sobre a Escala para Avaliação em Matemática. Em nossa proposta, estes últimos são de conhecimento apenas do professor.

Abaixo segue o instrumento de avaliação proposto para aplicação da prova em três fases. Nele constam 16 exercícios baseados no livro didático Dante (2013) e no Caderno da Aluno (2015) para o conceito de logaritmos para o Ensino Médio.

Prova de Matemática – 3° Bimestre

Instruções:

Esta prova contém 16 exercícios que contemplam o conteúdo estudado durante esse bimestre. A prova será resolvida em três fases. Você é quem decide por qual questão irá começar a resolver. A cada fase a prova será recolhida pelo professor e será devolvida a você na próxima fase, então você pode refazer os exercícios quantas vezes forem necessários nessas três fases. Não será permitido anotações em relação às questões dessa prova.

A prova é individual, sem consulta e sem uso de calculadora.

Use somente caneta de tinta azul ou lápis. As resoluções devem estar acompanhadas de seus devidos cálculos e respostas.

Boa prova!

1. (OE: APLICAR a definição de logaritmos para logaritmos de diferentes valores de base e de logaritmandos)

   Usando a definição de logaritmos, calcule:

   a) $\log_3 27$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

$$\log_3 27 = 3$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição : $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $3^x = 27$ $3^x = 3^3$ $x = 3$	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $\log_3 27 = 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$$

$$2^{-x} = 2^5$$

$$-x = 5$$

$$x = -5$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$ $2^{-x} = 2^5$ $-x = 5$ $x = -5$ A estratégia citada acima mostra que o aluno domina conceitos anteriores aos de logaritmos, como por exemplo $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$

c) $\log_2 0{,}5$

$$2^x = 0{,}5$$

$$2^x = \frac{1}{2}$$

$$2^x = 2^{-1}$$

$$x = -1$$

$$\log_2 0{,}5 = -1$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não

definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	solução: $2^x = 0{,}5$ $2^x = \frac{1}{2}$ $2^x = 2^{-1}$ $x = -1$ A estratégia citada acima mostra que o aluno domina conceitos anteriores aos de logaritmos, como por exemplo $0{,}5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$. Mesmo sendo uma simples conversão entre números decimais e fracionários, é um elemento importante para resolução do item.	ambígua: $\log_2 0{,}5 = -1$

d) $\log_2 \sqrt{8}$

$$2^x = \sqrt{8}$$
$$2^x = (2^3)^{\frac{1}{2}}$$
$$2^x = 2^{\frac{3}{2}}$$
$$x = \frac{3}{2}$$
$$\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $2^x = \sqrt{8}$ $2^x = (2^3)^{\frac{1}{2}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}}$ $x = \frac{3}{2}$	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$ ou $\log_2 \sqrt{8} = 1{,}5$ Assim, há vários modos de apresentar a resposta de forma coerente.

	A estratégia citada acima mostra que o aluno domina conceitos anteriores aos de logaritmos, como por exemplo $\sqrt{8} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$.	

2. (OE: CALCULAR o valor de uma variável na base a partir dos valores do logaritmo e logaritmando)
   Determine o valor da base a nas igualdades a seguir:
   a) $\log_a 8 = 3$

$$a^3 = 8$$

$$a^3 = 2^3$$

$$a = 2$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $a^3 = 8$ $a^3 = 2^3$ ou $a^3 = 8$ $a = \sqrt[3]{8}$	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $a = 2$

b) $\log_a 1 = 0$

$$a^0 = 1$$

$$\forall\, a \in R_+^* - \{1\}$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição:	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua:

$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	solução: $a^0 = 1$ Esse item remete às condições de existência de logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \; e \; a \neq 1 \end{cases}$".	$\forall\, a \in R_+^* - \{1\}$ ou $a > 0 \; e \; a \neq 1$

c) $\log_a \frac{1}{16} = 2$

$$a^2 = \frac{1}{16}$$

$$a^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $a^2 = \frac{1}{16}$ $a^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ ou $a^2 = \frac{1}{16}$ $a = \sqrt{\frac{1}{16}}$ Como pelas condições de existência dos logaritmos, a base dos logaritmos	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $a = \frac{1}{4}$

	tem que ser maior que zero e diferente de um, então: $$a = \frac{1}{4}$$	

3. (OE: DETERMINAR o valor de uma variável em diferentes posições da notação de logaritmo – logaritmando e base do logaritmo)
Determine o valor numérico de x das igualdades:
a) $\log_2 64 = x$

$$2^x = 64$$

$$2^x = 2^6$$

$$x = 6$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$	Indicar a estratégia apropriada: $$2^x = 64$$ $$2^x = 2^6$$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $$x = 6$$

b) $\log_x 125 = 3$

$$x^3 = 125$$

$$x^3 = 5^3$$

$$x = 5$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$	Indicar a estratégia apropriada: $$x^3 = 125$$ $$x^3 = 5^3$$ ou $$x^3 = 125$$ $$x = \sqrt[3]{125}$$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $$x = 5$$

c) $2 = \log_x 625$

$$x^2 = 625$$

$$x = \sqrt{625}$$

$$x = 25$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada: $x^2 = 625$ $x^2 = 25^2$ ou $x^2 = 625$ $x = \sqrt{625}$ Como pelas condições de existência dos logaritmos, a base dos logaritmos tem que ser maior que zero e diferente de um, então: $x = 25$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $x = 25$

d) $\log x = 0$

$$10^0 = x$$

$$x = 1$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada: $10^0 = x$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $x = 1$

4. (OE: ANALISAR o valor de uma variável encontrada para inequações de primeira e segunda ordem que encontram-se na posição de logaritmando, para que o logaritmo exista, ou seja, não seja uma indefinição)

Ache os valores reais de x para os quais é possível determinar:

a) $\log_{10}(x-3)$

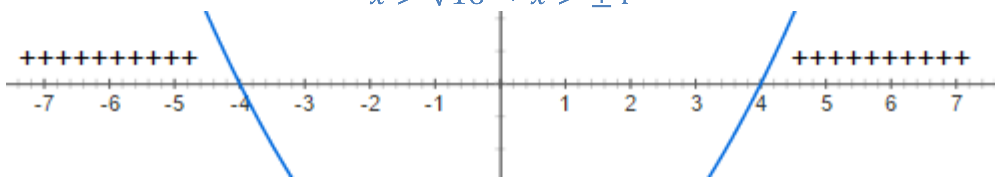
$$x-3>0 \rightarrow x>3$$

$$\{x \in R | x>3\}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N>0 \\ a>0 \; e \; a \neq 1 \end{cases}$"	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: $x-3>0 \rightarrow x>3$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $\{x \in R \| x>3\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

b) $\log_4(x^2-16)$

$$x^2-16>0 \rightarrow x^2>16$$
$$x>\sqrt{16} \rightarrow x> \pm 4$$



Os valores onde $x^2-16>0$ são: $x_1<-4 \; e \; x_2>4$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N>0 \\ a>0 \; e \; a \neq 1 \end{cases}$"	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: $x^2-16>0 \rightarrow x^2>16$	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $x_1<-4 \; e \; x_2>4$

	$x > \sqrt{16}$ $x < -4 \; e \; x > 4$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

5. (OE: ANALISAR o valor de uma variável encontrada para inequações de primeira ordem, na posição de base, para que o logaritmo exista, ou seja, não seja uma indefinição)
Determine os valores de x para que exista:
a) $\log_{x-5} 10$

$$Condição\ 1: x - 5 > 0 \rightarrow x > 5$$

$$Condição\ 2: x - 5 \neq 1 \rightarrow x \neq 6$$

$$\{x \in R | x > 5 \; e \; x \neq 6\}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \; e \; a \neq 1 \end{cases}$"	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: $Condição\ 1: x - 5 > 0 \rightarrow$ $x > 5$ $Condição\ 2: x - 5 \neq 1 \rightarrow$ $x \neq 6$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $\{x \in R | x > 5 \; e \; x \neq 6\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

b) $\log_{2x-1} \sqrt{3}$

$$Condição\ 1: 2x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$Condição\ 2: 2x - 1 \neq 1 \rightarrow x \neq 1$$

$$\{x \in R | x > \frac{1}{2}\ e\ x \neq 1\}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0\ e\ a\ \neq 1 \end{cases}$"	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: $Condição\ 1: 2x - 1 > 0 \rightarrow$ $x > \frac{1}{2}$ $Condição\ 2: 2x - 1 \neq 1 \rightarrow$ $x \neq 1$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $\{x \in R \| x > \frac{1}{2}\ e\ x \neq 1\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

6. (OE: ANALISAR o valor de uma variável encontrada a partir de um sistema de inequações de primeira ordem formado a partir das condições de existência do logaritmo para a base e para o logaritmando)
   Determine o conjunto dos valores reais de x para que seja possível definir:
   a) $\log_x(x - 3)$

$$Condição\ 1: x > 0$$

$$Condição\ 2:\ x \neq 1$$

$$Condição\ 3: x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$$

$$\{x \in R | x > 3\}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como

somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \; e \; a \neq 1 \end{cases}$"	e indicar a estratégia apropriada para resolução: $Condição\ 1: x > 0$ $Condição\ 2:\ x \neq 1$ $Condição\ 3: x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	suporte para seus argumentos: $\{x \in R \mid x > 3\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

b) $\log_{x-1}(x+4)$

$$Condição\ 1: x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$Condição\ 2: x - 1 \neq 1 \rightarrow x \neq 2$$

$$Condição\ 3: x + 4 > 0 \rightarrow x > -4$$

$$\{x \in R \mid x > 1 \; e \; x \neq 2\}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \; e \; a \neq 1 \end{cases}$"	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: $Condição\ 1: x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$ $Condição\ 2: x - 1 \neq 1 \rightarrow x \neq 2$ $Condição\ 3: x + 4 > 0 \rightarrow x > -4$	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $\{x \in R \mid x > 1 \; e \; x \neq 2\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

	Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	

7. (OE: CLASSIFICAR em verdadeiro ou falso o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos e suas propriedades)
Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique:
a) $\log_5 1 = 1$

$$\log_5 1 = 1$$
$$5^1 = 1$$
$$5 = 1\ (falso)$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Utilizar a definição dos logaritmos e executar de forma correta os algoritmos: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Utilizar os dados do exercício de forma coerente: $\log_5 1 = 1$ $5^1 = 1$ $5 = 1$	Indicar a justificativa para a reposta (por cálculos, por exemplo) e classificar em verdadeiro ou falso: $5 = 1$ $falso$ Assim, no item é necessário que o aluno comunique a sua resposta utilizando a definição dos logaritmos e ainda classificar se a afirmação que o item traz é verdadeira ou falsa.

b) $\log_1 5 = 5$

$$1^5 = 5$$
$$1 = 5\ (falso)$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Utilizar a definição dos logaritmos e executar de forma correta os	Utilizar os dados do exercício de forma coerente:	Indicar a justificativa para a reposta (por cálculos, por exemplo) e classificar

algoritmos: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	$1^5 = 5$ $1 = 5$	em verdadeiro ou falso: $1 = 5$ $falso$ Assim, no item é necessário que o aluno comunique a sua resposta utilizando a definição dos logaritmos e ainda classificar se a afirmação que o item traz é verdadeira ou falsa.

c) $\log_5 1 = 0$

$$5^0 = 1$$

$$1 = 1\ (verdadeiro)$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Utilizar a definição dos logaritmos e executar de forma correta os algoritmos: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Utilizar os dados do exercício de forma coerente: $5^0 = 1$ $1 = 1$	Indicar a justificativa para a reposta (por cálculos, por exemplo) e classificar em verdadeiro ou falso: $1 = 1$ $verdadeiro$ Assim, no item é necessário que o aluno comunique a sua resposta utilizando a definição dos logaritmos e ainda classificar se a afirmação que o item traz é verdadeira ou falsa.

d) $\log_7 3^7 = 3$

$$7^3 = 3^7$$

$$343 = 2187\ (falso)$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Utilizar a definição dos logaritmos e executar de	Utilizar os dados do	Indicar a justificativa para a reposta (por cálculos,

forma correta os algoritmos: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	exercício de forma coerente: $7^3 = 3^7$ $343 = 2187$	por exemplo) e classificar em verdadeiro ou falso: $343 = 2187$ $falso$ Assim, no item é necessário que o aluno comunique a sua resposta utilizando a definição dos logaritmos e ainda classificar se a afirmação que o item traz é verdadeira ou falsa.

e) $2^{\log_2 5} = 5$

De acordo com a propriedade dos logaritmos $a^{\log_a b} = b$, então $5 = 5\ (verdadeiro)$.

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Utilizar a definição dos logaritmos e executar de forma correta os algoritmos: $a^{\log_a b} = b$	Utilizar os dados do exercício de forma coerente: $a^{\log_a b} = b \rightarrow 5 = 5$	Indicar a justificativa para a reposta (por cálculos, por exemplo) e classificar em verdadeiro ou falso: $5 = 5$ $verdadeiro$ Assim, no item é necessário que o aluno comunique a sua resposta utilizando uma propriedade dos logaritmos e ainda classificar se a afirmação que o item traz é verdadeira ou falsa.

8. (OE: CALCULAR o valor de uma expressão numérica utilizando a definição de logaritmos e propriedades de potenciação)
   Calcule o valor das expressões: (os itens que compõem esse exercícios utilizam a seguinte propriedade dos logaritmos: $a^{\log_a b} = b$)
   a) $10^{\log_{10} 3} = 3$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer as definições e propriedades dos logaritmos para o exercício: $a^{\log_a b} = b$	Indicar a estratégia apropriada e mostrar o processo de resolução, nesse caso é apenas uma aplicação da propriedade: $10^{\log_{10} 3} = 3$	Indicar a resposta de forma mais simples possível: $10^{\log_{10} 3} = 3$

b) $3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2} = 3^{\log_3 2 \cdot \log_2 7} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_2 7} = 2^{\log_2 7} = 7$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer as definições e propriedades dos logaritmos para o exercício: $a^{\log_a b} = b$	Indicar a estratégia apropriada e mostrar o processo de resolução: $3^{\log_3 2 \cdot \log_2 7} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_2 7} =$ $= 2^{\log_2 7}$ O item requer do estudante realizar alguns traquejos que tornam possível a aplicação da propriedade dos logaritmos, como por exemplo, a propriedade associativa da multiplicação $(x \cdot y = y \cdot x)$ e uma propriedade da potenciação $(a^{x \cdot y} = (a^x)^y)$.	Indicar a resposta de forma mais simples possível: $3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2} = 7$

c) $2^{1+\log_2 3} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3 = 6$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer as definições e propriedades dos logaritmos para o exercício: $a^{\log_a b} = b$	Indicar a estratégia apropriada e mostrar o processo de resolução: $2^1 \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3$ Esse item ainda requer dos estudantes que se recordem e apliquem a seguinte propriedade das potências:	Indicar a resposta de forma mais simples possível: $2^{1+\log_2 3} = 6$

	$a^{x+y} = a^x \cdot a$^y	

9. (OE: CALCULAR o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos e propriedades operatórias a partir de valores de algébricos de logaritmos)
   Dados $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, determine em função de a e b:
   a) $\log 6$

$$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 6 = \log(2 \cdot 3) =$ $= \log 2 + \log 3$ Assim, um ponto importante para destaque nesse item é a possibilidade de utilizar a fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado.	Determinar o valor do logaritmo em função das variáveis indicadas, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 6 = a + b$

b) $\log 24$

$$\log 24 = \log(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 3 = a + a + a + b = 3a + b$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 24 = \log(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) =$ $= \log 2 + \log 2 + \log 2 +$ $+ \log 3 = a + a + a + b$ Assim, um ponto importante para destaque	Determinar o valor do logaritmo em função das variáveis indicadas, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 24 = 3a + b$

	nesse item é a possibilidade de utilizar a fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado. O estudante também pode relacionar esse item com o resultado do item anterior uma vez que $\log(24) = \log(4 \cdot 6) = \log 4 + \log 6$, e o resultado algébrico de $\log 6$ já é conhecido.	

10. (OE: CALCULAR o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos e propriedades operatórias a partir de valores de algébricos de logaritmos)
    Dados $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, determine em função de x e y:
    a) $\log 5$

$$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - x$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $$\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) =$$ $$= \log 10 - \log 2$$ Nesse item é necessário utilizar a estratégia de que $5 = \frac{10}{2}$, e a partir disso, desenvolver a propriedade operatória dos logaritmos. Além de lembrar que $\log 10 = 1$.	Determinar o valor do logaritmo em função das variáveis indicadas, utilizando terminologia e notação apropriadas: $$\log 5 = 1 - x$$

b) $\log 0{,}06$

$$\log 0{,}06 = \log\left(\frac{2\cdot 3}{100}\right) = \log 2 + \log 3 - \log 100 = x + y - 2$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $\log_b(m\cdot n) = \log_b m + \log_b n$ $\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 0{,}06 = \log\left(\frac{2\cdot 3}{100}\right) =$ $= \log 2 + \log 3 - \log 100$ O estudante deve utilizar os conceitos de números decimais para converter o 0,06 em um número que seja possível operar utilizando as propriedades operatórias dos logaritmos com os valores algébricos dados. O estudante também precisa recordar que $\log 100 = 2$.	Determinar o valor do logaritmo em função das variáveis indicadas, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 0{,}06 = x + y - 2$

11. (OE: CALCULAR o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos e propriedade de mudança de base)
Escreva usando logaritmos de base 10.
a) $\log_2 5$

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{\log 5}{\log 2}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as definições e propriedades relacionados com o exercício: $\log_b m = \frac{\log_k m}{\log_k b}$	Utilizar as definições e propriedades de forma coerente: $\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$	Apresentar a resposta na forma que se pede usando terminologia e notações apropriadas. Inclusive, demonstra conhecer que nessa situação pode ocultar a base 10 do logaritmo.

		$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$ ou $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$

b) $\log_x 2$

$$\log_x 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} x} = \frac{\log 2}{\log x}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as definições e propriedades relacionados com o exercício $\log_b m = \frac{\log_k m}{\log_k b}$	Utilizar as definições e propriedades de forma coerente $\log_x 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} x}$	Apresentar a resposta na forma que se pede usando terminologia e notações apropriadas. Inclusive, demonstra conhecer que nessa situação pode ocultar a base 10 do logaritmo. $\log_x 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} x}$ ou $\log_x 2 = \frac{\log 2}{\log x}$

12. (OE: DETERMINAR através da definição de logaritmos, entre quais inteiros consecutivos os logaritmos, tanto de base dez como de outra base, se localizam)
Determine entre quais inteiros consecutivos fica cada logaritmo:
a) $\log 279$

$$\log 100 < \log 279 < \log 1000$$

$$2 < \log 297 < 3$$

$\log 279$ está entre 2 e 3.

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Identificar as definições relacionadas ao exercício.	Utilizar elementos coerentes para a resolução, usar informação exterior ao	Apresentar a resposta de forma completa e não

$a < b < c$ $\log a < \log b < \log c$	enunciado relevante e indicar estratégia apropriada: $\log 100 < \log 279 < \log 1000$ $2 < \log 297 < 3$ Nesse caso, o estudante deve recordar quais logaritmos têm resultados inteiros próximos ao do logaritmo solicitado no item.	ambígua: $\log 279$ está entre 2 e 3

b) $\log 0{,}071$

$$\log 0{,}01 < \log 0{,}071 < \log 0{,}1$$

$$\log \frac{1}{100} < \log 0{,}071 < \log \frac{1}{10}$$

$$-2 < \log 0{,}071 < -1$$

$\log 0{,}071$ está entre -2 e -1.

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Identificar as definições relacionadas ao exercício. $a < b < c$ $\log a < \log b < \log c$	Utilizar elementos coerentes para a resolução, usar informação exterior ao enunciado relevante e indicar estratégia apropriada: $\log 0{,}01 < \log 0{,}071 < \log 0{,}1$ $\log \frac{1}{100} < \log 0{,}071 < \log \frac{1}{10}$ $-2 < \log 0{,}071 < -1$ Nesse caso, o estudante deve recordar quais logaritmos têm resultados inteiros próximos ao do logaritmo solicitado no item.	Apresentar a resposta de forma completa e não ambígua: $\log 0{,}071$ está entre -2 e -1

c) $\log_7 2$

$$\log_7 1 < \log_7 2 < \log_7 7$$

$$0 < \log_7 2 < 1$$

$\log_7 2$ está entre 0 e 1.

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Identificar as definições	Utilizar elementos	Apresentar a resposta de

relacionadas ao exercício. $$a < b < c$$ $$\log a < \log b < \log c$$	coerentes para a resolução, usar informação exterior ao enunciado relevante e indicar estratégia apropriada: $$\log_7 1 < \log_7 2 < \log_7 7$$ $$0 < \log_7 2 < 1$$ Nesse caso, o estudante deve recordar quais logaritmos têm resultados inteiros próximos ao do logaritmo solicitado no item.	forma completa e não ambígua: $\log_7 2$ está entre 0 e 1 ou $$0 < \log_7 2 < 1$$

13. (OE: UTILIZAR propriedades de potenciação para calcular o valor de logaritmos com base e logaritmando de base 10)

Calcule:

a) $\log 100$

$$10^x = 100$$

$$10^x = 10^2$$

$$x = 2$$

$$\log 100 = 2$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$	Indicar a estratégia apropriada: $$10^x = 100$$ $$10^x = 10^2$$ $$x = 2$$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $$\log 100 = 2$$

b) $\log 0{,}001$

$$10^x = 0{,}001$$

$$10^x = \frac{1}{1000}$$

$$10^x = 10^{-3}$$

$$x = -3$$

$$\log 0{,}001 = -3$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada: $10^x = 0{,}001$ $10^x = \frac{1}{1000}$ $10^x = 10^{-3}$ $x = -3$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $\log 0{,}001 = -3$

c) $\log 10\,000\,000$

$$10^x = 10\,000\,000$$
$$10^x = 10^7$$
$$x = 7$$
$$\log 10\,000\,000 = 7$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada: $10^x = 10\,000\,000$ $10^x = 10^7$ $x = 7$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $\log 10\,000\,000 = 7$

14. (OE: CALCULAR o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos, propriedades operatórias e valores aproximados de logaritmos dados)
Dados $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 7 = 0{,}85$, determine:
a) $\log 14$

$$\log 14 = \log(2 \cdot 7) = \log 2 + \log 7 = 0{,}30 + 0{,}85 = 1{,}15$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer qual das propriedades dos logaritmos deve utilizar e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 14 = \log(2 \cdot 7) =$ $= \log 2 + \log 7 =$	Determinar o valor numérico aproximado do logaritmo, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 14 = 1{,}15$

	$= 0{,}30 + 0{,}85$ Nesse item, é possível a utilização da fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado.	

b) $\log 50$

$$\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 10 = \log 10 - \log 2 + \log 10$$
$$= 1 - 0{,}30 + 1 = 1{,}70$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$ $\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) =$ $= \log 5 + \log 10 =$ $= \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 10 =$ $= \log 10 - \log 2 + \log 10 =$ $= 1 - 0{,}30 + 1$ Nesse item, é possível a utilização da fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado. O estudante ainda precisa lembrar que $\log 10 = 1$, sendo uma informação alheia ao enunciado do exercício.	Determinar o valor numérico aproximado do logaritmo, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 50 = 1{,}70$

c) $\log 70$

$$\log 70 = \log(7 \cdot 10) = \log 7 + \log 10 = 0{,}85 + 1 = 1{,}85$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 70 = \log(7 \cdot 10) =$ $= \log 7 + \log 10 =$ $= 0{,}85 + 1$ Nesse item, é possível a utilização da fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado. O estudante ainda precisa lembrar que $\log 10 = 1$, sendo uma informação alheia ao enunciado do exercício.	Determinar o valor numérico aproximado do logaritmo, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 70 = 1{,}85$

15. (OE: CALCULAR o valor de uma variável utilizando propriedades de equações exponenciais)
Resolva as seguintes equações:
a) $2^x = 4$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Identificar quais itens serão resolvidos com conceitos de logaritmos ou com conceitos de equações exponenciais.	Utilizar estratégias coerentes para cada item: $2^x = 2^2$ A estratégia mais comum para esse item é a fatoração.	Indicar a resposta de forma completa e não ambígua: $x = 2$

b) $10^x = 1\,000$

$$10^x = 10^3$$

$$x = 3$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Identificar quais itens serão resolvidos com conceitos de logaritmos ou com conceitos de equações exponenciais.	Utilizar estratégias coerentes para cada item: $10^x = 10^3$ A estratégia mais comum para esse item é a fatoração.	Indicar a resposta de forma completa e não ambígua: $x = 3$

c) $2^x = 5$

$$2^x = 5$$

$$x = \log_2 5$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Identificar quais itens serão resolvidos com conceitos de logaritmos ou com conceitos de equações exponenciais:	Utilizar estratégias coerentes para cada item: $2^x = 5$ Nesse item, conceitos de exponenciais não são suficientes para calcular o valor numérico de x, então, conceitos de logaritmos serão utilizados.	Indicar a resposta de forma completa e não ambígua: $x = \log_2 5$

d) $10^x = 990$

$$10^x = 990$$
$$x = \log_{10} 990$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Identificar quais itens serão resolvidos com	Utilizar estratégias	Indicar a resposta de forma completa e não

conceitos de logaritmos ou com conceitos de equações exponenciais.	coerentes para cada item: $$10^x = 990$$ Nesse item, conceitos de exponenciais não são suficientes para calcular o valor numérico de x, então, conceitos de logaritmos serão utilizados.	ambígua: $$x = \log_{10} 990$$

16. (OE: APLICAR o conceito de logaritmos para resolver uma situação problema sobre a decomposição de uma substância radioativa no tempo (meia-vida))
Certa substância radioativa decompõe-se de forma que sua massa m reduz-se à metade do valor inicial a cada 4 horas, ou seja, $m = m_0 . 2^{-0,25t}$, sendo m_0 o valor inicial da massa. Partindo-se de 60 gramas da substância, pergunta-se:

a) Qual será a massa restante após 8 horas?

Sendo m_0 o valor inicial da massa sendo 60 gramas, sua massa restante após 8 horas será de:

$$m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$$
$$m = 60 \cdot 2^{-0,25 \cdot 8}$$
$$m = 60 \cdot 2^{-2}$$
$$m = 60 \cdot \frac{1}{2^2}$$
$$m = \frac{60}{4}$$
$$m = 15\ g$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Identificar quais são os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.	Utilizar fórmulas e dados do exercício de forma coerente, identificar elementos importantes para a resolução e indicar a estratégia de forma coerente: $$m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$$ $$m = 60 \cdot 2^{-0,25 \cdot 8}$$ $$m = 60 \cdot 2^{-2}$$ $$m = 60 \cdot \frac{1}{2^2}$$ $$m = \frac{60}{4}$$	Indicar a resposta de forma correta, não ambígua, podendo apresentar como suporte, argumentos coerentes e completos: $$m = 15\ g$$

	Esse item requer do estudante a utilização dos dados fornecidos pelo enunciado, substituí-los na expressão dada e realizar os cálculos de forma correta.	

b) Após quanto tempo a massa restante será igual a 12 gramas? (Utilize o valor aproximado $5 \cong 2^{2,32}$.)

$$m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$$
$$12 = 60 \cdot 2^{-0,25t}$$
$$\frac{12}{60} = 2^{-0,25t}$$
$$\frac{1}{5} = 2^{-0,25t}$$
$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2^{0,25t}}$$
$$5 = 2^{0,25t}$$

Como $5 \cong 2^{2,32}$, temos que:

$$2^{2,32} = 2^{0,25t}$$
$$2,32 = 0,25t$$
$$t = \frac{2,32}{0,25}$$
$$t = 9,28\ horas$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Identificar quais são os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.	Utilizar fórmulas e dados do exercício de forma coerente, identificar elementos importantes para a resolução e indicar a estratégia de forma coerente: $m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$ $12 = 60 \cdot 2^{-0,25t}$ $\frac{12}{60} = 2^{-0,25t}$ $\frac{1}{5} = 2^{-0,25t}$	Indicar a resposta de forma correta, não ambígua, podendo apresentar como suporte, argumentos coerentes e completos: $t = 9,28\ horas$

	$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2^{0,25t}}$$ $$5 = 2^{0,25t}$$ Como $5 \cong 2^{2,32}$, temos que: $$2^{2,32} = 2^{0,25t}$$ $$2,32 = 0,25t$$ $$t = \frac{2,32}{0,25}$$ Esse item requer do estudante a utilização dos dados fornecidos pelo enunciado, substituí-los na expressão dada e realizar os cálculos de forma correta.	

A partir da literatura da Taxonomia de Bloom foi elaborado o Quadro 9 onde foram classificadas as questões presentes na prova em fases. Note que, com essa classificação, nenhum exercício se enquadrou nas características das categorias “lembrar“, “sintetizar” e “criar”, enquanto a maioria das questões foram classificadas na categoria “aplicar”.

Quadro 9 – Classificação dos exercícios da prova em fases baseada na Taxonomia de Bloom.

CATEGORIAS	VERBOS DE AÇÃO	EXERCÍCIO
1. Lembrar – Buscar conhecimento relevante na memória de longo termo	Reconhecer Lembrar	Nenhum exercício
2. Entender – Determinar o significado de mensagens instrucionais, incluindo comunicação oral, escrita e gráfica	Interpretar Exemplificar Entender	

	Classificar Resumir Inferir Comparar Explicitar	12
3. Aplicar – Executar ou usar um procedimento em uma dada situação	Aplicar Executar Implementar	1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15 e 16
4. Analisar – Quebrar o material em suas partes constituintes e detectar como as partes se relacionam entre si e com o da estrutura ou propósito do todo	Diferenciar Interpretar Analisar	4, 5, 6 e 7
5. Sintetizar/ Avaliar – Fazer julgamentos baseados em critérios e padrões	Checar (Verificar) Criticar	Nenhum exercício
6. Criar – Unir elementos para formar um todo coerente e novo ou fazer um produto original	Gerar Planejar Produzir	Nenhum exercício

4 APLICAÇÃO DA PESQUISA

A avaliação foi dirigida a um docente e a uma turma de estudantes do 1° ano do Ensino Médio regular de uma escola pública da rede estadual de São Paulo.

Os questionários que serão apresentados a seguir foram apreciados e aprovados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) com parecer liberado em 4 de setembro de 2015. O docente e os estudantes que aceitaram participar da pesquisa foram convidados a assinar ao Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), com intuído de autorizar o uso de suas produções escritas (Veja Anexo B).

A aplicação da prova em fases foi marcada por um momento em que a comunidade escolar (23/09/2015) foi comunicada da reorganização proposta pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo (SEE/SP). A aplicação e os resultados dela foram influenciados por tal momento, pois tanto professores quanto alunos ficaram abalados com o comunicado que no próximo ano eles seriam transferidos compulsoriamente para uma outra escola da região.

Segundo a SEE/SP, a reorganização das escolas por ciclo teria impacto positivo no aprendizado dos alunos, pois favorece “a gestão das unidades e possibilita a adoção de estratégias pedagógicas focadas na idade e fase de aprendizado dos alunos” (SÃO PAULO, 2016).

Pela proposta do Governo, a escola passaria a atender a alunos de Ensino Fundamental II (do 6° ao 9° ano) e que os alunos do Ensino Médio seriam transferidos para outra escola da região, fato que um grupo de alunos não aceitou. O grupo de alunos alegou que a SEE/SP não foi democrática na elaboração da proposta, não consultando nem os servidores nem a comunidade escolar local, havendo protestos pedindo a revogação do projeto de reorganização das escolas.

Após vários protestos realizados na região, o grupo de alunos decidiu por ocupar a escola. Em 16 de novembro de 2015, a escola foi ocupada pelos estudantes com o objetivo de pressionar o Governo Estadual a revogar o processo de reorganização.

A escola permaneceu ocupada por 23 dias, sendo desocupada dia 9 de dezembro de 2015, após a publicação em Diário Oficial do Estado de São Paulo (publicado em 4 de dezembro de 2015) da suspensão do projeto de reorganização das escolas. Durante toda a ocupação, a escola foi cuidada pelos alunos, nenhum equipamento, vidros, paredes, ou outros elementos da escola foram danificados, inclusive, muros da escola foram grafitados com mensagens sobre a Educação, como por exemplo:

- “A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo” de Nelson Mandela;
- “+ escolas, - cadeias”.

Houve a aplicação da primeira fase. Entretanto, a continuidade da aplicação da prova coincidiu com o anúncio da reorganização escolar, seguido pelos protestos e a ocupação dos estudantes. Enquanto a escola estava ocupada, todas as atividades docentes foram suspensas, os professores e alunos ficaram em recesso, secretaria e direção não funcionaram. Foi outro momento difícil para a aplicação da prova, e por fim, não houve a aplicação da segunda nem da terceira fase, pela escolha do professor, findando a pesquisa de campo apenas na aplicação do primeiro questionário ao docente e a primeira fase da prova.

Após o término da ocupação, em 9 de dezembro de 2015, houve o período de reposição (últimos dias de dezembro e segunda quinzena de janeiro) das aulas referentes ao período de ocupação, entretanto, os alunos não compareceram às aulas, impossibilitando a continuidade da pesquisa.

Em 2015, além da comunicação da reorganização, houve uma greve dos professores durante 92 dias no primeiro semestre, fatos que afetaram a execução do planejamento escolar.

Com relação aos envolvidos na pesquisa, seis estudantes aceitaram fazer parte da pesquisa com a realização da prova em fases.

Nas subseções seguintes descrevemos os questionários que foram elaborados ao professor, a auto-avaliação proposta aos estudantes e o instrumento de avaliação prova em fases. Tais instrumentos de coleta de dados são importantes para aplicação da pesquisa com o intuito de conhecer a contribuição deste tipo de instrumento de avaliação ao docente e aos estudantes. Além disso, apresentamos a metodologia de análise dos questionários, assim como a análise do primeiro questionário docente e também a análise da primeira fase da aplicação com a resolução dos estudantes e os comentários do professor.

4.1. Descrição do questionário ao docente

Foram elaborados dois questionários a serem respondidos em momentos diferentes pelo professor. O primeiro questionário, cuja principal função é conhecer as suas concepções em relação à avaliação e suas práticas avaliativas, foi aplicado antes da introdução da prova em fases. O segundo questionário tem a função de saber qual é a contribuição da prova em fases no processo de ensino e aprendizagem, sob o olhar do professor.

1° Questionário – professor

a) Como você entende o processo avaliativo?
b) Por que avaliar?
c) Você sabe o que significa os termos "avaliação diagnóstica", "avaliação formativa" e "avaliação somativa"? Se sim, dê alguns exemplos.
d) Qual o seu objetivo em avaliar seus estudantes?
e) Como você avalia seus estudantes? Descreva o seu processo de avaliação.
f) Que fatores você considera na avaliação dos seus estudantes?
g) Quais instrumentos são utilizados na avaliação de seus estudantes?
h) Em qual periodicidade você se utiliza dos instrumentos de avaliação?
i) Você utiliza informações extraídas da avaliação no momento de planejar suas aulas? Como?
j) Na sua opinião, qual é a utilidade da avaliação no processo de ensino e aprendizagem?
k) Os estudantes sabem o porquê estão sendo avaliados e quais são os critérios que são utilizados na avaliação?
l) Você conhece o conceito de prova em fases?

2° Questionário – professor

a) Qual foi a dinâmica da sala de aula com a utilização da prova em fases?
b) Na sua visão, os estudantes entenderam qual foi o objetivo da prova em fases?
c) Houve uma preocupação dos estudantes em estudar, entre as fases da prova, visando os exercícios da prova?

d) Na sua opinião, qual foi a contribuição da prova em fases no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes?
e) Você utilizou informações extraídas dessa prova em fases no momento de planejar suas aulas? Como?
f) Na sua opinião, houveram vantagens e desvantagem na utilização da prova em fases? Quais?

4.2. Descrição do questionário aos estudantes

Para o questionário do estudante, elaboramos uma auto-avaliação para ser aplicada ao final da prova em fases. Com essa auto-avaliação esperamos saber quais as concepções que os estudantes têm sobre avaliação, quais as impressões dos estudantes sobre esse instrumento de avaliação, se os estudantes conhecem o que se espera deles na avaliação, quais suas percepções sobre esse processo e se a prova em fases contribui ou não no processo de aprendizagem. Com tal questionário, pretendemos analisar, a partir de Sadler (1989), a participação dos estudantes no processo avaliativo. Dessa forma, o pesquisador afirma que é necessário que o estudante conheça o que se espera dele em relação aos objetivos de aprendizagem, seja capaz de comparar seu desempenho com o desempenho esperado e busque envolver-se em ações para alcançar os objetivos esperados.

Questionário – estudante

a) Como você entende o conceito de avaliação?
b) Você sabe como está sendo avaliado e os critérios utilizados? Justifique.
c) Como você se preparou entre uma fase e outra da prova? (adaptado de TREVISAN, 2013)[2]
d) Qual foi a contribuição das considerações do professor entre uma fase e outra da prova? (TREVISAN, 2013)[2]
e) Para você, quais foram as vantagens e desvantagens dessa prova?
f) Sobre o instrumento de avaliação prova em fases, avalie os seguintes aspectos:

---

[2] A versão a ser entregue durante a autoavaliação ao estudante não tem aparição das referências.

	Excelente	Bom	Regular	Ruim
Tempo para realização	○	○	○	○
Comentários entre as fases	○	○	○	○
Esclarecimento sobre a prova em fases	○	○	○	○

4.3. Resultados esperados com a aplicação da prova em fases e dos questionários ao professor e aos estudantes

Com essa pesquisa esperamos contribuir com a pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática visto que pesquisas relacionadas à avaliação da aprendizagem, principalmente em Matemática, ainda são escassas.

Esperamos que com a análise dos questionários, verifique:

- quais são as percepções do professor de Matemática sobre seus processos avaliativos e suas relações com o processo de ensino e aprendizagem;
- as vantagens e desvantagens da prova em fases; o sucesso ou não do aprendizado quando se utiliza esse instrumento de avaliação, e indicar instruções para a realização da prova em fases, assim como o tipo de questão, tempo para realização, etc.;
- os erros que os estudantes cometem ao resolver questões de logaritmos.

Esperamos também que esse processo de avaliação, utilizando a prova em fases como instrumento, traga contribuições aos professores e aos estudantes durante o processo de ensino-aprendizagem. Aos professores permitindo um maior domínio do diagnóstico das dificuldades dos estudantes, contribuindo na melhora da sua prática em sala de aula. Aos estudantes, a possibilidade de reelaborar suas respostas com base nas considerações do professor, permitindo uma autocrítica do conhecimento adquirido.

4.4. Análise do primeiro questionário docente

Para analisar o questionário docente, nos pautamos na metodologia de Análise de Conteúdo de Bardin (1970).

4.4.1. Uma breve introdução à Análise de Conteúdo

A Análise de Conteúdo proposta de Bardin (1970) é um conjunto de técnicas de análise visando obter a descrição do conteúdo de mensagens e indicadores que permitam inferência de conhecimentos através de procedimento sistemáticos.

Bardin (1970) elenca as seguintes etapas para a análise:

- Pré-análise: escolha dos documentos – realiza-se uma “leitura flutuante” do texto, elabora hipóteses;
- Exploração do material: faz uma codificação e uma classificação;
- Tratamento dos resultados: realiza uma inferência e a interpreta.

Como exemplo, faremos uma análise de supostas respostas para a seguinte questão seguindo as etapas propostas:

Como você (docente) entende o processo avaliativo?

Resposta 1 (R1): Considero que a avaliação deve ser feita inclusive no dia a dia da aula, subjetivamente, e objetivamente em dia pré-definido, porém devemos incutir nos alunos que esta também deve ser encarada como aprendizado.

Resposta 2 (R2): O processo avaliativo é para testar a capacidade de ensinar do professor.

Resposta 3 (R3): Eu entendo o processo avaliativo como a utilização de provas e trabalhos para compor uma nota.

Resposta 4 (R4): Eu entendo como avaliar a capacidade do estudante resolver exercícios de acordo os meus critérios.

Resposta 5 (R5): A avaliação é um processo voltado aos estudantes e que deve considerar todos os fatores possíveis, tanto em relação aos conteúdos quanto em relação as suas atitudes.

Realizada a leitura do texto, escolhemos que será feita a análise nas cinco respostas. Como hipóteses, temos que esses professores têm visões diferentes sobre processo avaliativo.

Para a etapa que inclui a codificação e a classificação, podemos dividir as respostas em dois grupos:

- Grupo 1 composto pelas respostas que indicam o processo avaliativo voltado a técnicas e critérios: R2, R3 e R4.
- Grupo 2 composto pelas respostas que indicam o processo avaliativo como um auxiliar ao processo de ensino e aprendizagem: R1 e R5.

A última etapa trata da interpretação e da inferência sobre os dados obtidos nas etapas anteriores. Ao analisar as respostas, podemos considerar que se trata de um grupo de professores heterogêneo. O Grupo 1 encontram-se docentes que tratam a avaliação como a aplicação de instrumento de avaliação sem a preocupação da sua utilidade ao processo de ensino e aprendizagem. Já o Grupo 2 trata-se de professores que têm uma maior preocupação com a utilização dos dados obtidos na avaliação para decisões que ele irá tomar com seus estudantes. O Grupo 2 é formado por professores que consideram diferentes instrumentos de avaliação e consideram tanto aqueles formais (como provas, trabalhos), como informais (a observação, por exemplo).

4.4.2. Análise de conteúdo para o primeiro questionário ao docente

Segue abaixo a resposta do professor ao primeiro questionário.

- “Item a: Contínuo, através de observações em sala, perguntas dos alunos e documental, avaliações.
- Item b: A avaliação é um processo que deve ser realizado durante a aplicação de um certo conteúdo e se pode ser utilizado uma avaliação escrita (Prova) que é norte para o professor mensurar o conhecimento adquirido pelo aluno.
- Item c: Diagnóstica: aplicada no início do trabalho; formativa: parte da construção do conhecimento; somativa: onde você mensura o conhecimento adquirido (menções e médias).
- Item d: Depende onde é aplicada, no Estado com alguns alunos somente para dar as menções, para outros mostrar seus “erros”, agora nas ETEC realmente apresentar aos alunos suas dificuldades, limites e indicar caminhos.

- Item e: Em um processo contínuo, através das observações de sala, desenvolvimento de exercício, o que apresenta nas avaliações escritas e lógico no final mensurar uma menção, não baseado nas avaliações e sim no processo como um todo.
- Item f: O principal é a falta de pré-requisitos, como dificuldades na multiplicação e divisão e a lógica em álgebra.
- Item g: Observação, atividades em sala/casa, avaliações individuais e dupla.
- Item h: Sempre que termino de aplicar o exercício e corrigi-los em diversos momentos de um conteúdo.
- Item i: Não.
- Item j: Muito importante, quando o "sistema de ensino – Rede" realmente se preocupasse com a aprendizagem e não somente com números.
- Item k: Na rede pública não, nas ETEC sim, inclusive temos que anotar nas avaliações as competências exigidas do aluno.
- Item l: Não"

Ao analisar as respostas dadas pelo docente para o 1° questionário percebe-se que há dois universos que esse professor atua. No primeiro, há o universo da rede estadual e no segundo universo, aparece a Escola Técnica Estadual de São Paulo (ETEC). Assim, o professor para algumas questões, indica duas ações diferentes: uma para a rede estadual e outra para a ETEC. Como esse estudo de caso está centrado em uma turma do 1° ano do ensino médio de uma escola da rede estadual, serão analisadas apenas respostas e ações que se referirem à rede estadual.

Segundo análise do questionário, o processo de avaliação do professor é contínuo, utiliza diversos instrumentos de avaliação, considera os resultados do processo de ensino e aprendizagem e da vivência cotidiana escolar mais relevantes do que os resultados obtidos estritamente dos instrumentos de avaliação. Demonstra conhecer as abordagens da avaliação, entretanto, não as utiliza no momento de planejar suas aulas. Aponta que não há uma periodicidade para a realização de instrumentos avaliativos, mas indica que os utiliza em vários momentos do processo de ensino.

Em várias respostas, o professor se utiliza do termo “mensurar” como uma consequência da avaliação. Há uma tendência do professor em utilizar a avaliação para “mensurar” o conhecimento do estudante, mas não há a preocupação em utilizar a avaliação como um instrumento que visa a contribuição com a aprendizagem dos estudantes, assim, o processo avaliativo do professor introduz um caráter quantitativo à avaliação.

Em nenhum momento o professor coloca o aluno nesse processo de avaliação. Segundo o professor, a avaliação mensura o conhecimento adquirido pelo aluno, e para uns dá a menção (nota), para outros mostra os erros. Ainda diz que os alunos não sabem porque estão sendo avaliados e nem os critérios utilizados nesse processo.

O professor coloca que um dos fatores na escolha do conteúdo dos instrumentos de avaliação é encontrar conteúdos que os alunos consigam resolver com cuidado os pré-requisitos, uma vez que segundo o professor, os alunos têm dificuldades em assuntos básicos em Matemática.

Em comparação com as instruções dos documentos oficiais, o professor está em acordo com a LDB 9394/96 quando se refere a avaliação como um processo contínuo, com prevalência dos resultados obtidos ao longo do processo do que de eventuais exames finais. Entretanto, ao usar a avaliação para mensurar o conhecimento, entra em desacordo com a instrução que pede para os aspectos qualitativos se sobreporem aos aspectos quantitativos, dessa forma dando mais importância a contagem de “acertos” e “erros”.

O uso de diversos instrumentos de avaliação está em acordo com o Currículo Oficial do Estado de São Paulo, quando este recomenda que utilizem os instrumentos que englobem um espectro amplo e que valorizem a produção dos estudantes. Entretanto, ao não colocar o aluno junto ao processo avaliativo, o professor entra em desacordo com os PCN (BRASIL, 1998) no que se refere ao aspecto da tomada de consciência dos avanços, dificuldades e possibilidades, uma vez que os alunos não sabem o motivo da avaliação, os critérios utilizados e, transmite os resultados apenas com uma menção/nota, sem refletir sobre esse processo.

4.5. Análise da primeira fase de aplicação

A aplicação da primeira fase ocorreu logo após o professor dar início ao conteúdo de logaritmos. Até a aplicação, foi trabalhado em sala de aula a definição dos logaritmos $\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$.

Na primeira fase, o professor aplicou a prova aos alunos e inicialmente, explicou como seria a condução do instrumento de avaliação. Segundo o professor, a primeira reação dos alunos ao se deparar com esse tipo de instrumento foi dizer que "não vou fazer nada, ela vai voltar para mim mais duas vezes", revelando um instinto desse grupo de estudantes em postergar a realização da prova, talvez no intuito de ver como a prova seria nesse momento para, posteriormente, se preparar e responder. Ouvindo comentários como esse, o professor interviu e sugeriu que nesse instante seria importante olhar os exercícios e tentar resolver o que já soubesse.

Com relação as resoluções apresentadas pelos alunos nessa primeira fase, dos seis estudantes que aceitaram participar da pesquisa, cinco alunos tentaram resolver alguns exercícios e um aluno considerou que a prova era de múltipla escolha e apenas marcou com "x" os itens dos exercícios, momento que o professor durante a realização dos comentários na prova informou que a prova não é de múltipla escolha.

Como forma de nomear esses estudantes sem identificá-los, os seis alunos foram nomeados por letras: aluno "A", "B", "C", "D", "E" e "F".

O quadro abaixo indica quantos alunos resolveram (ou tentaram) cada exercício da prova em fases:

Quadro 10 – Exercícios resolvidos pelos alunos na primeira fase

Exercícios	Alunos que resolveram		Exercícios	Alunos que resolveram
1	A, C, D, E		9	B
2	B		10	-
3	A, B, D, E		11	B, E
4	-		12	-
5	B		13	B
6	-		14	-
7	E		15	A
8	-		16	-

Os exercícios que apresentaram mais resoluções foram os exercícios 1 e 3, exercícios esses que compreendem a categoria APLICAR e que pedem para aplicar a definição de logaritmos. No exercício 15 é pedido para resolver equações exponenciais, conteúdo considerado como um pré-requisito para a resolução dos logaritmos, foi resolvido por apenas um aluno.

Selecionamos alguns dos comentários que o professor fez nessa fase:

Situação 1:

Exercício 1, item b.

$$\log_{\frac{1}{2}} 32 = x$$

$$2^5 = \frac{1}{2}x$$

Presta atenção! x é expoente $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Nesse caso, o estudante realizou a fatoração de forma correta, entretanto não utilizou a definição de logaritmos de forma correta, colocando o "x" como um produto de $\frac{1}{2}$, enquanto o correto seria como um expoente: $\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

À luz das ideias da Escala para Avaliação em Matemática de Ponte *et al* (2006), o estudante mostrou compreender razoavelmente o conhecimento matemático necessário para a resolução, porém não obteve êxito na escolha da estratégia para a resolução, não conseguindo indicar uma resposta para o exercício.

Esperava-se que com esse comentário, o aluno tomaria consciência dessa dificuldade e utilizaria a estratégia coerente para o cálculo do logaritmo.

Situação 2:

Exercício 1, item a.

fatora.

$$\log_3 27 = x$$

$$27 = 3^x$$

Ao se deparar com essa resolução, o professor entendeu que o aluno aplicou a definição de logaritmos de forma coerente, entretanto não decorreu com o procedimento necessário para o término da resolução do exercício. O professor comentou como “fatorar”, esperando que no próximo contato que o aluno tenha com a prova, ele faça o procedimento da fatoração e conclua a resolução do exercício.

À luz das ideias da Escala para Avaliação em Matemática de Ponte *et al* (2006), o estudante mostrou compreender o conhecimento matemático necessário para a resolução. Entretanto, não utilizou uma estratégia coerente para a continuidade do exercício, nesse caso, uma possibilidade seria a estratégia de fatorar o número 27.

Situação 3

Exercício 3, item a.

$\log_2 64 = x$o

?

$$64 = 2^x$$
$$2^6 = 2^x$$
$$A = x = 6$$

Com relação a resolução acima, todo o procedimento foi considerado coerente pelo professor. Entretanto, na apresentação da resposta, a aparição da letra “A” causou estranheza. Podemos supor que a aparição dessa letra esteja relacionada ao item do exercício na prova. Entretanto, o professor circulou a letra “A” e colocou um sinal de interrogação ao lado da letra, esperando que o aluno na próxima fase, especifique o motivo dela estar ali. É possível que o aluno não entenda o motivo do ponto de interrogação, nesse caso, podemos ressaltar também que essa é uma oportunidade do professor além de colocar o ponto de interrogação, realizar outro comentário que seja pertinente para a resolução do item, como por exemplo um questionamento: “Por que você colocou que $A = x = 6$? De onde vem o ‘A’? O que é A?”.

À luz das ideias da Escala para Avaliação em Matemática de Ponte *et al* (2006), o estudante mostrou compreender o conhecimento matemático, utilizou estratégias e processos coerentes para a resolução. Entretanto, ao olhar do professor, houve apresentação da resposta de forma ambígua e imprecisa, uma vez que indicou uma outra variável (“A”) na hora da resposta. Desse modo, interpretou que a comunicação matemática foi parcialmente correta.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em primeiro lugar, destacamos que essa pesquisa trouxe reflexões profundas sobre a nossa própria prática avaliativa. Essas reflexões trouxeram um novo olhar para os momentos dedicados à avaliação, como na hora de elaboração dos instrumentos e da correção das produções escritas feitas pelos estudantes. Antes vistas apenas como um momento burocrático, um “dever” de docente, a fase da contagem dos “erros” e “acertos” foram substituídas pelo momento de um acompanhamento e regulação das nossas próprias ações em sala de aula.

Durante essa pesquisa notou-se a pouca quantidade de trabalhos que mostram as relações entre os documentos oficiais e a prática dos professores em sala de aula utilizando as abordagens da avaliação, em especial, os trabalhos que focam em Educação Matemática (MACIEL, 2003; BONFIM, TIAGO, BARONI, 2014).

Tanto os documentos oficiais quanto os pesquisadores analisados dão ênfase à avaliação como um processo contínuo e um tratamento importante aos diferentes instrumentos de avaliação. Dessa forma, há a necessidade de que os docentes conheçam os documentos oficiais e os considerem quando desenvolverem suas atividades avaliativas. Muito tempo é gasto em atividades de avaliação, tanto na elaboração, implementação e correção, portanto deve-se utilizar os dados extraídos de maneira a contribuir com a aprendizagem dos alunos e não apenas para formar uma nota ou um conceito que aparecerá no boletim, sem nenhuma contribuição prática.

Os documentos oficiais vigentes analisados por esse trabalho tratam a avaliação como um momento de reflexão, onde os aspectos qualitativos se sobrepõem sobre os aspectos quantitativos. Há a previsão por parte dos documentos das abordagens diagnóstica, formativa e somativa, sendo uma junção das três em favor da aprendizagem dos estudantes. Portanto, os docentes devem ter foco no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, entendendo que os três caminham juntos na prática escolar, sendo que um complementa o outro e oferecem subsídios para a maior qualidade do ensino, sendo a avaliação, um instrumento indispensável, para permitir constatar, conforme menciona o Parecer CNE/CEB nº 12/97, “em que medida os objetivos colimados foram alcançados”. Assim, enfatizamos que os docentes conheçam e explorem as abordagens da avaliação e os documentos oficiais, trazendo o aluno para a discussão da avaliação, tornando-a um momento democrático em sala de aula.

Portanto, podemos responder ao questionamento que Perrenoud (1999) fez quando pergunta se a avaliação está a favor da seleção (entre bons e ruins) ou das aprendizagens (garantir o sucesso). Assim, com base na análise dos documentos oficiais e das abordagens da avaliação, a avaliação deve estar predominantemente a favor das aprendizagens. Embora o momento dedicado a abordagem somativa seja necessário e está previsto nos documentos oficiais, a avaliação tem papel fundamental no direcionamento das ações no cotidiano escolar, tanto para auxiliar aos docentes como para auxiliar aos estudantes.

Os comentários do professor na aplicação da primeira fase da prova em fases forneceu informações importantes para um diagnóstico do que os alunos sabiam ou não para dar continuidade aos conceitos de logaritmos e possivelmente, redirecionar a atividades do professor em sala de aula.

Esperávamos, que mesmo com os protestos contra a reorganização e a ocupação, seria possível aplicar a segunda fase na prova no período de reposição de aulas, fato que não se concretizou devido ao cronograma e às faltas dos estudantes. Com a aplicação da segunda fase, conseguiríamos analisar se houve ou não um empenho dos estudantes em estudar para essa próxima fase e se os comentários feitos pelo professor iriam influenciar na hora de reelaborar as resoluções que não estavam ainda totalmente corretas.

Com relação à utilização da prova em fases apresentadas em outras pesquisas, concluímos que ela pode contribuir com a aprendizagem dos alunos em Matemática. Em sua pesquisa, Trevisan (2013) aponta que a prova em fases traz um novo repensar nas práticas avaliativas dos professores ao proporcionar informações para intervenção no processo de ensino e aprendizagem. Aos alunos, o instrumento de avaliação contribui ao torná-los cientes de suas dificuldades e, através disso, tornar a avaliação como um momento que possibilite a aprendizagem. Ainda proporciona um processo avaliativo dinâmico por sua possibilidade de realizar as abordagens diagnóstica, formativa e somativa em um só instrumento de avaliação.

O diálogo entre a produção escrita do estudante juntamente com os comentários do professor torna a avaliação um momento de troca de ideias, um “bate papo”. A partir daí, o estudante revela o que já sabe e o que ainda não sabe, dessa forma, o professor tem a oportunidade de retomar nas aulas os conceitos que percebeu que os estudantes não sabem e ainda pode indicá-los através dos comentários feitos na prova.

Entretanto, destacamos que algumas atitudes podem transformar a prova em fases em um processo estático, como por exemplo:

- transformar as aulas exclusivamente preparatórias para a resolução da prova;
- a possibilidade dos estudantes memorizarem os exercícios, resolverem e passarem “cola” para os colegas.

Nessas duas situações acima descritas, o docente tornaria esse instrumento similar aos outros já existentes, podendo não contribuir para o propósito da prova em fases, que é propiciar ao docente um controle do que os alunos sabem e não sabem, oportunizando, através de comentários na prova, uma reflexão do estudante sobre sua produção, indicando o que ele já sabe, o que ele pode se preparar para saber e o que ainda não está de acordo com o que o docente prevê com relação aos conteúdos.

Uma estratégia para não permitir que a prova em fases se limite é acrescentar novas questões a cada fase, desse modo, os estudantes teriam as questões comentadas da fase anterior e as novas questões para responder (TREVISAN; MENDES, 2015). Essas novas questões inclusive podem trazer categorias da Taxonomia de Bloom ainda não utilizadas na primeira versão da prova em fases.

Nessa linha de pensamento, cabe ressaltar a importância do planejamento do docente em relação aos conteúdos que serão ministrados e o conteúdo requerido na prova, sendo esses dois fatores importantes, pois uma vez que o docente não cumpra com o cronograma dos conteúdos, questões da prova se tornarão inúteis para uma reflexão sobre o que os alunos aprenderam.

Em nossa concepção, a prova em fases para ser aplicada no ensino básico deve ter, acima de tudo, uma abordagem formativa, na qual o principal objetivo dela é monitorar as aprendizagens dos alunos, dando subsídios ao professor para atuar de forma efetiva nas dificuldades detectadas.

Van Den Heuvel-Panhuizen (1996) *apud* Trevisan (2013, p. 128), diz que “há um consenso mundial de que os currículos tradicionais deixaram de cumprir as exigências de hoje e que, juntamente com a avaliação, precisam mudar”. Na mesma linha de pensamento, os PCN (1997) alertam que mudanças na concepção de aprendizagem, interpretação e abordagens do ensino de Matemática implicam nas finalidades da avaliação, uma vez que novas metodologias de ensino sejam praticadas por professores, novas concepções e novos instrumentos de avaliação são necessários para essas mudanças. Nesse contexto, a prova em fases é um novo instrumento de avaliação que pode tornar o processo de avaliar um momento de repensar tanto as ações dos professores quanto dos estudantes, trazendo uma reflexão ao papel de cada um no cotidiano escolar.

Como futuro trabalho, a aplicação integral dessa avaliação com as três fases está prevista para ocorrer ainda em 2016. Entretanto, nessa aplicação teremos as funções de professor e de pesquisador, onde de acordo com Esteban (2010) *apud* Alves (2015, p, 3) é uma metodologia de pesquisa “onde o professor é o próprio pesquisador, agindo na sala de aula, questionando e refletindo sobre sua ação”. Nessa nova aplicação serão incluídos exercícios de categorias não contempladas pela Taxonomia de Bloom nessa pesquisa, como da categoria SINTETIZAR e CRIAR.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, A. R. **Diretor da UNED fala no Cecierj sobre sistemas de avaliação em EAD**. Educação Pública [online]. Rio de Janeiro. 2008. Disponível em <http://www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/educacao/0202.html>. Acesso em 15 mai 2014.

ALVES, J. J. F. M.; CABRAL, I. Os demónios da avaliação: memórias de professores enquanto alunos. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 26, n. 63, p. 630-662, set./dez. 2015.

ALVES, M. C. L.; GIRCOREANO, J. P. **A caixa de cores:** o conhecimento dos alunos sobre cores como ponte de partida para o diálogo. In: Concistec, 2015, Bragança Paulista. Anais Concistec'15, 2015.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BONFIM, E. A.; TIAGO, G. M.; BARONI, M. P. M. A. **A avaliação da aprendizagem no Brasil:** Os documentos oficiais e a prática cotidiana nas aulas de Matemática. In: Concistec, 2014, Bragança Paulista. Anais Concistec'14, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 9394/96, **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Diário oficial da República Federativa do Brasil. Brasília, DF, 1996.

_______. Lei n.º 4.024. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação. D.O.U., 20 dez. 1961.

_______. Lei n.º 5.692. Fixa as diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus. D.O.U., 11 ago. 1971.

_______. **Parecer CNE/CEB n.º 12/97**. Esclarece dúvidas sobre a Lei nº 9.394/96, em complemento ao Parecer CEB n.º 05/97.

_______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/ SEF, 1997.

_______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental (Introdução). Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/ SEF, 1998.

________. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais:** Ensino Médio/Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Brasilia: MEC/ SEB, 2000.

CABRERA, R. C. **Docência e desespero**: avaliação da aprendizagem na escola ciclada. Brasília: Liber Livro Editora, 2010.

CURY, C. R. J. **A Educação Básica no Brasil**. Educação & Sociedade. [online]. Campinas. vol. 23, n. 80, p. 168-200, Set. 2002.

DANTE, L. R. **Matemática**: contextos e aplicações. 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.

ESTEBAN, M. P. S. **Pesquisa qualitativa em educação**: fundamentos e tradições. Porto Alegre: Artmed, 2010.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: UNICAMP, 1995.

FERRAZ, A. P. C. M; BELHOT, R. V. Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetos instrucionais. **Gestão & Produção**. São Carlos. v. 17. n. 2. p. 421-431, 2010.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**. Campinas. ano 3, n. 4, p. 1-37, dez. 1995.

FOREST, M. **Ensino e aprendizagem de logaritmos através da resolução de problemas**. 2014. 147f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, PR.

HEINIG, O. L. O. M; STEUCK, H. L**. "Professor aprende a ser professor na sala de aula?": uma análise do percurso dos estudantes de Letras da FURB na relação teoria x prática**. Atos de Pesquisa em Educação. Blumenau. v. 2, n. 2, p. 257-273, maio/ago. 2007.

HOFFMANN, J. **Avaliação Mediadora**: uma Prática em Construção da Pré-Escola à Universidade. 32. ed. Porto Alegre: Mediação, 2012.

IEZZI, G.; DEGENSZAJN, D.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática** – ciências e aplicações. 8 ed. São Paulo: Atual, 2014.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar**: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

LUCKESI C. **Avaliação da Aprendizagem**. 19’06’’. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JqSRs9Hqgtc. (Enviado em 6 fev 2012). Acesso em 12 março 2015.

LUDKE, M; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACIEL, D. M. **A avaliação no processo ensino-aprendizagem de matemática, no ensino médio**: uma abordagem formativa sócio-cognitivista. 2003. 163 f. Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

MARCELINO, L. V; RECENA, M. C. P. Possíveis influências do novo ENEM nos currículos educacionais de Química. **Estudos em Avaliação Educacional**. São Paulo. v. 23. n. 53. p. 148-177, set/ dez. 2012.

MENDES, M. T. **Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275f. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Estadual de Londrina, PR.

MONTEIRO, E. F. C. **Práticas Avaliativas em Matemática na Educação de Jovens e Adultos**: um estudo de caso de uma escola da Rede Municipal de Belo Horizonte. 2010. 202 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, MG.

PATTON, M. Q. Qualitative Evaluation and Research Methods, **Sage Publications**, Inc. Newbury Park: London, 2 ed. 1990.

PERRENOUD, P. **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens** – entre duas lógicas. Tradução: Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PIRES, Magna Natalia Marin. **Oportunidade para aprender**: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases. 2013. 122f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**. Rio Claro. n° 25, p. 105-132. 2006.

PONTE, J. P. *et al.* **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica (Coleção Tendências em Educação Matemática). 2006.

RABELO, E. H. **Avaliação:** novos tempos, novas práticas. 8ª ed. Petrópolis: Vozes, 2009.

RUSSELL, M. K.; AIRASIAN, P. W. **Avaliação em sala de aula**: conceitos e aplicações. 7. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

SADLER, R. **Formative assessment and the design of instructional systems**. Instructional Science. n. 18, p. 119-144, Jun. 1989.

SÁ SILVA, J. R.; ALMEIDA, C. D.; GUINDANI, J. F. **Pesquisa documental**: pistas teóricas e metodológicas. Revista Brasileira de História e Ciências Sociais. Ano 1. n° 1. Jul./2009.

SAMPAIO, J. C. V. **John Napier, Henry Brigss e a invenção dos logaritmos.** Disponível em http://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/logshistoria.PDF. Acesso em 23/11/2015.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do Gestor**/ coordenação geral, Maria Inês Fini; elaboração: Lino de Macedo, Maria Eliza Fini; Zuleika de Felice Murrie. São Paulo: SEE, 2010.

___________. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias / coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. São Paulo: SEE, 2010.

___________. Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno**/ coordenação geral, Maria Inês Fini; elaboração: Lino de Macedo, Maria Eliza Fini; Zuleika de Felice Murrie. São Paulo: SEE, 2015.

___________. Secretaria da Educação. **Reorganização escolar**. Disponível em: http://www.educacao.sp.gov.br/reorganizacao/. Acesso em 14/01/2016.

SOARES, D. O. **Logaritmos:** Napier *versus* Dante. 2012. 69f. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto Federal de São Paulo, São Paulo.

SOUSA, S. Z. L. Avaliação da aprendizagem na legislação nacional: dos anos 1930 aos dias atuais. **Estudos em Avaliação Educacional**. São Paulo. v. 20. n. 44. Set./dez. 2009. Disponível em: <http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/eae/arquivos/1536/1536.pdf>. Acesso em: 06 maio 2014.

TREVISAN, A. L. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. 168f. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Estadual de Londrina, PR.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. A Prova Escrita como Instrumento de Avaliação em Aulas de Matemática. **Educação Matemática em Revista.** São Paulo. v. 45, p. 48-55, 2015.

VALENTE, W. R. Exames e provas como fontes para História da Educação. In: **Os exames de Admissão ao Ginásio: 1931-1969**. Arquivos da Escola Estadual de São Paulo. PUC-SP, 2001, CD-ROM. Volumes 1, 2 e 3.

VALENTE, W. R. Apontamentos para uma história da avaliação escolar em Matemática. In: VALENTE, W. R. (Org.). **Avaliação em matemática**: História e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2008. p. 11-38.

VILLAS BOAS, B. M. F. Avaliação formativa e formação de professores: ainda um desafio. **Linhas Críticas**. Brasília. v. 2, p. 75-90, jan./jun. 2006.

VILLATORRE, A. P.; HIGA, I.; TYCHANOWICZ, S. D.; **Didática e Avaliação em Física**. 1. ed. São Paulo: Saraiva. 2009.

ANEXO A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Esses são os TCLE desenvolvidos para os estudantes e o docente com o intuito de autorizar a utilização dos dados coletados em nossa pesquisa.

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Você está sendo convidado para participar da pesquisa AVALIAÇÃO EM FASES DA APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LOGARITMOS. Você foi selecionado por ser aluno do curso regular do primeiro ano do Ensino Médio da EE Martin Egídio Damy e sua participação não é obrigatória. A qualquer momento você pode desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo em sua relação com o pesquisador ou com a instituição. O objetivo deste estudo é investigar a contribuição do instrumento de avaliação prova em fases no processo de ensino e aprendizagem de logaritmos. Sua participação nesta pesquisa consistirá em assistir as aulas do professor de Matemática e resolver a prova em fases. A pesquisa não oferece nenhum tipo de risco. Os benefícios relacionados com a sua participação são, entre outros, a possibilidade de ampliar seus conhecimentos sobre a Matemática e aos logaritmos além da contribuição na pesquisa na área de ensino de Matemática, na busca de novos instrumentos de avaliação que contribuem para o processo de ensino e aprendizagem. As informações obtidas através dessa pesquisa serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre sua participação. Os dados não serão divulgados de forma a possibilitar sua identificação. Em nenhuma hipótese seu nome será mencionado. Você receberá uma via deste termo onde consta o telefone e o endereço institucional do pesquisador principal e do CEP, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

Profª Dra. MARIANA PELISSARI MONTEIRO AGUIAR BARONI
Orientadora
E-mail: mariana.baroni@gmail.com
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 2763-7567 (tel. da coordenação do curso)

ELIAS ANGELO BONFIM
Estudante de Pós-Graduação / Aluno de Mestrado
E-mail: eliasangelobonfim@hotmail.com
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 3775-4569
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

Sujeito da Pesquisa	Assinatura do pai/mãe ou responsável
RA:	RG:

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Você está sendo convidado para participar da pesquisa AVALIAÇÃO EM FASES DA APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LOGARITMOS. Você foi selecionado por ser professor de Matemática do curso regular do primeiro ano do Ensino Médio da EE Martin Egídio Damy, sua participação não é obrigatória e não há nenhum vínculo de hierarquia com o pesquisador. A qualquer momento você pode desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo em sua relação com o pesquisador ou com a instituição. O objetivo deste estudo é investigar a contribuição do instrumento de avaliação prova em fases no processo de ensino e aprendizagem de logaritmos. Sua participação nesta pesquisa consistirá em durante suas aulas, aplicar o instrumento de avaliação "prova em fases", e responder dois questionários referentes à prova. A pesquisa não oferece nenhum tipo de risco. Os benefícios relacionados com a sua participação são, entre outros, a possibilidade de ampliar seus conhecimentos sobre a Matemática e aos logaritmos além da contribuição na pesquisa na área de ensino de Matemática, na busca de novos instrumentos de avaliação que contribuem para o processo de ensino e aprendizagem. As informações obtidas através dessa pesquisa serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre sua participação. Os dados não serão divulgados de forma a possibilitar sua identificação. Em nenhuma hipótese seu nome será mencionado**.** Você receberá uma via deste termo onde consta o telefone e o endereço institucional do pesquisador principal e do CEP, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

Profª Dra. MARIANA PELISSARI MONTEIRO AGUIAR BARONI
Orientadora
E-mail: mariana.baroni@gmail.com
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 2763-7567 (tel. da coordenação do curso)

ELIAS ANGELO BONFIM
Estudante de Pós-Graduação / Aluno de Mestrado
E-mail: eliasangelobonfim@hotmail.com
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 3775-4569
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

____

Sujeito da Pesquisa

RG:

APÊNDICE A - PRODUTO FINAL

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Campus São Paulo

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PÁTRIA EDUCADORA

PROVA EM FASES PARA O ENSINO DE CONCEITOS DE LOGARITMOS

Elias Angelo Bonfim

Produto final vinculado a dissertação de mestrado intitulada "Avaliação da aprendizagem em fases: uma proposta para o ensino de logaritmos" apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, orientada pela Profa. Dra. Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni.

IFSP
São Paulo
2016

SOBRE A PROVA EM FASES

A prova em fases é um instrumento de avaliação que pode ser utilizado em vários momentos do processo de ensino e aprendizagem. Nesse modelo o estudante tem contato com a prova em várias fases, podendo fazer exercícios em uma fase e na outra, refazê-los considerando o que aprendeu entre uma fase e outra. Durante as fases, o professor não corrige a prova de uma maneira “certo ou errado”; quando há erros nas resoluções dos exercícios, o professor intervém com considerações e reflexões para que o estudante tome consciência para entender o que falta para a resolução estar correta.

SOBRE A PROVA EM FASES DE LOGARITMOS

A prova foi elaborada com exercícios de diferentes níveis de complexidade, distribuídos de forma aleatória, sobre o conteúdo de logaritmos. A ordem dos exercícios não é exatamente a ordem em que as aulas ocorrem/ocorrerão. Assim, os estudantes têm liberdade de ler todas as questões da prova e respondê-las na ordem em que achar conveniente.

Consideramos que as questões contidas nessa prova tem as seguintes características:

- questões com diferentes tipos de dificuldades, considerando as habilidades do domínio cognitivo da Taxonomia de Bloom;
- questões abertas que requerem investigação e reflexão; e
- questões escolhidas pelo professor responsável pela avaliação interna.

A proposta de avaliação utilizando a prova em fases como instrumento de avaliação é desenvolvê-la em três fases:

- 1ª fase: nessa fase, é explicado aos estudantes como será a execução dessa prova e ainda terão o primeiro contato com a prova. Eles já podem resolver os exercícios, mas espera-se que os estudantes resolvam os exercícios que contemplem os conteúdos que são pré-requisitos para o entendimento de logaritmos, uma vez que esses exercícios estão na prova com o objetivo de realizar uma abordagem diagnóstica;

- 2ª fase: essa fase ocorre no decorrer do processo de ensino e aprendizagem. Nessa fase, os estudantes têm novamente acesso à prova. Ela virá com comentários e considerações nas questões resolvidas na primeira fase. Nessa fase, os estudantes podem resolver tanto exercícios que se sentirem confortáveis em resolver quanto refazer os exercícios da primeira fase. Essa fase tem uma abordagem diagnóstica e formativa, pois está no decorrer do processo de ensino e aprendizagem e o professor, de acordo com as respostas dos estudantes, pode replanejar suas aulas. Como vantagem para o estudante, questões que criaram dúvidas durante a resolução da 1ª. fase podem servir de ponto de partida para a investigação e estudo para a resolução da 2ª. fase;
- 3ª fase: nessa última fase, os estudantes recebem novamente a prova, com comentários relativos as questões já respondidas nas outras duas fases anteriores. Nessa fase ainda há uma abordagem formativa na avaliação pois novamente os estudantes têm acesso a prova com comentários e ainda podem refazer os exercícios resolvidos na primeira ou segunda fases e fazer os que ainda não foram resolvidos. Entretanto, após o término dessa fase, há uma abordagem somativa, pois o professor fará uma correção, agora sim utilizando termos como certo ou errado (ou atingiu ou não o objetivo da questão).

Os comentários do professor em cada fase devem ser feitos utilizando cores de tinta diferentes:

- Respostas dos estudantes: lápis ou azul;
- Comentários da fase 1: vermelha;
- Comentários da fase 2: verde;
- Correção após a fase 3: preta.

A prova apresenta o objetivo educacional de cada questão, baseado na Taxonomia de Bloom[3], uma possível solução e uma sugestão de análise da resposta utilizando a Escala de Avaliação em Matemática[4].

---

[3] FERRAZ, A. P. C. M; BELHOT, R. V. Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetos instrucionais. **Gestão & Produção**. São Carlos. v. 17. n. 2. p. 421-431, 2010.

[4] DANTE, L. R. **Matemática**: contextos e aplicações. 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.

Com relação aos comentários produzidos pelo professor entre as fases, elaboramos o seguinte quadro, como exemplo, onde são destacados elementos que consideramos importantes nesse momento da avaliação.

Enunciado: *Usando a definição de logaritmos, calcule* $\log_3 27$.

1ª fase	2ª fase	3ª fase
Possível apresentação de solução pelo estudante: $\log_3 27$ Fatorar 27: 27 | 2 13 | 2 6 | 2 3 | 3 1 $2^3 * 3$ $3^x = 2^3 * 3$ Observações: reconheceu que se trata de conceitos de logaritmos, utilizou uma estratégia coerente, entretanto, não a utiliza de forma correta nem apresenta uma resposta. Logo, ele apresenta o pensamento matemático e começa a delinear estratégias para resolução. Ainda não apresenta a comunicação matemática a contento. Sugestão: o professor deve interferir no ponto onde a resolução não está correta e indicar o que pode ser feito para	Possível apresentação de solução pelo estudante: $\log_3 27$ Fatorar 27: 27 | 3 9 | 3 3 | 3 1 3^3 $3^x = 3^3$ R: $x = 3$ Observações: como sequência da primeira fase, dessa vez o estudante realizou a decomposição em fatores primos e utilizou estratégias coerentes em busca da resolução. Entretanto, ele indica o valor numérico de x^x como resolução do exercício, fato esse que não foi solicitado no enunciado. Logo, o estudante apresenta o pensamento matemático, traçou uma estratégia de resolução coerente e apresenta uma dificuldade em sua comunicação matemática. Sugestão: como nessa segunda fase o aluno já	Possível apresentação de solução pelo estudante: $\log_3 27 = x$ Fatorar 27: 27 | 3 9 | 3 3 | 3 1 3^3 $3^x = 3^3$ $x = 3$ Portanto, se: $\log_3 27 = x \rightarrow \mathbf{\log_3 27 = 3}$ Observações: na terceira fase, em sequência à segunda fase, o estudante se comunica matematicamente de forma coerente e atinge o objetivo educacional esperado: Aplicar a definição de logaritmos. Logo, o estudante apresentou a contento os três itens da escala de avaliação em Matemática. Sugestão: nesta etapa o professor pode elogiar o desempenho do aluno, como por exemplo: “Muito bem”, “Parabéns”, ou algum sinal de correto.

resolver o exercício. Como por exemplo: “Reflita sobre a fatoração efetuada. O fator 2 é a melhor escolha para esse caso?”	mostrou uma evolução em relação à resolução apresentada na primeira fase, o professor sugere colocar o resultado de uma forma comumente encontrada, como por exemplo: “Reflita: o exercício pode o valor de x?”	

Os itens/questões que compõem essa prova em fases foram extraídos do livro: DANTE, L. R. **Matemática**: contextos e aplicações. 2 ed. São Paulo: Ática, 2013; e do SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno**/ coordenação geral, Maria Inês Fini; elaboração: Lino de Macedo, Maria Eliza Fini; Zuleika de Felice Murrie. São Paulo: SEE, 2015.

Vale salientar que esses itens/questões são sugestões ao professor, e podem ser trabalhados ou modificados de acordo com a necessidade do professor e dos alunos.

Prova de Matemática

Instruções:

Esta prova contém 16 exercícios que contemplam o conteúdo estudado durante esse bimestre. A prova será resolvida em três fases. Você é quem decide por qual questão irá começar a resolver. A cada fase a prova será recolhida pelo professor e será devolvida a você na próxima fase, então você pode refazer os exercícios quantas vezes forem necessários nessas três fases. Não será permitido anotações em relação às questões dessa prova.

A prova é individual, sem consulta e sem uso de calculadora.

Use somente caneta de tinta azul ou lápis. As resoluções devem estar acompanhadas de seus devidos cálculos e respostas.

Boa prova!

17. (OE: APLICAR a definição de logaritmos para logaritmos de diferentes valores de base e de logaritmandos)

Usando a definição de logaritmos, calcule:

e) $\log_3 27$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

$$\log_3 27 = 3$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição : $\log_{\,b} a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $3^x = 27$ $3^x = 3^3$ $x = 3$	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $\log_3 27 = 3$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$$

$$2^{-x} = 2^5$$

$$-x = 5$$

$$x = -5$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$ $2^{-x} = 2^5$ $-x = 5$ $x = -5$ A estratégia citada acima mostra que o aluno domina conceitos anteriores aos de logaritmos, como por exemplo $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$

g) $\log_2 0{,}5$

$$2^x = 0{,}5$$

$$2^x = \frac{1}{2}$$

$$2^x = 2^{-1}$$

$$x = -1$$

$$\log_2 0{,}5 = -1$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $2^x = 0{,}5$ $2^x = \frac{1}{2}$ $2^x = 2^{-1}$ $x = -1$ A estratégia citada acima mostra que o aluno domina conceitos anteriores aos de logaritmos, como por exemplo $0{,}5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$. Mesmo sendo uma simples conversão entre números decimais e fracionários, é um elemento importante para resolução do item.	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $\log_2 0{,}5 = -1$

h) $\log_2 \sqrt{8}$

$$2^x = \sqrt{8}$$

$$2^x = (2^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$2^x = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $2^x = \sqrt{8}$ $2^x = (2^3)^{\frac{1}{2}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}}$ $x = \frac{3}{2}$ A estratégia citada acima mostra que o aluno domina conceitos anteriores aos de logaritmos, como por exemplo $\sqrt{8} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$.	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$ ou $\log_2 \sqrt{8} = 1{,}5$ Assim, há vários modos de apresentar a resposta de forma coerente.

18. (OE: CALCULAR o valor de uma variável na base a partir dos valores do logaritmo e logaritmando)
Determine o valor da base a nas igualdades a seguir:
d) $\log_a 8 = 3$

$$a^3 = 8$$

$$a^3 = 2^3$$

$$a = 2$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $a^3 = 8$ $a^3 = 2^3$ ou	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $a = 2$

	$a^3 = 8$ $a = \sqrt[3]{8}$	

e) $\log_a 1 = 0$

$$a^0 = 1$$

$$\forall\, a \in R_+^* - \{1\}$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução: $a^0 = 1$ Esse item remete às condições de existência de logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$".	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua: $\forall\, a \in R_+^* - \{1\}$ ou $a > 0 \text{ e } a \neq 1$

f) $\log_a \frac{1}{16} = 2$

$$a^2 = \frac{1}{16}$$

$$a^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada e os processos envolvidos para se encontrar a solução:	Utilizar a notação apropriada e apresentar a resposta completa e não ambígua:

	$$a^2 = \frac{1}{16}$$ $$a^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$ ou $$a^2 = \frac{1}{16}$$ $$a = \sqrt{\frac{1}{16}}$$ Como pelas condições de existência dos logaritmos, a base dos logaritmos tem que ser maior que zero e diferente de um, então: $$a = \frac{1}{4}$$	$$a = \frac{1}{4}$$

19. (OE: DETERMINAR o valor de uma variável em diferentes posições da notação de logaritmo – logaritmando e base do logaritmo)
Determine o valor numérico de x das igualdades:
e) $\log_2 64 = x$

$$2^x = 64$$

$$2^x = 2^6$$

$$x = 6$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$	Indicar a estratégia apropriada: $$2^x = 64$$ $$2^x = 2^6$$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $$x = 6$$

b) $\log_x 125 = 3$

$$x^3 = 125$$

$$x^3 = 5^3$$

$$x = 5$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$	Indicar a estratégia apropriada: $$x^3 = 125$$ $$x^3 = 5^3$$ ou $$x^3 = 125$$ $$x = \sqrt[3]{125}$$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $$x = 5$$

c) $2 = \log_x 625$

$$x^2 = 625$$

$$x = \sqrt{625}$$

$$x = 25$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$	Indicar a estratégia apropriada: $$x^2 = 625$$ $$x^2 = 25^2$$ ou $$x^2 = 625$$ $$x = \sqrt{625}$$ Como pelas condições de existência dos logaritmos, a base dos logaritmos tem que ser maior que zero e diferente de um, então: $$x = 25$$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $$x = 25$$

d) $\log x = 0$

$$10^0 = x$$

$$x = 1$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada: $10^0 = x$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $x = 1$

20. (OE: ANALISAR o valor de uma variável encontrada para inequações de primeira e segunda ordem que encontram-se na posição de logaritmando, para que o logaritmo exista, ou seja, não seja uma indefinição)
Ache os valores reais de x para os quais é possível determinar:
c) $\log_{10}(x-3)$

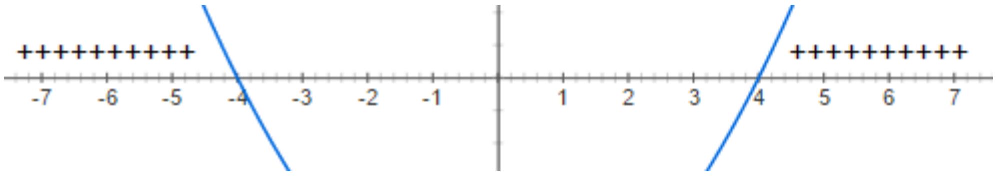
$$x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$$

$$\{x \in R \mid x > 3\}$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \ e \ a \neq 1 \end{cases}$"	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $\{x \in R \mid x > 3\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

d) $\log_4(x^2 - 16)$

$$x^2 - 16 > 0 \rightarrow x^2 > 16$$
$$x > \sqrt{16} \rightarrow x > \pm 4$$



Os valores onde $x^2 - 16 > 0$ são: $x_1 < -4 \; e \; x_2 > 4$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: “$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \; e \; a \neq 1 \end{cases}$”	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: $x^2 - 16 > 0 \rightarrow x^2 > 16$ $x > \sqrt{16}$ $x < -4 \; e \; x > 4$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $x_1 < -4 \; e \; x_2 > 4$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

21. (OE: ANALISAR o valor de uma variável encontrada para inequações de primeira ordem, na posição de base, para que o logaritmo exista, ou seja, não seja uma indefinição)
    Determine os valores de x para que exista:
    c) $\log_{x-5} 10$

$$Condição\ 1: x - 5 > 0 \rightarrow x > 5$$

$$Condição\ 2: x - 5 \neq 1 \rightarrow x \neq 6$$

$$\{x \in R | x > 5 \; e \; x \neq 6\}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos:	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou

"$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \; e \; a \neq 1 \end{cases}$"	e indicar a estratégia apropriada para resolução: $Condição\ 1: x - 5 > 0 \rightarrow$ $x > 5$ $Condição\ 2: x - 5 \neq 1 \rightarrow$ $x \neq 6$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	representações como suporte para seus argumentos: $\{x \in R \mid x > 5 \; e \; x \neq 6\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

d) $\log_{2x-1} \sqrt{3}$

$$Condição\ 1: 2x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$Condição\ 2: 2x - 1 \neq 1 \rightarrow x \neq 1$$

$$\{x \in R \mid x > \frac{1}{2} \; e \; x \neq 1\}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \; e \; a \neq 1 \end{cases}$"	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: $Condição\ 1: 2x - 1 > 0 \rightarrow$ $x > \frac{1}{2}$ $Condição\ 2: 2x - 1 \neq 1 \rightarrow$ $x \neq 1$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $\{x \in R \mid x > \frac{1}{2} \; e \; x \neq 1\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

	cálculos de inequação.	

22. (OE: ANALISAR o valor de uma variável encontrada a partir de um sistema de inequações de primeira ordem formado a partir das condições de existência do logaritmo para a base e para o logaritmando)
Determine o conjunto dos valores reais de x para que seja possível definir:

c) $\log_x(x-3)$

$$Condição\ 1: x > 0$$

$$Condição\ 2:\ x \neq 1$$

$$Condição\ 3: x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$$

$$\{x \in R | x > 3\}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: "$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0\ e\ a\ \neq 1 \end{cases}$"	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: $Condição\ 1: x > 0$ $Condição\ 2:\ x \neq 1$ $Condição\ 3: x - 3 > 0 \rightarrow$ $x > 3$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $\{x \in R \| x > 3\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

d) $\log_{x-1}(x+4)$

$$Condição\ 1: x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$Condição\ 2: x - 1 \neq 1 \rightarrow x \neq 2$$

$$Condição\ 3: x + 4 > 0 \rightarrow x > -4$$

$$\{x \in R | x > 1\ e\ x \neq 2\}$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: “$\log_a N$ existe quando e somente quando $\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \; e \; a \neq 1 \end{cases}$”	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: $Condição\ 1: x - 1 > 0 \rightarrow$ $x > 1$ $Condição\ 2: x - 1 \neq 1 \rightarrow$ $x \neq 2$ $Condição\ 3: x + 4 > 0 \rightarrow$ $x > -4$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $\{x \in R \mid x > 1 \; e \; x \neq 2\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

23. (OE: CLASSIFICAR em verdadeiro ou falso o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos e suas propriedades)
Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique:

f) $\log_5 1 = 1$

$$\log_5 1 = 1$$
$$5^1 = 1$$
$$5 = 1 \; (falso)$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Utilizar a definição dos logaritmos e executar de forma correta os algoritmos: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Utilizar os dados do exercício de forma coerente: $\log_5 1 = 1$ $5^1 = 1$ $5 = 1$	Indicar a justificativa para a reposta (por cálculos, por exemplo) e classificar em verdadeiro ou falso: $5 = 1$ $falso$

		Assim, no item é necessário que o aluno comunique a sua resposta utilizando a definição dos logaritmos e ainda classificar se a afirmação que o item traz é verdadeira ou falsa.

g) $\log_1 5 = 5$

$$1^5 = 5$$

$$1 = 5\ (falso)$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Utilizar a definição dos logaritmos e executar de forma correta os algoritmos: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Utilizar os dados do exercício de forma coerente: $1^5 = 5$ $1 = 5$	Indicar a justificativa para a reposta (por cálculos, por exemplo) e classificar em verdadeiro ou falso: $1 = 5$ $falso$ Assim, no item é necessário que o aluno comunique a sua resposta utilizando a definição dos logaritmos e ainda classificar se a afirmação que o item traz é verdadeira ou falsa.

h) $\log_5 1 = 0$

$$5^0 = 1$$

$$1 = 1\ (verdadeiro)$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Utilizar a definição dos logaritmos e executar de forma correta os	Utilizar os dados do exercício de forma coerente:	Indicar a justificativa para a reposta (por cálculos, por exemplo) e classificar

algoritmos: $$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$	$$5^0 = 1$$ $$1 = 1$$	em verdadeiro ou falso: $$1 = 1$$ $$verdadeiro$$ Assim, no item é necessário que o aluno comunique a sua resposta utilizando a definição dos logaritmos e ainda classificar se a afirmação que o item traz é verdadeira ou falsa.

i) $\log_7 3^7 = 3$

$$7^3 = 3^7$$

$$343 = 2187\ (falso)$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Utilizar a definição dos logaritmos e executar de forma correta os algoritmos: $$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$	Utilizar os dados do exercício de forma coerente: $$7^3 = 3^7$$ $$343 = 2187$$	Indicar a justificativa para a reposta (por cálculos, por exemplo) e classificar em verdadeiro ou falso: $$343 = 2187$$ $$falso$$ Assim, no item é necessário que o aluno comunique a sua resposta utilizando a definição dos logaritmos e ainda classificar se a afirmação que o item traz é verdadeira ou falsa.

j) $2^{\log_2 5} = 5$

De acordo com a propriedade dos logaritmos $a^{\log_a b} = b$, então $5 = 5\ (verdadeiro)$.

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Utilizar a definição dos	Utilizar os dados do	Indicar a justificativa para

logaritmos e executar de forma correta os algoritmos: $$a^{\log_a b} = b$$	exercício de forma coerente: $$a^{\log_a b} = b \to 5 = 5$$	a reposta (por cálculos, por exemplo) e classificar em verdadeiro ou falso: $$5 = 5$$ $$verdadeiro$$ Assim, no item é necessário que o aluno comunique a sua resposta utilizando uma propriedade dos logaritmos e ainda classificar se a afirmação que o item traz é verdadeira ou falsa.

24. (OE: CALCULAR o valor de uma expressão numérica utilizando a definição de logaritmos e propriedades de potenciação)
Calcule o valor das expressões: (os itens que compõem esse exercícios utilizam a seguinte propriedade dos logaritmos: $a^{\log_a b} = b$)

d) $10^{\log_{10} 3} = 3$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer as definições e propriedades dos logaritmos para o exercício: $$a^{\log_a b} = b$$	Indicar a estratégia apropriada e mostrar o processo de resolução, nesse caso é apenas uma aplicação da propriedade: $$10^{\log_{10} 3} = 3$$	Indicar a resposta de forma mais simples possível: $$10^{\log_{10} 3} = 3$$

e) $3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2} = 3^{\log_3 2 \cdot \log_2 7} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_2 7} = 2^{\log_2 7} = 7$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer as definições e propriedades dos logaritmos para o exercício: $$a^{\log_a b} = b$$	Indicar a estratégia apropriada e mostrar o processo de resolução: $$3^{\log_3 2 \cdot \log_2 7} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_2 7} =$$ $$= 2^{\log_2 7}$$ O item requer do estudante realizar alguns traquejos que	Indicar a resposta de forma mais simples possível: $$3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2} = 7$$

	tornam possível a aplicação da propriedade dos logaritmos, como por exemplo, a propriedade associativa da multiplicação $(x \cdot y = y \cdot x)$ e uma propriedade da potenciação $(a^{x \cdot y} = (a^x)^y)$.	

f) $2^{1+\log_2 3} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3 = 6$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer as definições e propriedades dos logaritmos para o exercício: $$a^{\log_a b} = b$$	Indicar a estratégia apropriada e mostrar o processo de resolução: $$2^1 \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3$$ Esse item ainda requer dos estudantes que se recordem e apliquem a seguinte propriedade das potências: $$a^{x+y} = a^x \cdot a\hat{\ }y$$	Indicar a resposta de forma mais simples possível: $$2^{1+\log_2 3} = 6$$

25. (OE: CALCULAR o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos e propriedades operatórias a partir de valores de algébricos de logaritmos)
Dados $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, determine em função de a e b:

c) $\log 6$

$$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $$\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $$\log 6 = \log(2 \cdot 3) =$$ $$= \log 2 + \log 3$$ Assim, um ponto	Determinar o valor do logaritmo em função das variáveis indicadas, utilizando terminologia e notação apropriadas: $$\log 6 = a + b$$

	importante para destaque nesse item é a possibilidade de utilizar a fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado.	

d) $\log 24$

$$\log 24 = \log(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 3 = a + a + a + b = 3a + b$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 24 = \log(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) =$ $= \log 2 + \log 2 + \log 2 +$ $+ \log 3 = a + a + a + b$ Assim, um ponto importante para destaque nesse item é a possibilidade de utilizar a fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado. O estudante também pode relacionar esse item com o resultado do item anterior uma vez que $\log(24) = \log(4 \cdot 6) =$ $\log 4 + \log 6$, e o resultado algébrico de $\log 6$ já é conhecido.	Determinar o valor do logaritmo em função das variáveis indicadas, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 24 = 3a + b$

26. (OE: CALCULAR o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos e propriedades operatórias a partir de valores de algébricos de logaritmos)
Dados $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, determine em função de x e y:

c) $\log 5$

$$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - x$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) =$ $= \log 10 - \log 2$ Nesse item é necessário utilizar a estratégia de que $5 = \frac{10}{2}$, e a partir disso, desenvolver a propriedade operatória dos logaritmos. Além de lembrar que $\log 10 = 1$.	Determinar o valor do logaritmo em função das variáveis indicadas, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 5 = 1 - x$

d) $\log 0{,}06$

$$\log 0{,}06 = \log\left(\frac{2 \cdot 3}{100}\right) = \log 2 + \log 3 - \log 100 = x + y - 2$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$ $\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 0{,}06 = \log\left(\frac{2 \cdot 3}{100}\right) =$ $= \log 2 + \log 3 - \log 100$ O estudante deve utilizar os conceitos de números decimais para converter o 0,06 em um número que seja possível operar	Determinar o valor do logaritmo em função das variáveis indicadas, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 0{,}06 = x + y - 2$

	utilizando as propriedades operatórias dos logaritmos com os valores algébricos dados. O estudante também precisa recordar que $\log 100 = 2$.	

27. (OE: CALCULAR o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos e propriedade de mudança de base)
Escreva usando logaritmos de base 10.

c) $\log_2 5$

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{\log 5}{\log 2}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as definições e propriedades relacionados com o exercício: $\log_b m = \dfrac{\log_k m}{\log_k b}$	Utilizar as definições e propriedades de forma coerente: $\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$	Apresentar a resposta na forma que se pede usando terminologia e notações apropriadas. Inclusive, demonstra conhecer que nessa situação pode ocultar a base 10 do logaritmo. $\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$ ou $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2}$

d) $\log_x 2$

$$\log_x 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} x} = \frac{\log 2}{\log x}$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as definições e propriedades relacionados com o exercício	Utilizar as definições e propriedades de forma coerente	Apresentar a resposta na forma que se pede usando terminologia e notações apropriadas. Inclusive, demonstra

$\log_b m = \dfrac{\log_k m}{\log_k b}$	$\log_x 2 = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} x}$	conhecer que nessa situação pode ocultar a base 10 do logaritmo. $\log_x 2 = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} x}$ ou $\log_x 2 = \dfrac{\log 2}{\log x}$

28. (OE: DETERMINAR através da definição de logaritmos, entre quais inteiros consecutivos os logaritmos, tanto de base dez como de outra base, se localizam)
Determine entre quais inteiros consecutivos fica cada logaritmo:

d) $\log 279$

$$\log 100 < \log 279 < \log 1000$$

$$2 < \log 297 < 3$$

$\log 279$ está entre 2 e 3.

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Identificar as definições relacionadas ao exercício. $a < b < c$ $\log a < \log b < \log c$	Utilizar elementos coerentes para a resolução, usar informação exterior ao enunciado relevante e indicar estratégia apropriada: $\log 100 < \log 279 < \log 1000$ $2 < \log 297 < 3$ Nesse caso, o estudante deve recordar quais logaritmos têm resultados inteiros próximos ao do logaritmo solicitado no item.	Apresentar a resposta de forma completa e não ambígua: $\log 279$ está entre 2 e 3

e) $\log 0{,}071$

$$\log 0{,}01 < \log 0{,}071 < \log 0{,}1$$

$$\log \frac{1}{100} < \log 0{,}071 < \log \frac{1}{10}$$

$$-2 < \log 0{,}071 < -1$$

$\log 0{,}071$ está entre -2 e -1.

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Identificar as definições relacionadas ao exercício. $a < b < c$ $\log a < \log b < \log c$	Utilizar elementos coerentes para a resolução, usar informação exterior ao enunciado relevante e indicar estratégia apropriada: $\log 0{,}01 < \log 0{,}071 < \log 0{,}1$ $\log \frac{1}{100} < \log 0{,}071 < \log \frac{1}{10}$ $-2 < \log 0{,}071 < -1$ Nesse caso, o estudante deve recordar quais logaritmos têm resultados inteiros próximos ao do logaritmo solicitado no item.	Apresentar a resposta de forma completa e não ambígua: $\log 0{,}071$ está entre -2 e -1

f) $\log_7 2$

$$\log_7 1 < \log_7 2 < \log_7 7$$

$$0 < \log_7 2 < 1$$

$\log_7 2$ está entre 0 e 1.

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Identificar as definições relacionadas ao exercício. $a < b < c$ $\log a < \log b < \log c$	Utilizar elementos coerentes para a resolução, usar informação exterior ao enunciado relevante e indicar estratégia apropriada: $\log_7 1 < \log_7 2 < \log_7 7$ $0 < \log_7 2 < 1$ Nesse caso, o estudante deve recordar quais logaritmos têm resultados inteiros próximos ao do logaritmo solicitado no item.	Apresentar a resposta de forma completa e não ambígua: $\log_7 2$ está entre 0 e 1 ou $0 < \log_7 2 < 1$

29. (OE: UTILIZAR propriedades de potenciação para calcular o valor de logaritmos com base e logaritmando de base 10)
Calcule:

d) $\log 100$

$$10^x = 100$$
$$10^x = 10^2$$
$$x = 2$$
$$\log 100 = 2$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada: $10^x = 100$ $10^x = 10^2$ $x = 2$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $\log 100 = 2$

f) $\log 0{,}001$

$$10^x = 0{,}001$$
$$10^x = \frac{1}{1000}$$
$$10^x = 10^{-3}$$
$$x = -3$$
$$\log 0{,}001 = -3$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada: $10^x = 0{,}001$ $10^x = \frac{1}{1000}$ $10^x = 10^{-3}$ $x = -3$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $\log 0{,}001 = -3$

e) $\log 10\ 000\ 000$

$$10^x = 10\ 000\ 000$$
$$10^x = 10^7$$
$$x = 7$$
$$\log 10\ 000\ 000 = 7$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer que se trata de um exercício sobre logaritmos e utilizar a definição de forma correta: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	Indicar a estratégia apropriada: $10^x = 10\ 000\ 000$ $10^x = 10^7$ $x = 7$	Utilizar notação apropriada e apresentar resposta completa e não ambígua: $\log 10\ 000\ 000 = 7$

30. (OE: CALCULAR o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos, propriedades operatórias e valores aproximados de logaritmos dados)
Dados $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 7 = 0{,}85$, determine:

d) $\log 14$

$$\log 14 = \log(2 \cdot 7) = \log 2 + \log 7 = 0{,}30 + 0{,}85 = 1{,}15$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer qual das propriedades dos logaritmos deve utilizar e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 14 = \log(2 \cdot 7) =$ $= \log 2 + \log 7 =$ $= 0{,}30 + 0{,}85$ Nesse item, é possível a utilização da fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado.	Determinar o valor numérico aproximado do logaritmo, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 14 = 1{,}15$

e) $\log 50$

$$\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 10 = \log 10 - \log 2 + \log 10$$
$$= 1 - 0{,}30 + 1 = 1{,}70$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$ $\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) =$ $= \log 5 + \log 10 =$ $= \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 10 =$ $= \log 10 - \log 2 + \log 10 =$ $= 1 - 0{,}30 + 1$ Nesse item, é possível a utilização da fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado. O estudante ainda precisa lembrar que $\log 10 = 1$, sendo uma informação alheia ao enunciado do exercício.	Determinar o valor numérico aproximado do logaritmo, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 50 = 1{,}70$

f) $\log 70$

$$\log 70 = \log(7 \cdot 10) = \log 7 + \log 10 = 0{,}85 + 1 = 1{,}85$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Reconhecer quais são as propriedades dos logaritmos e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 70 = \log(7 \cdot 10) =$ $= \log 7 + \log 10 =$ $= 0{,}85 + 1$	Determinar o valor numérico aproximado do logaritmo, utilizando terminologia e notação apropriadas:

	Nesse item, é possível a utilização da fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado. O estudante ainda precisa lembrar que $\log 10 = 1$, sendo uma informação alheia ao enunciado do exercício.	$\log 70 = 1{,}85$

31. (OE: CALCULAR o valor de uma variável utilizando propriedades de equações exponenciais)

Resolva as seguintes equações:

e) $2^x = 4$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Identificar quais itens serão resolvidos com conceitos de logaritmos ou com conceitos de equações exponenciais.	Utilizar estratégias coerentes para cada item: $2^x = 2^2$ A estratégia mais comum para esse item é a fatoração.	Indicar a resposta de forma completa e não ambígua: $x = 2$

f) $10^x = 1\,000$

$$10^x = 10^3$$

$$x = 3$$

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Identificar quais itens serão resolvidos com conceitos de logaritmos ou com conceitos de equações exponenciais.	Utilizar estratégias coerentes para cada item: $10^x = 10^3$ A estratégia mais comum para esse item é a	Indicar a resposta de forma completa e não ambígua: $x = 3$

	fatoração.	

g) $2^x = 5$

$$2^x = 5$$

$$x = \log_2 5$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Identificar quais itens serão resolvidos com conceitos de logaritmos ou com conceitos de equações exponenciais:	Utilizar estratégias coerentes para cada item: $2^x = 5$ Nesse item, conceitos de exponenciais não são suficientes para calcular o valor numérico de x, então, conceitos de logaritmos serão utilizados.	Indicar a resposta de forma completa e não ambígua: $x = \log_2 5$

h) $10^x = 990$

$$10^x = 990$$
$$x = \log_{10} 990$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Identificar quais itens serão resolvidos com conceitos de logaritmos ou com conceitos de equações exponenciais.	Utilizar estratégias coerentes para cada item: $10^x = 990$ Nesse item, conceitos de exponenciais não são suficientes para calcular o valor numérico de x, então, conceitos de logaritmos serão utilizados.	Indicar a resposta de forma completa e não ambígua: $x = \log_{10} 990$

32. (OE: APLICAR o conceito de logaritmos para resolver uma situação problema sobre a decomposição de uma substância radioativa no tempo (meia-vida))
Certa substância radioativa decompõe-se de forma que sua massa m reduz-se à metade do valor inicial a cada 4 horas, ou seja, $m = m_0 . 2^{-0,25t}$, sendo m_0 o valor inicial da massa. Partindo-se de 60 gramas da substância, pergunta-se:

c) Qual será a massa restante após 8 horas?

Sendo m_0 o valor inicial da massa sendo 60 gramas, sua massa restante após 8 horas será de:

$$m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$$
$$m = 60 \cdot 2^{-0,25 \cdot 8}$$
$$m = 60 \cdot 2^{-2}$$
$$m = 60 \cdot \frac{1}{2^2}$$
$$m = \frac{60}{4}$$
$$m = 15\ g$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Identificar quais são os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.	Utilizar fórmulas e dados do exercício de forma coerente, identificar elementos importantes para a resolução e indicar a estratégia de forma coerente: $m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$ $m = 60 \cdot 2^{-0,25 \cdot 8}$ $m = 60 \cdot 2^{-2}$ $m = 60 \cdot \frac{1}{2^2}$ $m = \frac{60}{4}$ Esse item requer do estudante a utilização dos dados fornecidos pelo enunciado, substituí-los na expressão dada e realizar os cálculos de forma correta.	Indicar a resposta de forma correta, não ambígua, podendo apresentar como suporte, argumentos coerentes e completos: $m = 15\ g$

d) Após quanto tempo a massa restante será igual a 12 gramas? (Utilize o valor aproximado $5 \cong 2^{2,32}$.)

$$m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$$
$$12 = 60 \cdot 2^{-0,25t}$$

$$\frac{12}{60} = 2^{-0,25t}$$

$$\frac{1}{5} = 2^{-0,25t}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2^{0,25t}}$$

$$5 = 2^{0,25t}$$

Como $5 \cong 2^{2,32}$, temos que:

$$2^{2,32} = 2^{0,25t}$$

$$2,32 = 0,25t$$

$$t = \frac{2,32}{0,25}$$

$$t = 9,28\ horas$$

Conhecimento matemático	**Estratégias, processos e modos de pensar**	**Comunicação matemática**
Identificar quais são os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.	Utilizar fórmulas e dados do exercício de forma coerente, identificar elementos importantes para a resolução e indicar a estratégia de forma coerente: $m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$ $12 = 60 \cdot 2^{-0,25t}$ $\frac{12}{60} = 2^{-0,25t}$ $\frac{1}{5} = 2^{-0,25t}$ $\frac{1}{5} = \frac{1}{2^{0,25t}}$ $5 = 2^{0,25t}$ Como $5 \cong 2^{2,32}$, temos que: $2^{2,32} = 2^{0,25t}$ $2,32 = 0,25t$ $t = \frac{2,32}{0,25}$ Esse item requer do estudante a utilização dos	Indicar a resposta de forma correta, não ambígua, podendo apresentar como suporte, argumentos coerentes e completos: $t = 9,28\ horas$

	dados fornecidos pelo enunciado, substituí-los na expressão dada e realizar os cálculos de forma correta.	

A partir da literatura sobre a Taxonomia de Bloom foi elaborado o quadro a seguir onde foram classificadas as questões presentes na prova em fases. Note que, com essa classificação, nenhum exercício se enquadrou nas características das categorias “lembrar“, “sintetizar” e “criar”, enquanto a maioria das questões foram classificadas na categoria “aplicar”.

CATEGORIAS	**VERBOS DE AÇÃO**	**EXERCÍCIO**
1. Lembrar – Buscar conhecimento relevante na memória de longo termo	Reconhecer Lembrar	Nenhum exercício
2. Entender – Determinar o significado de mensagens instrucionais, incluindo comunicação oral, escrita e gráfica	Interpretar Exemplificar Entender Classificar Resumir Inferir Comparar Explicitar	12
3. Aplicar – Executar ou usar um procedimento em uma dada situação	Aplicar Executar Implementar	1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15 e 16
4. Analisar – Quebrar o material em suas partes constituintes e detectar como as partes se relacionam entre si e com o da estrutura ou propósito do todo	Diferenciar Interpretar Analisar	4, 5, 6 e 7

5. Sintetizar/ Avaliar – Fazer julgamentos baseados em critérios e padrões	Checar (Verificar) Criticar	Nenhum exercício
6. Criar – Unir elementos para formar um todo coerente e novo ou fazer um produto original	Gerar Planejar Produzir	Nenhum exercício

Uma estratégia para não permitir que a prova em fases se limite é acrescentar novas questões a cada fase. Desse modo, os estudantes teriam as questões comentadas da fase anterior e as novas questões para responder[5]. Essas novas questões inclusive podem trazer categorias da Taxonomia de Bloom ainda não utilizadas nessa primeira versão da prova em fases, como LEMBRAR, SINTETIZAR e CRIAR.

[5] TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. A Prova Escrita como Instrumento de Avaliação em Aulas de Matemática. **Educação Matemática em Revista.** São Paulo. v. 45, p. 48-55, 2015.