INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
ENCIMA IFSP

THA: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS A PARTIR DE EXPERIMENTOS DE FÍSICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

WINDERSON RIBEIRO CAVALCANTI

São Paulo
2021

WINDERSON RIBEIRO CAVALCANTI

THA: Análise de uma proposta de ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus a partir de experimentos de Física no ensino fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, e aprovada em 26 de Março de 2021, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª Drª Rebeca Vilas Boas Cardoso de Oliveira

São Paulo
2021

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

c376t Cavalcanti, Winderson Ribeiro
Tha: análise de uma proposta de ensino de funções polinomiais de 1° e 2° graus a partir de experimentos de física no ensino fundamental / Winderson Ribeiro Cavalcanti. São Paulo: [s.n.], 2021.
303 f.

Orientador: Rebeca Vilas Boas Cardoso de Oliveira

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2021.

1. Teoria da Aprendizagem Significativa. 2. Interdisciplinaridade. 3. Ensino de Matemática. 4. Perspectiva Construtivista. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

WINDERSON RIBEIRO CAVALCANTI

THA: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS A PARTIR DE EXPERIMENTOS DE FÍSICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada e aprovada em 26 de Março de 2021 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Profª. Drª. Rebeca Vilas Boas Cardoso de Oliveira
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientadora e Presidente da Banca

Prof. Dr. Gustavo Isaac Killner
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Armando Traldi Junior
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Profª. Drª. Graciella Watanabe
Universidade Federal do ABC
Membro da Banca

AGRADECIMENTOS

À Profª Drª Rebeca Vilas Boas Cardoso de Oliveira, uma educadora admirável, detentora de um conhecimento irrepreensível que, com toda sua dedicação, respeito, apontamentos críticos, paciência e carinho me ajudou nesta jornada para me tornar um pesquisador, permitindo compreender o significado da frase de Isaac Newton, que com muita deferência me aproprio neste momento, para dizer *"Se cheguei até aqui, foi por que me apoiei nos ombros dos gigantes"*.

Aos Profs. Drª. Graciella Watanabe e Profº Dr. Gustavo Isaac Killner, os quais tive o prazer de conhecer e admirar durante minha formação em Física, pelo expressivo conhecimento técnico e, sobretudo humano que possuem e a verdade observada nas palavras que proferiam e ações que tomavam, palavras e ações complementares entre si. As lembranças que guardo das aulas e dos momentos em que tive o prazer de reencontrá-los são únicos e permitiram me reconhecer como educador sócio-histórico-crítico, cujo ensinamento pelos senhores compartilhado inspirou este trabalho.

Ao Prof. Dr. Armando Traldi Junior, que de forma solícita e compreensiva aceitou o convite para compartilhar uma parcela de seu vasto conhecimento na área da Matemática, com um pesquisador iniciante e em constante aprendizado.

Ao meu amado marido e companheiro de aventuras Márcio Ribeiro Cavalcanti, que com a paciência, diplomacia e quietude acompanhou todo o desenvolvimento da pesquisa, assim como a decisão abrupta de noivar e casar de forma concomitante. Sempre incentivou as minhas aventuras acadêmicas e compreendeu, como sempre, os meus momentos de desgaste físico e emocional, proporcionando o acolhimento e o amor incondicionais de sempre. Te Amo Vida!

Às minhas amigas: Mariana Cristina Frank, madrinha de casamento e amiga de infância, que levarei para toda a vida, sempre solícita e disposta a me socorrer aos meus apuros nas traduções necessárias entre as línguas portuguesa e inglesa. Lídia Gonçalves Martins pela excelência na verificação das normas da ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas), "o calcanhar de Aquiles" de muitos pesquisadores, inclusive eu. À amiga e colega de orientadora Ana Paula Freire da Silva pelas conversas, apontamentos críticos e carinhosos, socorro nas horas de angústia, muito obrigado, divas!!

À Professora Elaine Cristina Damasceno Soares, meu eterno "Pacotinho" que se dispôs a fazer as correções gramaticais do presente trabalho**,** evidenciando cada dia mais a pessoa íntegra, gentil, generosa, polêmica, profissional, excepcional e única! Obrigado minha grande amiga, “Didn’t we almost have it all”?

Aos meus amigos: Levy, Bruna e Thabata; “aqui é aqui; ali é ali; e nãnãnãnã é nã, nãnãnã”.

Aos meus amigos Rob e Sil que diante do Chororô Oficial, permaneceram fieis, e nos caminhos mais tenebrosos da desistência, se fizeram presentes em forma de luz para me guiar na perseverança, muito obrigado!

Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade.

Paulo Freire

RESUMO

O presente trabalho buscou analisar uma proposta de ensino e os possíveis caminhos das aprendizagens de estudantes do 9º ano do ensino fundamental da Educação Básica de uma escola pública, relativo ao tema funções polinomiais de 1º e 2º graus, empregando como recurso didático, experimentos de Física, bem como analisar as potencialidades, contribuições e desafios ao ensino da Matemática, encontrados ao usar experimentos de outra área de conhecimento para seus conteúdos. Entende-se que esta pesquisa contribui para o ensino da Matemática à medida em que pôde proporcionar ao professor uma possibilidade de discutir, de forma interdisciplinar, um tema prescrito nos documentos orientadores do currículo escolar, assim como pode permitir aos docentes reflexões sobre uma alternativa de prática de ensino. A pesquisa possui um caráter qualitativo e quanto aos seus procedimentos e do tipo pesquisa-ação, e se fundamenta sobre os princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e na Trajetória Hipotética de Aprendizagem de Simon, sob uma perspectiva construtivista para o ensino da Matemática. Respalda-se na metodologia da análise de conteúdo para interpretação e análise dos dados coletados, por meio de quinze intervenções didáticas nas aulas de Matemática, totalizando 30 horas-aula, de duas turmas do ano/série escolhidos para o respectivo estudo. Os dados coletados são originários dos registros dos estudantes, distribuídos em Grupos A e B e do professor pesquisador, que buscou apresentar como principais resultados desta pesquisa: i) a potencialidade de garantir o desenvolvimento das aprendizagens de funções polinomiais utilizando experimentos de Física; ii) a proposição de alterações possíveis e necessárias na proposta inicial de trajetória hipotética de aprendizagem, empenhando-se em adequar seu alcance ao público que foi destinado, culminando na apresentação de uma trajetória hipotética de aprendizagem final, analisada, avaliada e comentada na forma de produto educacional do presente estudo.

Palavras-chave: Teoria da aprendizagem significativa. Interdisciplinaridade. Ensino de Matemática. Perspectiva construtivista.

ABSTRACT

The present work proposes, analyzes and assesses a hypothetical learning trajectory (HLT), under Simon's (1993) view of first and second polynomial functions taught at 9th grade in a public school. The analyzing tool will be through physics experiments. The end-result intends to describe and measure the potential, contribution and challenges faced when math is taught through experiments from other fields of knowledge. The research presented aims at providing teachers with relevant tools to be applied in the field of math teaching considering an interdisciplinary approach. It also invites reflection upon the benefits of including alternative ways of teaching content. The present work analysis is qualitative and research-action type. It is based on David Ausubel's Meaningful Learning Theory and on Martin Simon's Hypothetical Learning Trajectory, taking under consideration a constructivist approach to math teaching. The methodology used consists of analyzing the students' and research-teacher's registered response and notes of fifteen didactic interventions carried out during a total of thirty hours of classes in the groups chosen. The data collected came straight from the students' notes from groups A and B, as well as from the teacher-researcher's daily journal. The main results to be presented are 1) the potential there is to guarantee the development of students' learning polynomial functions through physics experiments; 2) a proposal of possible necessary changes in the initial proposition of hypothetical learning trajectory, which aims to better suit and reach the target public. It will then present a final hypothetical learning trajectory, which includes its thorough analysis, assessment and comments. It proposes a teaching method, in the shape of an educational product, based on the present study.

Keywords: Meaningful Learning Theory. Interdisciplinarity. Math teaching. Constructivist perspective.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

AAP	Avaliação da Aprendizagem em Processo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DAEB	Diretoria de Avaliação da Educação Básica
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IDESP	Índice de Desenvolvimento da Educação de São Paulo
INEP	Instituto Nacional de Estudo e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IPRJ	Instituto Politécnico do Rio de Janeiro
PPP	Projeto Político-Pedagógico
SBF	Sociedade Brasileira de Física
SED	Secretaria Escolar Digital
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SARESP	Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SEDUC	Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
THA	Trajetória Hipotética da Aprendizagem
UEPS	Unidade de Ensino Potencialmente Significativa
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta seção dedica-se a apresentar o pesquisador e suas motivações para o estudo realizado, bem como contempla discutir o delineamento, o objetivo e a justificativa para esta pesquisa, finalizando com uma sucinta descrição dos pressupostos teóricos que orientam esta investigação e como está organizado o presente trabalho.

1.1 Apresentação

Desde o meu ingresso no magistério, no ano de 2010, em uma escola pública da rede de ensino do Estado de São Paulo, um dos maiores desafios que tenho observado é a dificuldade de aprendizagem da Matemática de estudantes no final do ensino fundamental.

Mediante aos resultados obtidos, através do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), que analisou a educação básica pública estadual de São Paulo e do IDESP (Índice de Desenvolvimento da Educação de São Paulo) das escolas em que já atuei, percebi uma nítida necessidade de ação, seja por políticas públicas estaduais, ou pelos responsáveis mais diretos nesse processo de ensino-aprendizagem. Apesar de atuar, prioritariamente, nos anos finais do ensino fundamental, a baixa aprendizagem em Matemática dos anos finais deste nível da educação básica pode dificultar e até mesmo comprometer aprendizagens posteriores.

Sou docente e minha formação básica sempre foi em escolas públicas. Cursei o ensino fundamental e o ensino médio, em escolas das redes de ensino municipal e estadual de São Paulo, respectivamente. Tenho uma memória afetiva de momentos significativos vivenciados nestes ambientes de aprendizagem, no entanto, um cenário bem diferente se mostra atualmente, seja porque agora ocupo uma posição dentro da unidade escolar, como docente, repleta de experiências e leituras de mundo, que como estudante não era possível obter e, que modificaram o meu olhar para a escola pública; por entender que aspectos de natureza política e social, tanto quanto investimentos e olhar sensível do poder público para as escolas, corroboram para este cenário atual da educação básica pública em nosso país.

Após concluir minha formação inicial, no curso de licenciatura em Matemática, em uma instituição de ensino superior particular, tive a oportunidade de cursar a segunda licenciatura, em Física, em uma instituição pública, que me possibilitou ampliar o olhar sobre o ensino superior, a formação dos professores e a articulação entre teoria e prática, por meio dos estágios supervisionados vivenciados. Observei a evasão contida nos cursos de licenciatura, e já no exercício da docência, a enorme lacuna existente de professores que lecionam, sobretudo, Matemática e Física, na rede pública de ensino.

Em 2010, início da minha atuação profissional, refletindo sobre os últimos sete anos, excetuando 2015, percebi que lecionava prioritariamente para turmas de 8ª Série/ 9º Ano do ensino fundamental e, refletindo sobre o meu exercício profissional, notei que a aprendizagem da Matemática, especificamente, em alguns temas, se mostrava insuficiente diante da expectativa que eu depositava para o ano/série avaliado, bem como grandes percentuais das turmas que lecionava, obtinham desempenhos abaixo do básico e, básicos nas avaliações internas e externas, de níveis estadual e federal.

A recém-aprovada Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental discorre que:

> [...] para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da matemática. (BRASIL, 2017, p.297)

Por considerar que é neste ano (9º Ano), que se inicia os estudos de funções polinomiais, tema este que será explorado e aprofundado no Ensino Médio.

Ao ingressar no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática no IFSP, me senti motivado a investigar a aprendizagem de funções polinomiais de 1º e 2º graus, no 9º ano do ensino fundamental, com alunos de uma escola pública da rede estadual de ensino de São Paulo.

1.2 A Pesquisa

A falta de contextualização do ensino de funções com situações das demais áreas do conhecimento, e a dificuldade em apresentar aos alunos as aplicabilidades dos conceitos de funções polinomiais em situações diversas, resultou em uma proposta de intervenção na prática do docente de como acompanhar a aprendizagem dos alunos, acerca de um dos temas estruturantes do currículo (Funções) para o Ano/Série, entendidos como os desafios a serem analisados nesta pesquisa.

O instrumento adotado para o desenvolvimento de intervenções na didática do professor, visando identificar as aprendizagens dos alunos, é a Trajetória Hipotética da Aprendizagem (THA) que na perspectiva de Simon (1993), considera que através da THA, é ofertada ao professor a possibilidade de construir seu próprio projeto de decisões, em suas melhores suposições de como a aprendizagem acontece.

A investigação aqui proposta é de natureza qualitativa, pois segundo Zanella (2011) é um estudo que "preocupa-se em conhecer a realidade segundo a perspectiva dos sujeitos participantes da pesquisa, sem medir ou utilizar elementos estatísticos para análise dos dados". Ainda que, alguns pesquisadores tratem de forma antagônica, as pesquisas qualitativa e quantitativa, Triviños (1987) destaca que "essa dicotomia, já o indicamos, não tem razão de existir, analisada sob a perspectiva marxista e da própria experiência dos pesquisadores".

Com isso, entendemos que pesquisas qualitativa e quantitativa não são de naturezas opostas e sim complementares e, para este estudo, recorreremos em determinados momentos a mensurar e quantificar determinados aspectos que os dados evidenciem, porém sem tratá-los de forma estritamente estatística, e nem buscando uma relação causal entre as variáveis, como faríamos em uma perspectiva positivista de pesquisa. A intencionalidade de destacar uma frequência significativa em determinado conjunto de dados, está em discutir a possibilidade de ressaltar características do contexto daquela situação, bem como evidenciar fatores que contribuíram para a recorrência daquele aspecto específico observado.

> Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. Os locais têm de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem. Quando os dados em causa são produzidos por sujeitos, como no caso de registros oficiais, os investigadores querem saber como e em que circunstâncias é que eles foram elaborados. [...] Para o investigador qualitativo divorciar o ato, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.48)

De acordo com Gerhardt e Silveira (2009), trata-se de uma pesquisa aplicada, quanto a sua natureza, pois manifesta interesse e preocupações voltadas à solução de problemas. Quanto aos objetivos é uma pesquisa explicativa, pois se atenta a identificar fatores que determinam ou contribuem para a ocorrência do fenômeno e, procedimentalmente, do tipo pesquisa-ação, visto que haverá uma ação planejada do pesquisador na situação problema a ser investigada.

A pesquisa-ação é uma estratégia metodológica da pesquisa social e para Thiollent (2011) é orientada em função da resolução de problemas ou de objetivos de transformação. Supõe uma forma de ação planejada de caráter social, educacional, técnico ou outro, que nem sempre se encontra em propostas de pesquisa participante.

Ainda que Gil (2002) destaque que a pesquisa-ação tenha sido alvo de controvérsias, no que concerne ao envolvimento ativo do pesquisador e à ação por parte das pessoas ou grupos envolvidos na pesquisa, é uma modalidade de pesquisa que tem crescido devido, entre outros fatores, a minimização do "efeito do observador" sobre os objetos de investigação e também por apresentar pesquisadores com perfis que privilegiam um enfoque dialético, histórico-estrutural e que visam contribuir, com sua investigação, para transformação da realidade estudada.

1.3 Justificativa

As redes de ensino têm buscado, cada vez mais, mensurar a qualidade da educação ofertada, bem como quantificar a proficiência em Língua Portuguesa e Matemática dos seus estudantes. Muitas vezes são testes padronizados, pautados e construídos segundo o currículo vigente que não consideram a realidade local e as especificidades da escola e de seus alunos. Professores e gestores sentem-se, muitas vezes, os responsáveis diretos pelo "fracasso escolar" dos estudantes que não alcançam as metas estabelecidas pelas redes de ensino, responsabilizando-se pelos baixos índices alcançados.

Entendemos que desconsiderar nestas avaliações externas as características locais da escola e de seus estudantes, bem como, o contexto sócio-histórico-econômico em que se encontram inseridos e a infraestrutura disponibilizada pelas redes de ensino, seria minimizar os impactos destes fatores no processo de ensino e aprendizagem. Libâneo (2012) discute a dualidade da escola pública brasileira na perspectiva de que se observa uma escola fundamentada em conhecimentos historicamente construídos para os ricos e uma escola fortemente calcada no acolhimento social para os pobres.

De acordo com Libâneo (2012), nas últimas décadas há uma crescente crítica ao modelo de escola intitulado como "escola tradicional". O autor acrescenta que a partir da Conferência Mundial sobre Educação para Todos, realizada na cidade de Jomtien, na Tailândia, no ano de 1990 surge um movimento mundial chamado de *Educação para Todos* e países em desenvolvimento, como o Brasil, participam destas conferências, que são convocadas, organizadas e patrocinadas pelo Banco Mundial.

O autor destaca, ainda, que nas últimas décadas, o governo brasileiro estruturou políticas públicas pautadas na Declaração Mundial da Conferência de Jomtien, culminando no Plano Decenal de Educação para Todos, Parâmetros Curriculares Nacionais, Lei de Diretrizes e Bases, sistema nacional de avaliação, dentre outros. Libâneo (2012) complementa que "[...] estes vinte anos de políticas educacionais no Brasil, elaboradas a partir da Declaração de Jomtien, selaram o destino da escola pública brasileira e seu declínio." (LIBÂNEO, 2012, p.15).

Para Libâneo (2012), na perspectiva de Miranda (2005), a principal mudança na educação de massas advinda das reformas educativas neoliberais, é que

> [...] a escola constituída sob o princípio do conhecimento estaria dando lugar a uma escola orientada pelo princípio da socialidade. O termo "socialidade" está sendo adotado aqui para ressaltar que a escola organizada em ciclos se situa como espaço/tempo destinado à convivência dos alunos, à experiência da socialidade, distinguindo-se dos conceitos de socialização e de desenvolvimento da sociabilidade tratados pela sociologia e psicologia. (MIRANDA, 2005, p.641).

Atualmente, toda a comunidade escolar, sobretudo professores e gestores, sentem os impactos da adoção de políticas públicas com viés mercantil, e Freitas (2012) acrescenta que vivenciamos hoje, o que para ele é o "neotecnicismo", em que:

> [...] hoje, sob a forma de uma "teoria da responsabilização", meritocrática e gerencialista, onde se propõe a mesma racionalidade técnica de antes na forma de *"standards"*, ou expectativas de aprendizagens medidas em testes padronizados, com ênfase nos processos de gerenciamento da força de trabalho da escola (controle no processo, bônus e punições), ancorada nas mesmas concepções oriundas da psicologia behaviorista, fortalecida pela econometria, ciências da informação e de sistemas, elevadas à condição de pilares da educação contemporânea. (FREITAS, 2012, p. 383 apud FREITAS, 1992;1995)

Segundo Freitas (2012) para Kane & Staiger (2012) testes para os estudantes, divulgação pública do desempenho da escola e recompensas e sanções (caráter meritocrático do sistema), muito presentes na educação pública do Estado de São Paulo, compõem este sistema de responsabilização, percebido por grande parte dos professores e gestores.

Observamos, então, que tais aspectos acentuam os níveis de desigualdade social que temos no país, sendo assim percebemos também que há um conflito sobre a função social da escola "[...] o direito ao conhecimento e à aprendizagem é substituído pelas aprendizagens *mínimas* para a sobrevivência." (LIBÂNEO, 2012, p.23).

Miranda (2005) complementa que:

> O princípio que vem orientando toda a concepção e a organização escolar seriada é o conhecimento, porque o que reúne os alunos e configura a dinâmica do processo ensino-aprendizagem é a aquisição de determinados conhecimentos e processos mediados pelos professores. [...] O princípio que se sustenta na organização escolar em ciclos de formação contrapõe-se frontalmente ao anterior e acarreta profundas alterações. Defende que os alunos sejam agrupados em ciclos e que o critério de inclusão se deva operar por faixa etária ou por etapa de desenvolvimento humano. (MIRANDA, 2005, p. 641-642)

Enxergamos uma dificuldade em realmente estabelecer quais são os objetivos e as funções da escola pública, porém a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo fez uma organização no ensino fundamental em ciclos. Percebemos neste cenário, um esvaziamento da cultura e da ciência historicamente acumuladas nos processos de ensino e aprendizagem, e uma convergência gradual para uma visão em que é necessário garantir aprendizagens *mínimas* aos alunos, com uma escola que possui características cada dia mais crescentes de assistencialismo e acolhimento.

Diante deste cenário, apropriando-se desta perspectiva de avaliação, o governo do Estado de São Paulo faz uso destes instrumentos de mensuração da "qualidade da educação paulista" e assim pauta suas políticas públicas para a educação no território paulista.

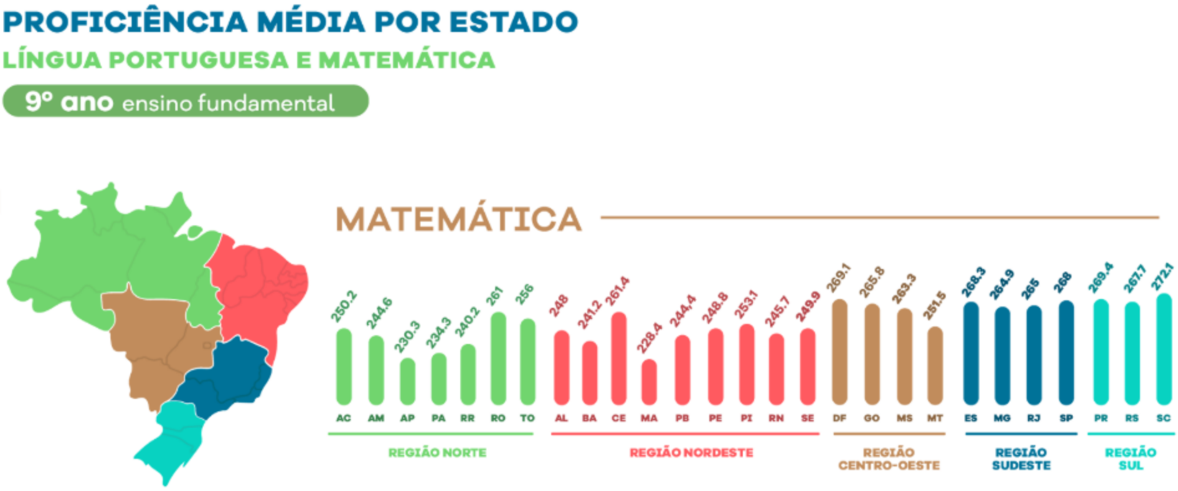
Ainda que essas avaliações externas, aplicadas em larga escala, demonstrem que há muitos desafios a serem superados, observaremos como estes indicadores são apresentados e se podem servir, com o intuito de se pensar e refletir sobre as expectativas de aprendizagem que os órgãos educacionais esperam que sejam alcançados, como um parâmetro para os educadores e estudantes.

Mediante os resultados do SAEB do ano de 2017, que avalia a educação em nível nacional e do IDESP do ano de 2019 que avalia a rede pública de ensino no Estado de São Paulo, percebemos que há a necessidade de políticas públicas voltadas à Educação, por exemplo, subsidiando os responsáveis mais diretos neste processo de ensino-aprendizagem, na busca de alternativas que minimizem esta estagnação no ensino público paulista.

O SAEB foi instituído em 1990, e é formado por avaliações externas em larga escala, com objetivo de traçar um diagnóstico da educação básica no Brasil e dos possíveis fatores que influenciam no desempenho dos educandos, fornecendo um indicador sobre a qualidade do ensino ofertado. A partir da edição de 2019, a avaliação contemplou a educação infantil, juntamente com o ensino fundamental e ensino médio.

Podemos observar na Figura 1 abaixo, o indicador de proficiência média por estado da federação. O Estado de São Paulo possui um indicador de 268, ocupando a quinta posição no ranking dos Estados brasileiros, atrás do Distrito Federal (269,1) e dos Estados de Santa Catarina (272,1), do Paraná (269,4) e do Espírito Santo (268,3).

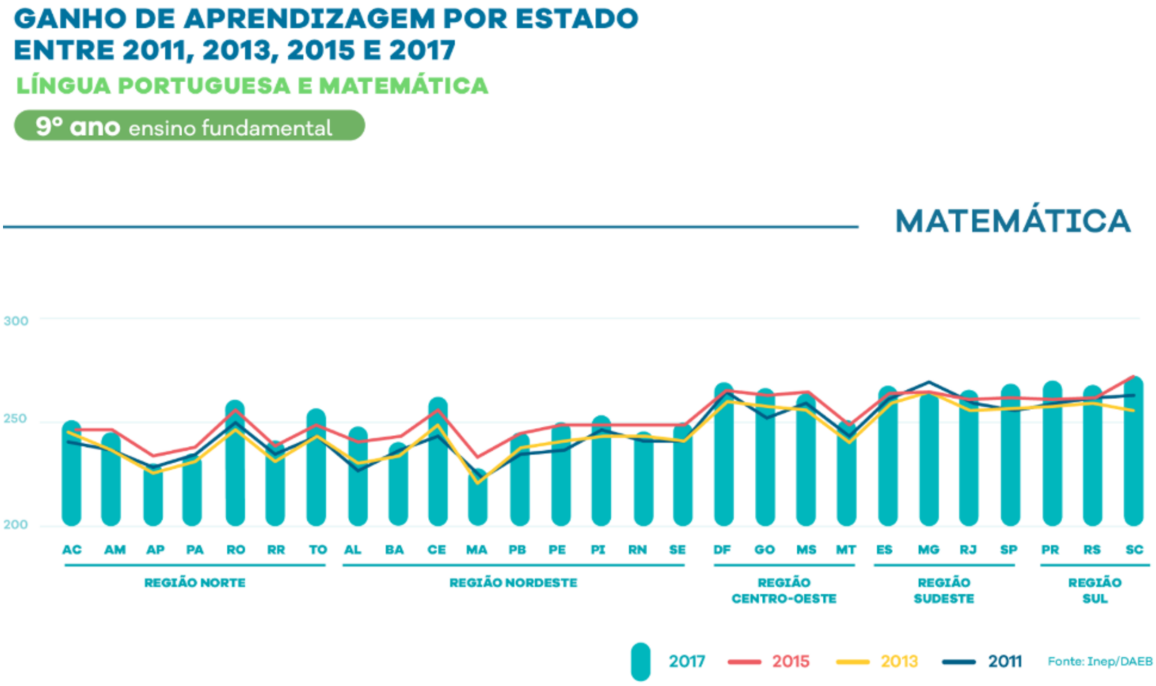
Figura 1 - Média da Proficiência em Matemática por Estado da Federação



Fonte: INEP/DAEB.[1]

Em seguida, na Figura 2, podemos notar o ganho de aprendizagem que o Estado de São Paulo apresentou, em relação às edições anteriores do SAEB.

Figura 2 - Série Histórica de Ganho de Aprendizagem por Estado da Federação



Fonte: INEP/DAEB.[2]

---

[1] Disponível em: <https://medium.com/@inep/resultados-do-saeb-2017-f471ec72168d>. Acesso em: 06 abr. 2020.

[2] Disponível em: <https://medium.com/@inep/resultados-do-saeb-2017-f471ec72168d>. Acesso em: 06 abr. 2020.

O ganho de aprendizagem é entendido como a evolução da proficiência média em relação à última edição. Conseguimos perceber um pequeno ganho de aprendizagem nesta série histórica, mas, apesar disso percebemos que os indicadores, a partir de 2013 ainda ficam aquém das expectativas, na rede pública de ensino do Estado de São Paulo, como podemos observar na Figura 3 abaixo.

Figura 3 -Metas projetadas e Ideb observado na rede pública de ensino do Estado de São Paulo

inep Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

IDEB Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

IDEB - Resultados e Metas

Parâmetros da Pesquisa

Resultado:	Estado	UF:	SP
Rede de ensino:	Pública (Federal, Estadual e Municipal)	Série / Ano:	8ª série / 9º ano

8ª série / 9º ano

	Ideb Observado							Metas Projetadas							
Estado	2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2021
São Paulo	3.8	4.0	4.3	4.4	4.4	4.7	4.9	3.9	4.0	4.3	4.7	5.1	5.3	5.6	5.8

Obs:
Os resultados marcados em verde referem-se ao Ideb que atingiu a meta.

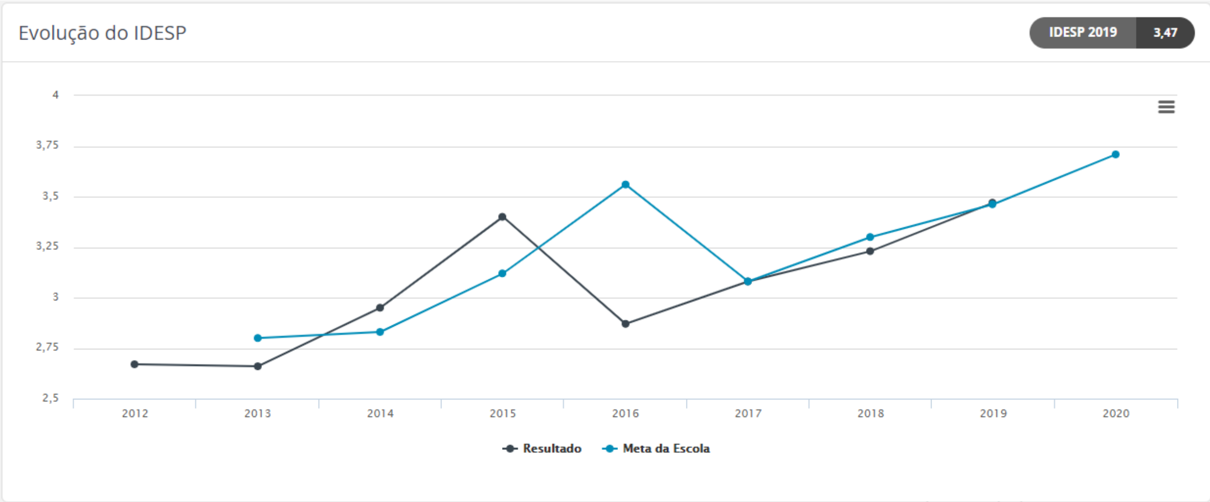
Fonte: INEP.[3]

O IDESP, por sua vez, tem a característica de estabelecer metas individuais, por unidades escolares, e seus resultados são comparados aos seus desempenhos anteriores, contando com novas metas e com objetivos sempre revistos a cada ano, adequados a suas realidades e especificidades.

O IDESP é um dos principais indicadores da qualidade do ensino na rede estadual de São Paulo, instituído desde 2007. As metas são estabelecidas ano a ano e seus objetivos são designados considerando o desempenho dos alunos no SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e o fluxo escolar de cada ciclo. Com isso, cada ciclo da mesma escola, possui metas diferentes para serem alcançadas. Abaixo temos uma ilustração (Figura 4) que mostra a evolução do IDESP do Ensino Fundamental – Anos Finais da escola investigada.

[3]Disponível em: <http://ideb.inep.gov.br/resultado/>. Acesso em: 06 abr. 2020.

Figura 4 -Evolução do IDESP (Anos Finais) na escola investigada



Fonte: Secretaria Escolar Digital (SED).[4]

Apesar da pequena mudança e expressividade nos valores de desempenho dos estudantes na avaliação do SARESP no componente de Matemática, ao longo desses nove anos (Figura 5), a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEDUC) estabeleceu como meta para 2030, que o IDESP da rede pública de ensino, para os Anos Finais do Ensino Fundamental seja igual a 6,00 (Figura 6), um grande desafio para todos os profissionais de educação.

Figura 5 -Indicadores de Matemática na Avaliação do SARESP

Resultados do Saresp em matemática

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
5º EF	204,6	209,0	207,6	209,6	216,5	223,6	222,4	223,8	227,4	**231,3**
7º EF	212,1	216,6	215,4	214,9	215,1	227,4	227,5	228,4	231,5	**237,7**
9º EF	243,3	245,2	242,3	242,6	243,4	255,5	251,0	256,7	255,6	**259,9**
3ª EM	269,2	269,7	270,4	268,7	270,5	280,8	278,1	278,3	278,6	**276,6**

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.[5]

[4]Disponível em: <http://focoaprendizagem.educacao.sp.gov.br/idesp_history/2 –>. Acesso em: 06 abr. 2020.
[5]Disponível em: <https://www.educacao.sp.gov.br/noticia/idesp-2019-cresce-desempenho-dos-alunos-ensino-fundamental-da-rede/>. Acesso em: 06 abr. 2020.

Figura 6 -Série Histórica do IDESP e Meta para o ano de 2030

Índice de Desenvolvimento da Educação de São Paulo (Idesp)

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	Meta (2030)
Anos iniciais	3,96	4,24	4,28	4,42	4,76	5,25	5,40	5,33	5,55	5,64	7,00
Anos finais	2,52	2,57	2,50	2,50	2,62	3,06	2,93	3,21	3,38	3,51	$\boxed{6,00}$
Ensino médio	1,81	1,78	1,91	1,83	1,93	2,25	2,30	2,36	2,51	2,44	5,00

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.[6]

Portanto, pretendemos que esta investigação possa disponibilizar aos professores um material que aumente o seu repertório didático acerca de um tema estruturante do currículo paulista, eventualmente solicitado nesta avaliação externa da rede pública de ensino. Queremos que a proposição de abordagem do tema Funções no 9º Ano do Ensino Fundamental, por meio da utilização de experimentos de Física, possibilite uma discussão, em alguns momentos, de caráter interdisciplinar, e que possa dispor aos estudantes algumas das aplicabilidades deste tópico da Matemática, historicamente presente nos currículos e na recém-aprovada Base Nacional Comum Curricular (BNCC), articulando o objeto de conhecimento (funções) a uma outra área de conhecimento, sugerindo um ensino que não seja da Matemática para a própria Matemática.

1.4 Objetivos da Pesquisa

O presente estudo tem por objetivo analisar uma proposta de ensino e aprendizagem de funções polinomiais de 1º e 2º graus em estudantes do 9º ano do ensino fundamental, utilizando como recurso didático experimentos de Física. Assim sendo, buscamos responder também a questão de pesquisa: com a utilização de experimentos de Física, é possível ensinar conceitos de funções polinomiais de 1º e 2º graus a estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental?

[6]Disponível em: <https://www.educacao.sp.gov.br/noticia/idesp-2019-cresce-desempenho-dos-alunos-ensino-fundamental-da-rede/>. Acesso em: 06 abr. 2020.

Pretendemos, ainda, fazer uma análise das potencialidades, contribuições, limitações e desafios encontrados ao utilizar experimentos de Física para ensinar um tema da Matemática.

Os objetivos secundários são:

- Explicitar aos estudantes a aplicabilidade de um tema da Matemática (Funções) à outra área do conhecimento (Física);
- Contextualizar um conhecimento matemático que, por diversas vezes, se apresenta de forma abstrata, a uma situação de movimento dos corpos (Queda Livre);
- Propiciar uma nova estratégia de ensino aos professores, ampliando o seu repertório didático.

1.5 Pressupostos Teóricos da Pesquisa

Segundo Becker (2001) há três diferentes formas diferentes de representar a relação ensino/aprendizagem. Destaca três modelos pedagógicos que classifica como pedagogia diretiva, pedagogia não-diretiva e o que considera ser um novo termo a pedagogia relacional que se encontram amparadas por determinadas epistemologias: o empirismo, o apriorismo e o construtivismo, respectivamente.

Sobre o modelo pedagógico considerado como pedagogia relacional, Becker (2001) destaca que o pressuposto epistemológico que o sustenta é o construtivismo, em que o autor considera, nesta abordagem, que as ações do professor acontecem visando que a aprendizagem dos estudantes, isto é a construção de seus novos conhecimentos, só ocorrerá se os alunos agirem ou problematizarem suas ações. Complementa discutindo que o professor

> [...] sabe que há duas condições necessárias para que algum conhecimento novo seja construído: a) que o aluno aja (assimilação) sobre o material que o professor presume que tenha algo de cognitivamente interessante, ou melhor, *significativo* para o aluno; b) que o aluno responda para si mesmo às perturbações (acomodação) provocadas pela assimilação do material, ou, que o aluno se aproprie, em um segundo momento, não mais do material, mas dos mecanismos íntimos de suas ações sobre esse material. (BECKER, 2001, p.23)

Para Valadares (2011) há diversas formas pelas quais o construtivismo se apresenta, com isso busca em seu trabalho apresentar algumas características do construtivismo radical e construtivismo não-radical, assim como procura estabelecer uma aproximação de uma forma moderada de construtivismo à teoria da aprendizagem significativa.

Simon (1993) ao defender o construtivismo como base de formulação para modelos de ensino, evita qualquer extremo que esta concepção possa manifestar. De acordo com Valadares (2011) para Dougiamas (1998)

> Piaget é de facto o precursor do construtivismo, mas de um construtivismo não-radical, [...], pois admite simplesmente que o conhecimento é construído pelo sujeito e não passivamente recebido pelos sentidos, *sem abandonar o carácter representacional desse conhecimento*. (VALADARES, 2011, p.42)

O construtivismo é antagônico às concepções inatista e comportamentalista sobre o processo de aquisição de conhecimentos e se interessa pelo processo de cognição dos sujeitos, e entende que a aprendizagem acontece por construção na estrutura cognitiva.

> Construtivismo não é uma prática ou um método; não é uma técnica de ensino nem uma forma de aprendizagem; não é um projeto escolar; é, sim, uma teoria que permite (re)interpretar todas essas coisas, jogando-nos para dentro de um movimento da história – da humanidade e do universo. (BECKER, 2001, p.72)

No ensino, os alunos não mais assumem uma postura passiva e submissa ao mestre, destacam-se como sujeitos de direitos e corresponsáveis pela construção de sua própria aprendizagem.

> Na perspectiva construtivista de Piaget, o aumento dos conhecimentos não poderia reduzir-se a um processo puramente aditivo ou cumulativo, pois este sempre implica, em graus diversos, uma reestruturação daquilo que a pessoa já sabe, aliás, concomitantemente com uma reorganização do pensamento. (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.342)

Pires (2009, p.150-151) comenta que na perspectiva construtivista de Simon “[...] nós, seres humanos, preferivelmente construímos nosso conhecimento de mundo por meio de nossas percepções e experiências, que são mediadas pelo nosso conhecimento prévio”. Gauthier e Tardif (2014, p.347) ressaltam que para Piaget “Efetivamente, só se pode aprender, construir novos saberes, tomando como base os conhecimentos já adquiridos e as ferramentas intelectuais de que se dispõe para assimilar novos objetos de aprendizagem”.

De acordo com Valadares (2011) o construtivismo social teve início por julgar que o construtivismo radical não considerava o papel da interação social na construção do conhecimento. Nesta vertente do construtivismo, pautada na psicologia social, conhecida também como construtivismo sociocultural, dá-se muita importância às interações linguísticas e

> [...] valoriza-se o fenômeno social que é a cultura e a interação social como propiciadora de ambientes ricos para a construção do conhecimento de cada ser humano. Um sujeito constrói o seu conhecimento manipulando ao mesmo tempo os objetos de estudo, mas também as fontes culturais que o ajudam a interagir com esses objetos (a linguagem, p.ex., é fundamental). (VALADARES, 2011, p.47)

Para Vygotsky o desenvolvimento não acontece por estágios sequenciais, o desenvolvimento ocorre por uma ação coletiva conjunta e não individualizada. O conhecimento acontece pela interação social entre indivíduo e o contexto sócio histórico em que se insere, portanto as concepções sócio-interacionistas de Vygotsky também contribuirão para a elaboração da THA e das tarefas matemáticas desta pesquisa.

> O ser humano, por sua origem e natureza, não pode nem existir nem conhecer o desenvolvimento próprio de sua espécie como uma mônoda isolada: ele tem, necessariamente, seu prolongamento nos outros; tomado em si, ele não é um ser completo. (IVIC, 2010, p. 16)

Destacando a relevância da interação social para o processo de ensino-aprendizagem em uma visão de construtivismo sociocultural, Ivic (2010), ressalta que as concepções vygotskyanas de interação social desempenham um papel construtivo no desenvolvimento. Para o autor o desenvolvimento da criança, sobretudo na primeira infância, depende das

> [...] interações assimétricas, isto é, as interações com os adultos, portadores de todas as mensagens da cultura. [...]. Isso significa, simplesmente, que certas funções mentais superiores (atenção voluntária, memória lógica, pensamento verbal e conceptual, emoções complexas, etc.), não poderiam emergir e se constituir no processo de desenvolvimento sem o aporte construtivo das interações sociais. (IVIC, 2010, p.16-17)

Diante da observação de diálogos entre os colegas de área, na sala dos professores durante minha atuação profissional, de maneira recorrente temas como a baixa aprendizagem dos alunos no componente curricular de Matemática, e dificuldade de contextualizar temas de ensino deste componente ganhavam destaque nas conversas. Neste ambiente mais informal, os professores proferiam falas que enfatizavam a falta de pré-requisitos dos estudantes para aprofundamento dos assuntos abordados no ano/série que lecionavam e dificuldade dos professores em contextualizar e apresentar aplicabilidades do conhecimento matemático que discutiam com as demais áreas de conhecimento.

A percepção das angústias destes professores residia, aparentemente, na dificuldade em definir algumas metodologias e estratégias de ensino. Frequentemente era relatado, nestes espaços mais descontraídos, que suas práticas ainda estavam prioritariamente pautadas em aulas expositivas e no uso do material fornecido pela rede estadual de ensino, gerando incômodo em alguns educadores e que por vezes teciam críticas ao material didático adotado pela Seduc, pois em diversas situações mostrava-se incompatível com a realidade das aprendizagens da maioria dos estudantes que trabalhavam.

Diante dessa vivência profissional como poderia repensar práticas de forma a diminuir as angústias, sobretudo dos professores de matemática? Segundo Valadares (2011, p.48) "[...] a aprendizagem significativa acerca de um dado *objeto* a conhecer é, como a própria designação indica, a construção de significados sobre ele. Mas é ao mesmo tempo uma mudança na forma de o encarar e porventura lidar com ele". Expõe, ainda, que

> Novak propõe o construtivismo humano como "um esforço para integrar a psicologia da aprendizagem humana e a epistemologia da produção do conhecimento" (Novak, 1990, p.17). Essa integração assenta, segundo Novak no facto de ser possível, através de uma teoria da aprendizagem alicerçada numa psicologia cognitivo-humanista que privilegie a comunicação, partilha, discussão e mudança de significados amplamente compartilhados. (VALADARES, 2011, p.48)

Valadares (2011, p.52) destaca que "no construtivismo humano, a Ciência é encarada como um processo, um devir, em que o novo conhecimento se vai construindo sobre o conhecimento anterior".

Já a aprendizagem significativa na perspectiva de Ausubel pressupõe o modo como um novo conhecimento se relaciona com um conhecimento já existente e relevante na estrutura cognitiva do aprendiz. Portanto, "a aprendizagem é significativa, segundo a concepção ausubeliana, se a nova informação incorporar-se de forma não arbitrária e não literal à estrutura cognitiva". (MOREIRA, 2001, p. 19).

Moreira (2001) discute que as condições para ocorrência de uma aprendizagem significativa, na concepção da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel é a presença de um material instrucional potencialmente significativo e relacionável com os conhecimentos prévios dos aprendizes e; que o aprendiz manifeste uma disposição para aprender de forma substantiva e não-arbitrária relacionando os conhecimentos novos com os preexistentes em sua estrutura cognitiva.

Na TAS, há evidências de uma aprendizagem significativa quando acontece uma interação entre os conhecimentos prévios e conhecimentos novos, ancorando-se em subsunçores (todos os conhecimentos prévios) já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

Os subsunçores podem, ao longo da aprendizagem, sofrer modificações, adquirir novos significados, tornando-se mais capazes de servir de ancoradouro para novas aprendizagens significativas. Isto ocorre por processos simultâneos e necessários à construção da estrutura cognitiva, enunciado nas TAS como a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa ou integradora (MOREIRA, 2001).

Considerando que as condições precípuas para ocorrência de uma aprendizagem significativa são: a utilização de um material potencialmente significativo e a disposição para aprender dos aprendizes, caso estes não possuam subsunçores adequados para ancorar o novo conhecimento, Ausubel propôs a utilização de organizadores prévios, que não necessariamente precisam ter relação direta com o assunto, mas servem para estruturar a mente, organizar, selecionar e deixar ativo os subsunçores.

Segundo Valadares (2011)

> A *teoria da aprendizagem significativa* é uma *teoria construtivista* porque defende que o conhecimento é um processo construtivo e valoriza, portanto, muito o papel da estrutura cognitiva prévia de quem aprende. A aprendizagem é considerada, em última instância, um processo pessoal e idiossincrásico, ainda que muito influenciado por fatores sociais e pelo ensino na sala de aula que é um processo eminentemente social. Trata-se de uma teoria *cognitivo-humanista* em que o ser humano atua recorrendo a pensamentos, sentimentos e ações para dar significado as experiências que vai vivendo. (VALADARES, 2011, p.53)

Esta constante inquietação em compreender a complexidade da atuação docente, me possibilitou buscar compreender esta articulação complexa entre a atividade da consciência e a ação. A ação com uma intencionalidade, objetivando a transformação da realidade, a práxis.

A atividade humana como sendo consciente e adequada a fins, e o trabalho humano, sendo uma atividade prática indica estarmos diante da natureza da prática docente. A práxis tem suas raízes no materialismo histórico dialético, pois “surge da luta social e coletiva e do engajamento político, como resultado articulador da reflexão e da ação para promover a transformação social.” (LIMA, 2013, p. 63).

Freire (2016) faz uma importante ressalva, o professor não é o elemento central no processo de ensino – aprendizagem: “Desta maneira, o educador já não é o que apenas educa, mas o que, enquanto educa, é educado, em diálogo com o educando que, ao ser educado, também educa.” (FREIRE, 2016, p. 120).

Para Vázquez (2011), quando nos deparamos com uma tendência em resolver as contradições entre o que se planeja e o que se concretiza de fato, estamos diante de uma práxis revolucionária. Para Freire (2016, p.127) “[...] a educação se re-faz constantemente na práxis”. Logo o trabalho docente, quando voltado a contribuir para a transformação, assume um posicionamento ideológico, amparado na filosofia da práxis, portanto a atuação docente deve recorrer à esta, por estar carregado de influências dos campos teórico e práticos. "A prática como fim da teoria exige uma relação consciente com ela, ou uma consciência da necessidade prática que deve satisfazer com a ajuda da teoria." (VÁZQUEZ, 2011, p. 259).

Quando Simon (1993) propõe o Ciclo de Ensino de Matemática após ter feito uma análise de um experimento de ensino pautado em uma prática construtivista, defende:

> "[...] a ideia de que, os objetivos da aprendizagem, as atividades de aprendizagem e o conhecimento dos estudantes que estarão envolvidos no processo de aprendizagem, são elementos importantes na construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem – parte-chave do que ele denomina Ciclo de Ensino de Matemática." (PIRES, 2009, p.154)

O domínio de conhecimentos do professor é outro ponto relevante no Ciclo de Ensino de Matemática, pois "[...] o conhecimento do professor serve como um mapa que traduz como ele se empenha na construção da compreensão dos alunos e identifica o potencial de aprendizagem." (PIRES, 2009, p.155). Este conhecimento advém de sua formação inicial e continuada, de leituras complementares e também de sua experiência profissional, que permite ao docente estabelecer objetivos de aprendizagem, elaborar atividades matemáticas de acordo com as hipóteses que concebem, previamente, de como os estudantes constroem seus conhecimentos sobre o tema a ser estudado.

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem permite, durante o seu desenvolvimento e da constituição interativa entre professor e alunos na sala de aula, uma revisão constante de seus objetivos e atividades matemáticas propostos inicialmente.

> A modificação da trajetória hipotética de aprendizagem não é algo que ocorre apenas durante o planejamento entre as aulas. O professor está continuamente engajado em ajustar a trajetória hipotética de aprendizagem de forma a refletir melhor seu conhecimento aprimorado. [...] Independentemente da extensão da modificação, alterações podem ser feitas em qualquer um ou em todos os três componentes da trajetória hipotética de aprendizagem: nos objetivos, nas atividades e / ou no processamento hipotético da aprendizagem. (SIMON, 1993, p.37)

Pires (2009) complementa que o professor, a partir de seu conhecimento matemático, interpreta as ações e linguagens dos estudantes e toma decisões sobre os possíveis conhecimentos matemáticos daqueles, sua possibilidade de aprendizagem e também está constantemente comprometido em ajustar a trajetória de aprendizagem que "hipotetizou", para melhor refletir seu aumento de conhecimento.

A avaliação do conhecimento dos estudantes no Ciclo de Ensino de Matemática, não necessariamente ocorre ao final da trajetória, o conhecimento do professor é continuamente alterado permitindo modificações ou proposições de uma nova trajetória hipotética de aprendizagem.

Assim, as atividades matemáticas que compõem a THA, foram construídas a partir da TAS de Ausubel, que valoriza o que o aluno já sabe e orienta a elaboração de materiais potencialmente significativos, tanto em sua natureza lógica, quanto em sua natureza psicológica; na trajetória hipotética de aprendizagem de Simon, que possibilita ao professor elaborar as atividades matemáticas em suas melhores suposições (hipóteses) de como acontece a aprendizagem dos estudantes; e no socio-interacionismo de Vygostky que compreende que o conhecimento se constitui pela interação social e o contexto sócio-histórico-social em que se inserem e o professor é um mediador do conhecimento nas situações didáticas.

1.6 Organização do Trabalho de Pesquisa

Na Introdução, discutem-se, sucintamente, os pressupostos teóricos do presente trabalho, assim como a justificativa, o delineamento e os objetivos adotados nesta pesquisa e a trajetória profissional do professor pesquisador bem como suas motivações.

No Capítulo 1, apresentamos uma discussão sobre as teorias de aprendizagens desde a abordagem inatista até a concepção construtivista, e também como entendemos o ensino numa perspectiva construtivista. Abordamos a filosofia da práxis como inerente ao trabalho docente, discutimos e aprofundamos o estudo da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de acordo com Simon (1993) e a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, segundo Moreira (2001).

No Capítulo 2, dedicamo-nos a apresentar os documentos oficiais (BNCC e Currículo Paulista) que orientam os objetivos de aprendizagem e os objetos de conhecimento da área da Matemática, com foco no ensino de funções e suas competências e habilidades específicas. Expomos a proposta de trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de funções polinomiais, assim como sua proximidade com a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS).

No Capítulo 3, a escola, o público alvo da pesquisa e os instrumentos de coleta de dados são explicitados bem como descrevemos as intervenções realizadas nas turmas e aulas de matemática e quais foram as atividades desenvolvidas.

No Capítulo 4, fazemos uma breve discussão sobre a metodologia de análise de conteúdo, na perspectiva de Bardin (1977) tal como uma exploração do material, interpretação e inferência, articulados à análise dos dados coletados.

Nas Considerações Finais, buscamos identificar os elementos que possivelmente possibilitaram assegurar a aprendizagem do tema proposto, como também as contribuições e desafios de articulação, contextualização e aplicabilidade de outras áreas do conhecimento associados ao ensino de matemática. Preocupamo-nos em expor a dificuldade encontrada pelo professor pesquisador quando este se propõe a investigar a própria prática assim como o tempo e o afastamento requeridos para que o professor possa exercer a função de pesquisador e produtor de conhecimento científico, partindo de sua prática local.

O produto educacional é a proposta da THA composta pela sequência de aulas e atividades matemáticas desenvolvidas, organizadas e avaliadas neste trabalho, para discussão em turmas de 9º Ano do ensino fundamental.

2. CAPÍTULO 1 – APORTE TEÓRICO

Iniciamos este capítulo discutindo todo percurso das correntes filosóficas sobre como os indivíduos adquirem novos conhecimentos desde a concepção inatista até a concepção construtivista, que é base teórica desta pesquisa. Dedicamos a esta seção também uma discussão sobre a práxis como princípio orientador da atividade docente e encerramos explorando e dando significado à Trajetória Hipotética de Aprendizagem segundo Simon (1993) e Teoria da Aprendizagem Significativa na perspectiva de Ausubel e Moreira.

2.1 Perspectiva Construtivista

2.1.1 Inatismo e Behaviorismo

Em uma abordagem inatista, se presume que o indivíduo desde seu nascimento, carrega consigo um saber, sendo necessário proporcionar situações que tragam tais conhecimentos à consciência. A hereditariedade lhe assegura que as capacidades e qualidades necessárias para que possa aprender e constituir sua base de conhecimentos estão garantidas, independente da experiência que estão e serão expostos.

> A epistemologia que sustenta esse modelo pedagógico é também denominada apriorista, palavra derivada da expressão a priori, significativa "daquilo que é posto antes", no caso em tela, a bagagem genética/hereditária. Essa epistemologia acredita que o ser humano nasce com o conhecimento já programado na sua herança genética. (NEVES; DAMIANI, 2006, p.4)

Segundo Gauthier e Tardif (2014) derivada da palavra inglesa *behavior* (comportamento), o *behaviorismo* pode ser compreendido, de maneira genérica, como a Psicologia do Comportamento. Possuindo forte influência do positivismo, o importante era que fosse possível mensurar, descrever e analisar pela observação direta, os aspectos do comportamento,com isso “a psicologia devia ocupar-se do comportamento, não da consciência; de estímulos e respostas e não de imagens e ideias”. (MOREIRA, 1999, p.35).

Gauthier e Tardif (2014) complementam que na perspectiva *behaviorista*, as preocupações estavam direcionadas a controlar, predizer e modelar o comportamento humano buscando concepções, ferramentas, estratégias e métodos concretos para ensinar e levar a aprender. Buscavam elevar o *status* da psicologia ao de uma ciência natural e a antecipação e controle do comportamento humano mostravam-se como interesses relevantes e que mereciam atenção.

> Considera fato estabelecido que as capacidades de adaptação do organismo humano são muito grandes e basta submetê-lo repetidamente a experiências concretas e variadas, mas de mesma natureza, seguidas imediatamente pelos reforços apropriados, para que ele interiorize por associação as relações entre comportamentos e consequências, e adote novos comportamentos. (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.317).

John Broadus Watson, precursor da corrente behaviorista, segundo Moreira (1999) era fortemente influenciado pelo condicionamento clássico de Ivan Pavlov, interessava-se mais pelos estímulos (*stimuli*), do que pelo reforço, punição. Para Watson, estes últimos eram conceitos muito subjetivos, ele descartava o mentalismo em favor do comportamentalismo objetivo, considera que a hereditariedade, fatores biológicos e sociais não alteram a manipulação do comportamento humano.

Watson se utilizou de experimentos com animais e seres humanos. Ao observar a salivação dos cães, decorrente de uma preocupação em entender os mecanismos de controle de secreção das glândulas digestivas, Pavlov percebeu que "[...] uma vez que o cão aprendeu a reagir com regularidade a um *stimulus* condicionado, esse *stimulus* pode servir para reforçar novos comportamentos" (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.318) permitindo chegar ao conceito de condicionamento clássico.

Edward L. Thorndike acompanhou o escape de gatos de uma caixa problema, criada por ele. Os gatos tinham que acionar um dispositivo para abrir a porta e do lado externo havia alimento para recompensá-los. Foi observado que à medida que aumentavam as tentativas, para que os gatos escapassem da caixa problema, menos tempo eles levavam para acionar o dispositivo de abertura da porta, com isso Thorndike conjecturou que

> [...] as respostas seguidas de maneira repetida por recompensas (SR+) geram satisfação, o que tem como consequência reforçá-las, até o ponto em que as recompensas não são mais sistematicamente necessárias para produzir o comportamento esperado. Ao contrário, as respostas seguidas por consequências desagradáveis (SR–) se enfraquecem, e o caráter estimulante da situação experimental pode até neutralizar-se. (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.319)

Uma das mais importantes contribuições de Thorndike ao *behaviorismo* é a Lei do Efeito, a qual versa sobre o "fortalecimento ou enfraquecimento de uma conexão como resultado de suas consequências. Está aí a ideia de reforço positivo e negativo". (MOREIRA, 1999, p.26).

Em uma ótica mais contundente do *behaviorismo*, destaca-se Burrhus Frederic Skinner, contribuindo para a ampliação de alguns conceitos de input (estímulo, reforço e contingências de reforço); e de output (respostas e condicionamentos operantes e respondentes). Segundo Moreira (1999) para Skinner “[...] o condicionamento respondente desempenha um papel pouco importante na maior parte do comportamento humano. É através do *condicionamento operante* que ele crê que é adquirida a maior parte da conduta humana”. (MOREIRA, 1999, p.51).

Skinner tinha a pretensão de modelar o comportamento das pessoas, não se interessando com o que ocorre na mente do indivíduo durante o processo de aprendizagem, importando-se apenas com o comportamento observável, sem nutrir preocupações com processos intermediários entre o estímulo e a resposta.

Apesar de Watson considerar que a psicologia deveria influenciar a vida das pessoas, sobretudo por meio da educação, foi após Skinner visitar a sala de aula do quarto ano de sua filha mais nova, que a experiência de observação da dinâmica da sala de aula e da atuação da professora, o inspirou a modificar seu programa de pesquisa, aplicando os princípios da sua psicologia à pedagogia. “As tarefas de aprendizagem apresentavam um grau de dificuldade mal-adaptado às capacidades dos alunos, alguns sendo incapazes de abordar os problemas apresentados, outros resolvendo-os em um tempo muito reduzido”. (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.325).

Tal experiência, segundo Gauthier e Tardif (2014) possibilitou que Skinner desenvolvesse a máquina de ensinar, que não tinha como objetivo destituir a função do professor, na verdade, buscava garantir diminuir a quantidade de atribuições da função docente, ligadas à avaliação, à retroação, ao treinamento e reforços imediatos do desempenho dos alunos, bem como destacar a importância do papel humano do mestre, garantindo o tempo necessário para desenvolvê-lo junto aos alunos.

Outra de suas contribuições relacionada à pedagogia é o ensino programado. “O método visa apresentar, de modo bem progressivo, uma matéria a cada aluno, além de suscitar uma resposta para cada segmento de conteúdo e fazer seguir cada resposta de uma retroação sobre sua exatidão”. (CRAHAY, 1999; VARGAS, 2003 *apud* GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.327).

De acordo com Gauthier e Tardif (2014) apesar de fazer referência da importância de ofertar aos alunos uma resposta mais rápida, atitude que Skinner considerou que havia muita demora por parte do professor e que o ensino programado respeitava o tempo que cada aluno levava para aprender determinados conteúdos, apresentando-os de forma fragmentada e com nível hierárquico de dificuldade admitindo apenas 5% de erros. Os autores complementam dizendo que o ensino programado não proporcionou uma melhora sensível no rendimento escolar dos estudantes, pois tal estratégia de ensino fragmentou tanto o conhecimento reduzindo expressivamente a significação, por parte dos alunos e também que era dada maior ênfase aos resultados dos estudantes do que aos processos de aprendizagem.

2.1.2 Cognitivismo e Construtivismo

O surgimento da filosofia cognitivista remonta ao mesmo período da corrente *behaviorista*, em oposição aos princípios desta, que ignorava qualquer discussão sobre a mente, focando única e exclusivamente no comportamento dos indivíduos, controlados pela consequência que, sob esta ótica a aprendizagem demonstrava-se por meio dos comportamentos observáveis.

O foco dos cognitivistas eram justamente as variáveis existentes entre o estímulo-resposta, ignorados no *behaviorismo*. Preocupavam-se com o processo de cognição, ocorrido na mente, buscando a compreensão dos processos mentais superiores.

> A filosofia cognitivista trata, então, principalmente dos processos mentais; se ocupa da atribuição de significados, da compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvida na cognição. Na medida em que se admite, nessa perspectiva, que a cognição se dá por construção chega-se ao *construtivismo*, tão apregoado nos anos noventa. (MOREIRA, 1999, p.15)

Gauthier e Tardif (2014) consideram que a criação do construtivismo deve-se à Piaget, por volta de 1950, cujo os estudos apontavam que as mudanças ocasionadas na estrutura cognitiva tinham relação direta com a interação com o meio. O comportamento é controlado por esquemas mentais, estes responsáveis por organizar as interações com o meio ambiente. De acordo com Becker (2001) para Piaget, "o sujeito humano é um projeto a ser construído; o objeto é, também, um projeto a ser construído. Sujeito e objeto não têm existência prévia, a priori: eles se constituem mutuamente, na interação. Eles se constroem". (BECKER, 2001, p.70). No entanto, "não basta, pois colocar o aluno em boas condições para que ele possa construir, de modo autônomo e sem nenhuma ajuda, saberes relativamente complexos". (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.342).

Assim sendo, o construtivismo não é um método, uma prática, uma técnica ou estratégia de ensino. É uma teoria que concebe o aluno, não mais como receptor de conhecimentos, e os professores como transmissores de conhecimento, mas que considera os educandos como sujeitos que construirão conhecimentos novos, a partir do que já conhecem. Nutre uma preocupação com a estrutura cognitiva do estudante e a influência que a interação com o meio físico e social ocasionam à aprendizagem dos sujeitos.

2.1.2.1 Jean Piaget

Jean William Fritz Piaget foi um biólogo, psicólogo e epistemólogo suíço. As perspectivas construtivistas não são novas, porém Valadares (2011) defende que Piaget foi um precursor de uma vertente de construtivismo não-radical. Conceber que "o conhecimento humano é uma construção do próprio homem, tanto coletiva como individual, é bastante antiga". (MOREIRA, 1999, p.95). No entanto, nas últimas décadas, seus estudos foram muito importantes na pedagogia.

Sua teoria construtivista do desenvolvimento humano caracteriza um período histórico de ascensão do cognitivismo e declínio do behaviorismo. Houve uma mudança nos princípios orientadores do ensino e da aprendizagem. Sobre o construtivismo, temos que "[...] ele diz respeito essencialmente à maneira pela qual se elaboram os conhecimentos e se constroem os instrumentos do pensamento; entretanto, influenciou as nossas concepções de aprendizagem geral e escolar". (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.342).

Destacamos sucintamente, os conceitos–chaves da teoria de Piaget, tais como: assimilação, acomodação e equilibração, bem como uma breve explanação sobre as etapas de aprendizagem por ele propostas, uma vez que são nestes conceitos que percebemos o seu construtivismo.

Os períodos de desenvolvimento cognitivo de Piaget são divididos em quatro estágios: sensório–motor; pré-operacional; operacional–concreto; operacional–formal. Para Moreira (1999) estima-se que o período sensório–motor se inicia no nascimento da criança e estende-se até, aproximadamente, dois anos. A criança compreende o mundo por meio de seus sentidos não diferenciando o seu eu do meio que a rodeia. Ela observa o mundo como uma extensão de seu corpo, porém no final deste estágio começa a considerar o corpo um objeto, dentre os demais que a rodeia, os quais existem independentes de seu eu. A imitação de vários comportamentos adultos é observável e os objetos assumem uma realidade cognitiva e física para a criança.

Entre o período de dois e sete anos, a etapa de desenvolvimento da cognição é a pré-operacional. Moreira (1999) discute que a criança compreende o mundo por meio de sua linguagem, cada vez mais desenvolvida e pelo pensamento simbólico; continua em uma perspectiva egocêntrica, como no estágio anterior. Apresenta um pensamento organizado, porém não reversível e as explicações que apresenta de sua realidade são fundamentadas pela experiência.

A próxima etapa é a operacional-concreto compreendendo o período entre sete e doze anos. Para Moreira (1999) a criança/pré-adolescente vai se libertando aos poucos dessa perspectiva egocêntrica; mostra-se mais capaz de fazer operações reversíveis, ou seja, pensa no todo e nas partes ao mesmo tempo; e demonstra um pensamento mais organizado, elaborando pensamentos lógico e dedutivos. No entanto, não é capaz de conjecturar hipóteses, opera somente com objetos da realidade.

O período que se inicia próximo aos doze anos, perpassando a adolescência e chegando a idade adulta é a etapa que Piaget classificou como operacional-formal. Os indivíduos se mostram capazes de utilizar a lógica proposicional e hipotético dedutivo, isto é, raciocinam com hipóteses verbais não dependendo mais de objetos concretos/reais. Conseguem manipular proposições; explicam fatos por hipóteses gerais, segundo Moreira (1999) manipulam e reconhecem relações de construtos mentais.

> Essas estruturas da inteligência se elaboram gradualmente em certo número de estágios e de períodos de desenvolvimento. [...] Tais estruturas não são pré-formadas no sujeito (posição apriorística), tão pouco são abstraídas dos objetos (posição empirista). Elas são gradualmente construídas a partir das ações do sujeito e de seus resultados sobre o objeto. Essas estruturas têm sua fonte nas coordenações gerais da ação (ou esquemas de ação), que, interiorizando-se, vão se transformar em operações lógicas dedutivas. (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.345)

A ação, a princípio prática, base de todo comportamento, é interiorizada gradualmente pelos esquemas de assimilação de Piaget. O pensamento é uma das expressões de interiorização de uma ação. Assimilação, acomodação e adaptação se conectam de maneira que a adaptação é um equilíbrio entre assimilação e acomodação; e que entende-se que acomodação é a reestruturação da assimilação. (MOREIRA, 1999, p.100).

Diante do exposto, Moreira (1999) complementa que assimilação ocorre quando o indivíduo constrói esquemas de assimilação mentais para abordar a realidade. Quando o organismo (a mente) assimila, ele incorpora a realidade a seus esquemas de ação, impondo-se ao meio. Ainda de acordo com o autor, a acomodação ocorre quando determinada situação, na criança ou adulto, não é assimilada e a mente desiste ou se modifica. Ao se modificar, acontece a acomodação que proporciona o desenvolvimento cognitivo.

Este contínuo movimento de equilíbrio e desequilíbrio na mente, decorrentes da complementariedade existente entre assimilação e acomodação, caracteriza o processo de equilibração, que avança desde o período operacional-formal até a fase adulta. “O desenvolvimento da criança é uma "construção" por reequilibrações e reestruturações sucessivas". (MOREIRA, 1999, p.101).

> O interacionismo piagetiano pretende superar as concepções inatistas e comportamentalistas sobre como o homem adquire conhecimentos e condutas. Como vimos na discussão dos aspectos epistemológicos, essas duas posturas são contrárias a concepção construtivista de aquisição de conhecimentos e, ao mesmo tempo, são fundidas para dar lugar a essa nova concepção chamada interação. Para Piaget essa interação se dá por dois processos simultâneos: a *organização interna* e a *adaptação ao meio*. (LEÃO, 1999, p.198)

2.1.2.2 Lev Vygotsky

Lev Semionovich Vygotsky advogado formado pela Universidade de Moscou, e que concomitantemente, cursou filosofia, literatura, história e psicologia pela Universidade de Chaniavski, para Gauthier e Tardif (2014) apresenta uma teoria cognitivista com influência marxista, de que o desenvolvimento cognitivo das funções psíquicas superiores possui dependência com o contexto sócio-histórico-cultural do indivíduo. Considera que relações sociais, ao serem interiorizadas, transformam-se em funções mentais superiores. Estabelece, assim, uma perspectiva dialética entre os processos sociais e os psíquicos superiores.

> E é precisamente o ponto essencial da concepção vygotskyana de interação social que desempenha um papel construtivo no desenvolvimento. Isto significa, simplesmente, que certas categorias de funções mentais superiores (atenção voluntária, memória lógica, pensamento verbal e conceptual, emoções complexas, etc.) não poderiam emergir e se constituir no processo de desenvolvimento sem o aporte construtivo das interações sociais. (IVIC, 2010, p.16-17)

O desenvolvimento cognitivo, nesta ótica, se dá pela transformação das relações sociais em funções mentais superiores, mediadas por instrumentos e signos. A atividade se concretiza pela mediação de instrumentos e signos, portanto "a atividade do humano sobre a sua conduta e sobre a de outrem passa por sistema de símbolos e de signos, principalmente a linguagem, que Vygotsky chama de instrumentos psicológicos". (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.366).

Assim sendo, segundo Moreira (1999) instrumento é algo que pode ser utilizado com alguma finalidade; signo é a representação de algo na mente; e interação são situações que criam condicionantes para o desenvolvimento cognitivo.

> É importante notar que tanto o instrumento como o signo cumprem uma função mediadora entre o sujeito e o mundo: o primeiro, controlando e transformando os objetos da natureza e o segundo, dirigido ao controle do próprio indivíduo, sem qualquer ação concreta sobre o objeto real. (SOARES, 2006, p.10)

Todavia, sobre os sistemas de signos e o processo de interiorização, temos que:

> As sociedades criam não só instrumentos, mas também sistema de signos; ambos são criados ao longo da história dessas sociedades e modificam, influenciam, seu desenvolvimento social e cultural. Para Vygotsky é com a interiorização de instrumentos e sistemas de signos, produzidos culturalmente, que se dá o desenvolvimento cognitivo. (VYGOTSKY, 1988 *apud* MOREIRA, 1999, p.111)

A teoria socio-construtivista de Vygotsky ressalta que cada função mental superior se apresenta em dois instantes no sujeito: primeiramente no plano social ou interpsicológico; e depois no plano individual ou intrapsicológico. Nesse sentido, a interação social seria "o veículo fundamental para a transmissão dinâmica (de inter para intrapessoal) do conhecimento social, histórica e culturalmente construído". (MOREIRA, 1999, p.112).

A interação social assume um papel de destaque, visto que é por meio dela que acontece o intercâmbio de significados, entre a cultura e o indivíduo, contribuindo para que os signos sejam internalizados, e possibilitando que os significados já compartilhados socialmente sejam apropriados pelo sujeito significante. Ela não é estanque em si, é mutável, isto é, se transforma de acordo com o desenvolvimento intelectual.

> Vygotsky, na sua perspectiva do desenvolvimento do pensamento que pode ser qualificada de socioconstrutivista, atribui um papel central à apropriação das ferramentas semióticas fornecidas pela cultura. Isso o conduz a abordar os processos de aprendizagem e de ensino em suas dimensões social e cultural. [...]. A aquisição de conhecimentos é indissociável de um procedimento coletivo de elaboração e de negociação de sentido já que supõe a construção de significações socialmente compartilhadas, repousando sobre bases culturais comuns. (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.377)

Esse processo de significação culminará com o aparecimento das palavras disponíveis na língua falada em sua comunidade, porém o sistema de relações e generalizações contido numa palavra muda ao longo do desenvolvimento. Assim, uma palavra contém, por um lado, um significado socialmente convencionado e compartilhado, relativamente estável, e, por outro, os sentidos individuais que essa palavra assume, pois são frutos das experiências sócio-históricas vividas pelo sujeito em interação com a complexidade crescente das conceituações atingidas.

Na busca pela compreensão da evolução e funcionamento do pensamento, percebemos que atividade (mediadora dos instrumentos) e pensamento estão estritamente ligados e que a linguagem, enquanto instrumento cultural mais importante se estabelecerá como um importante sistema de signos no desenvolvimento cognitivo. Portanto, “[...] se o pensamento tem por função central exercer um controle sobre o desenrolar da atividade, é por meio de atividades sociais que ele se constituiu, interiorizando e transformando as ferramentas semióticas que essas diversas atividades fazem intervir”. (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.369).

Nesta perspectiva, Gauthier e Tardif (2014) complementam que o desenvolvimento social precede o individual; pensamento e linguagens não são redutíveis um ao outro. Inicialmente, no processo de desenvolvimento cognitivo do ser humano, pensamento e linguagem se apresentam separadamente, desse modo temos que, pensamento sem linguagem é a inteligência prática. Conforme a criança, aos poucos, interioriza a linguagem, adquire o pensamento verbal.

Isto posto, para Moreira (1999) o processo de desenvolvimento do pensamento é uma transição da linguagem exterior, para a linguagem interior, com um processo intermediário entre estas, chamado de linguagem egocêntrica, isto é, “o desenvolvimento da linguagem no indivíduo se dá da fala social (linguagem como comunicação), para fala egocêntrica (linguagem como mediadora de ações) e desta para a fala interna”. (MOREIRA, 1999, p. 115).

A linguagem exterior, puramente social, voltada à ação sobre as pessoas ao entorno, assume um papel comunicador. Durante a transição gradual do pensamento, a linguagem egocêntrica, intermediária neste processo de desenvolvimento cognitivo, atua na criança com o objetivo de controlar sua própria atividade. Assim, numa perspectiva individual, a linguagem interior se apresenta como comunicativa. Este processo de interiorização da linguagem culmina no que Vygotsky conceituou como pensamento verbal. Desse modo, “é essa interiorização da linguagem, fonte do pensamento verbal, que vai tornar possível, posteriormente, a emergência de um pensamento conceitual ligado à tomada de consciência da significação simbólica das palavras”. (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p.372).

Após a aquisição da linguagem, reconhecendo o dinamismo entre as esferas interpsicológica para a intrapsicológica, para Gauthier e Tardif (2014), Vygotsky admite a importância do apoio do adulto sobre a aprendizagem da criança, e ressalta a relevância da aprendizagem escolar no desenvolvimento das funções mentais superiores. Com isso, nos apresenta a noção de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), pois percebe que a criança, ao se deparar com problemas mais complexos, consegue resolvê-los com auxílio de um adulto, do que se tivesse que agir sozinha. "Esta zona é definida como a diferença (expressa em unidades de tempo) entre os desempenhos da criança por si própria, e os desempenhos da mesma criança trabalhando em colaboração e com a assistência de um adulto". (IVIC, 2010, p.32).

Há uma relação de dependência mútua entre aprendizagem e desenvolvimento cognitivo. Desta maneira, Gauthier e Tardif (2014) defendem que a aprendizagem deve se estruturar em atividades autênticas, integradas a um contexto social e cultural que as torne significante e sustentam que os saberes são dinâmicos e que as aprendizagens se desenvolvem num clima de ajuda mútua.

2.2 Ensino e aprendizagem em uma perspectiva construtivista

As diferentes concepções de desenvolvimento da cognição e de aprendizagens até aqui abordadas, impactaram as concepções pedagógicas das redes de ensino, das escolas brasileiras e influenciaram os cursos de formação de professores e, consequentemente, sua atuação em sala de aula.

Preocupamo-nos, até aqui, em apresentar como as correntes filosóficas, comportamentalistas e cognitivistas, e alguns de seus representantes, contribuíram para a compreensão do que hoje chamamos de construtivismo e socioconstrutivismo. À vista disso, compartilhamos do princípio que:

> O construtivismo deriva de uma posição filosófica de que nós, como seres humanos, não temos acesso a uma realidade objetiva, ou seja, uma realidade independente da nossa maneira de conhecê-la. Pelo contrário, nós construímos nosso conhecimento de mundo a partir de nossas percepções e experiências que são mediados por nosso conhecimento anterior. (SIMON, 1993, p.5, tradução nossa)

Ao destacar características de algumas vertentes de construtivismo (construtivismo radical e não radical, cognitivo, cultural, social e humano) Valadares (2011, p.55) considera que o construtivismo humano "é um instrumento poderoso que devemos colocar a serviço da aprendizagem dos alunos de ciências", e defende que a teoria da aprendizagem significativa é uma teoria construtivista pois entende que o conhecimento é um processo construtivo e de valorização da estrutura cognitiva prévia de quem aprende. O autor complementa seu estudo enumerando alguns princípios estruturantes do construtivismo humano, considerando que:

> - O conhecimento científico constrói-se através de uma interação complexa entre sujeito e objeto onde nem um nem outro tem uma hegemonia epistemológica.
>
> - Os seres humanos são criadores de significados. [...]
>
> - O objetivo da educação é a construção de significados compartilhados.
>
> - Os significados compartilhados podem ser facilitados pela intervenção ativa de professores bem preparados.
>
> - A produção intelectual, ao mais alto nível é uma construção de significados e uma forma altamente original e criativa de aprendizagem significativa, que deverá servir de ideal à aprendizagem de qualquer indivíduo, que deve procurar caminhar no sentido de uma aprendizagem significativa, autônoma e criativa. (VALADARES, 2011, p.49)

De acordo com Becker (2001),

> Construtivismo significa isto: a ideia de que nada, a rigor, está pronto, acabado, e de que, especificamente, o conhecimento não é dado, em nenhuma instância, como algo terminado [...]. É constituído pela interação do indivíduo com o meio físico e social, com o simbolismo humano, com o mundo das relações sociais; e se constitui por força de sua ação, e não por qualquer dotação prévia, na bagagem hereditária ou no meio, de tal modo que podemos afirmar que antes da ação não há psiquismo nem consciência e, muito menos, pensamento. (BECKER, 2001, p.72)

Neste sentido, surgem críticas às práticas escolares e uma necessidade de repensar as concepções de educação, ensino e aprendizagem. Buscando combater as raízes de um ensino centrado no professor, sob a concepção de educação bancária de Freire (2016), que questiona o ato de educar pautado no depósito, transferência e transmissão de conhecimentos e considerando que "a abordagem tradicional do ensino parte do pressuposto de que a inteligência é uma faculdade que torna o homem capaz de armazenar informações, das mais simples às mais complexas" (LEÃO, 1999, p.190), porém como já destacado, os alunos não são compreendidos como tábulas rasas e sim como sujeitos construtores de seus conhecimentos, assim sendo defenderemos alguns pontos de vista sobre o ensino e a aprendizagem dos estudantes.

O primeiro deles é a importância do professor em manter uma prática reflexiva, almejando uma práxis revolucionária, diante de sua atuação profissional. Compreender que a natureza da prática docente, enquanto uma atividade humana (consciente e adequada a fins), possibilita que nela interfira e a transforme com um certo grau de intencionalidade.

Igualmente importante é clarificar que o construtivismo, não implica, necessariamente, em reduzir o papel do professor diante do processo de ensino e aprendizagem. Pelo contrário, ressalta a importância do docente em apresentar aos alunos situações novas, bem como de estimular procedimentos de pensamentos nos alunos.

Ainda sobre a atuação docente, Gauthier e Tardif (2014, p.378-379) destacam a importância dos professores estabelecerem um ambiente em que é valorizada a ajuda mútua entre os estudantes, pautada na cooperação, diálogo e compartilhamento de ideias, enriquecendo as experiências de ensino. Complementam, ainda, que um professor que consegue: criar uma cultura de participação na sala de aula; instaurar atividades coletivas; estimular a partilha dos conhecimentos; desenvolver habilidades ligadas à colaboração e trabalho em grupo; promover o debate construtivo; possibilitar a negociação de pontos de vista distintos; e buscar o desenvolvimento do discurso crítico dos educandos, permite ao estudante fazer progressos no que se refere às suas aprendizagens.

Entendendo a contribuição que o construtivismo trouxe ao ensino, também é preciso considerar que:

> Embora o construtivismo forneça uma base útil para pensar sobre o aprendizado de matemática nas salas de aula, não nos diz como ensinar matemática. O construtivismo pode contribuir de maneiras importantes para o esforço de reformar o ensino da matemática na sala de aula, no entanto, não estipula um modelo específico. (SIMON, 1993, p.4, tradução nossa)

Cabe ressaltar que uma aprendizagem significativa, para Ausubel, repousa em duas condições: utilização de um material potencialmente significativo e na disposição para aprender dos estudantes. “Uma aprendizagem só pode ser significativa na medida em que tem um sentido para o aluno, permitindo-lhe encontrar respostas para as perguntas que se coloca”. (GAUTHIER; TARDIF, 2014, p. 352).

2.3 Práxis: articulação entre teoria e prática

Acreditamos ser de suma importância que o professor, em seu exercício profissional, aprimore e desenvolva as capacidades de articular seus conhecimentos teóricos com os práticos, advindos de sua experiência docente. Freire (2016, p.196) destaca em sua obra que “[...] não há revolução com *verbalismos*, nem tampouco com *ativismo*, mas com *práxis*, portanto, com *reflexão* e *ação* incidindo sobre as estruturas a serem transformadas”.

Segundo Vázquez (2011, p.221) “toda práxis é atividade, mas nem toda atividade é práxis”, possibilitando uma discussão entre as atividades que são propriamente humanas e as que não ultrapassam o nível meramente natural. Atividades desenvolvidas pelo homem, de natureza biológica ou instintiva, não podem ser consideradas atividades exclusivamente humanas. Portanto,

> A atividade propriamente humana apenas se verifica quando os atos dirigidos a um objeto para transformá-lo se iniciam com um resultado ideal, ou fim, ou termina com um resultado ou produto efetivo, real. (VÁZQUEZ, 2011, p.222)

O caráter consciente que se encontra na atividade do homem, resulta em um produto real, não necessariamente próximo do resultado idealizado, porém destinado a transformação da realidade. “Se o homem vivesse em plena harmonia com a realidade, ou em total conciliação com seu presente, não sentiria a necessidade de negá-los idealmente nem de configurar em sua consciência uma realidade ainda inexistente”. (VÁZQUEZ, 2011, p. 224).

Entendemos que a atividade docente caracteriza-se como práxis na medida em que articula conhecimentos teóricos, adquiridos por meio da formação inicial ou continuada do professor, com conhecimentos da experiência, assimilados durante sua atuação e vivência profissional com objetivo de transformação da sua realidade local.

> Considerando a prática docente como prática social, sistematizada e planejada, esta se realiza cotidianamente com o propósito de mudar o panorama vigente em diferentes locais. Assim, o professor convive com um desafio constante: tentar formar os alunos com o exercício da crítica para a transformação das condições sociais vigentes, com vistas a superar desigualdades e propiciar emancipação social e humana. (LIMA, 2013, p.65)

Compreendemos que a Epistemologia, enquanto teoria do conhecimento, caracteriza-se por investigar a natureza, fonte e validade do conhecimento, bem como se encarrega de questionar, criticar e levantar hipóteses e contradições acerca do conhecimento já consolidado. Já entendemos que a Filosofia diz respeito a um campo de conhecimento que utiliza análises racionais para estudar a existência humana e do saber. Todavia, “a atividade filosófica transforma nossa concepção do mundo, da sociedade ou do homem, mas não modifica – direta e imediatamente – nada real”. (VÁZQUEZ, 2011, p.236).

> No estudo da sociedade capitalista, Marx cria um sistema de entendimento da vida e prática humanas, e das relações dos seres humanos entre si e com a natureza, ao qual denomina de materialismo histórico e dialético. (PIO; CARVALHO; MENDES, 2014, p.05771)

O materialismo histórico e dialético ou filosofia da práxis se consolida, contrapondo-se ao “velho materialismo”, ou seja, às visões idealistas de Hegel bastante expressivas na primeira metade do século XIX, podendo ser caracterizada como uma atividade humana sensível.

> A práxis carrega consigo traços revolucionários, por que existe certa distância entre o que se planeja e o que se concretiza. Esta distância é representada pela realidade social que se modifica e, consequentemente, ajusta as transformações. Como parte de um contexto maior, isto não acontece de maneira isolada, pois a práxis total humana, é racional e por esta razão estará sempre criando e inovando na tentativa de intercompletar a emancipação humana. (LIMA, 2013, p.64)

Reconhecemos que a práxis, pelo seu caráter histórico e social, pode apresentar-se sob algumas formas fundamentais: produtiva, artística, experimental e política. Esta última receberá maior ênfase, pois é o tipo de práxis em quem o homem atua sobre si mesmo, o homem é sujeito e objeto desta. Vázquez (2011) reitera que

> Essa atividade prática do homem oferece diversas modalidades. Dentro dela caem os diversos atos orientados para sua transformação como ser social e, por isso, destinados a mudar suas relações econômicas, políticas e sociais. Na medida em que sua atividade toma por objeto não um indivíduo isolado, mas, sim, um grupo ou classes sociais e inclusive a sociedade inteira, pode ser denominada práxis social. (VÁZQUEZ, 2011, p.232)

Freire (2016) que manteve sempre uma postura em defesa da emancipação das classes populares, vislumbrando uma educação libertadora, reconhece o caráter significativo da práxis revolucionária e chama a atenção para a díade ação e reflexão. Na concepção freireana as lideranças das massas oprimidas não devem negar às classes populares a práxis verdadeira, em que os homens superam o estado de objetos e se assumem como sujeitos da história, e também não devem encará-los como meros fazedores e executores de suas vontades, mas sim como sujeitos capazes de refletir sobre seu próprio fazer. “O que não se pode realizar, na práxis revolucionária, é a divisão absurda entre a práxis da liderança e a das massas oprimidas, de forma que a destas fosse a de apenas seguir as determinações da liderança”. (FREIRE, 2016, p. 197).

Salienta, ainda, que por possuírem interesses opostos (que fazeres antagônicos) resta à práxis revolucionária se opor à práxis das elites dominadoras, nesta perspectiva os homens são sujeitos e objetos que atuam na transformação de suas realidades, aproximando-se do que anteriormente definimos como uma das formas fundamentais da práxis: a práxis política. Para Gauthier e Tardif (2014, p.298) “Toda a pedagogia da libertação de Freire visa essencialmente favorecer o rápido desenvolvimento da consciência crítica e a aquisição das habilidades ligadas à práxis libertadora”. Carvalho (2017, p.440) destaca “[...] a importância de permitir, incentivar e propiciar aos homens, não como privilégio, mas como seu direito universal, a ação de proferir, de dizer a palavra verdadeira”.

Ainda que, erroneamente, consideremos a atividade teórica oposta à atividade prática, estas admitem uma inter-relação, existe uma complementariedade e autonomia relativa entre elas, visto que, “Na verdade, a história da teoria (do saber humano em seu conjunto) e da práxis (das atividades práticas do homem) são abstrações de uma única e verdadeira história: a história humana”. (VÁZQUEZ, 2011, p.259).

Compreende-se que “A práxis é mais que prática, ou sua unidade com a teoria” (MAYORAL, 2007, p.335) possuem uma relação simbiótica, dialética e não ideológica. “[...] tanto a prática como a teoria, não se anulam pela primazia de uma sobre a outra; percebem-se numa autonomia relativa, negando-se as pretensões de absoluta autonomia que as leva a separação”. (LUCAS, 1992, p.6-7).

De acordo com Vázquez (2011), a atividade teórica só existe por e em relação com a prática, destinada à produção de fins (antecipação ideal do que ainda não existe, mas que deseja que exista) como de conhecimentos. Distingue-se da atividade prática uma vez que seu objeto e matéria-prima são as sensações ou percepções, conceitos, teorias, representações ou hipóteses que possuem uma existência ideal (objeto psíquico). Assim sendo, o fim imediato da atividade teórica é elaborar ou transformar idealmente – e não realmente – essa matéria-prima.

Por outro lado, “a atividade prática que se manifesta no trabalho humano, na criação artística ou na práxis revolucionária é uma atividade adequada a fins, cujo comprimento exige – como mostramos – certa atividade cognoscitiva”. (VÁZQUEZ, 2011, p.227). O autor complementa, ressaltando que a atividade prática é real, objetiva ou material em que o objeto é a natureza, a sociedade ou os homens reais. O fim é a transformação real, objetiva do mundo natural ou social destinada à satisfação humana. E o resultado é uma nova realidade que só existe pelo homem para o homem, como ser social.

Diante do exposto, apesar de percebermos uma distinção entre as atividades teórica e prática

> Constata-se uma elevação do ideal ao real em pensamento estreitamente vinculado à pratica, não entendida como ação subjetiva, individual e sim como atividade material, objetiva, social, histórica e transformadora, portanto, constata-se um enriquecimento da teoria pela práxis, uma ação orientada pela teoria. Nesse sentido, Marx evidencia à pratica seu caráter de fundamento da teoria na medida em que esta se encontra vinculada às necessidades práticas do homem social. (PIO; CARVALHO; MENDES, 2014, p.05773)

Entendemos que na busca de uma educação libertadora, o professor pode considerar que sua atividade profissional tem finalidades e que seu objeto, matéria-prima (alunos) são sujeitos de direitos e que sua atuação vislumbra uma transformação intelectual-histórico-social destes. Em uma perspectiva crítica o exercício da docência requer um contínuo processo de ação e reflexão por parte do educador e uma práxis revolucionária que objetiva emancipação e transformação do cenário real o mais próximo possível do cenário ideal, antecipado antes de suas ações efetivas. “[...] práxis nessa filosofia é em si educativa, pois ela é operada por sujeitos que na prática refletem teoricamente para sempre transformar.” (SOARES; JUNIOR, 2012, p.9).

Carvalho (2017, p.431) salienta que a pedagogia proposta por Paulo Freire “[...] trata-se de uma proposta educativa forjada pela e na práxis vivida, social e historicamente e que requer a inserção crítica das massas em sua realidade, em busca de sua transformação”. Assim compreendemos a importância da práxis orientar as práticas escolares cotidianas, pois

> É na práxis e pela práxis que o homem enquanto ser social transforma seu meio e se autotransforma, se recria, ou seja, na luta pela sobrevivência o homem transforma suas condições sociais da vida que é, ao mesmo tempo, autocriação e criação coletiva de si mesmo. (PIO; CARVALHO; MENDES, 2014, p.05772)

2.4 Trajetória hipotética de aprendizagem

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) é parte constituinte do que Simon (1993) intitulou de Ciclo de Ensino de Matemática. Este foi desenvolvido por meio de análises de um experimento de ensino construtivista, que possuía como uma de suas finalidades “analisar situações em que uma perspectiva teórica construtivista se depara com as realidades de alunos em uma sala de aula real.” (SIMON, 1993, p.13, tradução nossa).

Este experimento de ensino contou com a participação de 26 futuros professores do ensino fundamental, em que as aulas foram filmadas e depois transcritas e contou também com anotações de campo dos professores/pesquisadores e com um caderno reflexivo em que eram registradas anotações após as aulas e planejamentos. Este experimento contava com uma metodologia que buscava levantar hipóteses do que os alunos podiam aprender e também buscar maneiras de como alcançar tais aprendizagens.

Neste contexto a THA é concebida como uma ferramenta de investigação, bem como de planejamento, objetivando promover mudanças em como se ensina matemática, por intermédio da teoria construtivista. Para Simon (1993) é necessário fazer uma discussão acerca da concepção construtivista que orienta seu trabalho, pois devido à diversidade de perspectivas epistemológicas existentes entre o “construtivismo radical” e o “construtivismo social”, em que se debate se o desenvolvimento do conhecimento é visto fundamentalmente como um processo cognitivo ou social, o autor ressalta que:

> A questão não é se a dimensão social ou cognitiva é primária, mas o que se pode aprender combinando análises a partir dessas duas perspectivas. Faço uma analogia com as teorias da luz dos físicos. Nem a teoria das partículas nem a teoria das ondas da luz são suficientes para caracterizar os dados dos físicos. No entanto, cada construto teórico deu uma contribuição significativa à pesquisa baseada na teoria; considerar a luz uma partícula e considerar a luz uma onda foram úteis. A coordenação das descobertas derivadas de cada perspectiva levou a avanços no campo. Da mesma forma, parece útil coordenar análises baseadas em aspectos psicológicos (cognitivos) e perspectivas sociológicas para entender o desenvolvimento do conhecimento nas salas de aula. (SIMON, 1993, p.6-7, tradução nossa)

Percebemos que não há uma prevalência do campo cognitivo sobre o social, e sim uma visão de articulação e colaboração entre ambos, buscando por aprendizagens que resultam deste movimento. O autor acrescenta que “As normas sociais incluem as expectativas que os membros da comunidade têm do professor e dos alunos, concepções do que significa fazer matemática nessa comunidade e as formas pelas quais a validade matemática é estabelecida” (SIMON, 1993, p.7, tradução nossa) sugerindo um entendimento de que o ambiente escolar compartilha de saberes relativos à atuação do professor de matemática e, de qual matemática pode e/ou é proposta, discutida, ensinada e aprendida no contexto em que se encontram.

> A análise psicológica da aprendizagem da Matemática em sala de aula foca-se no conhecimento individual sobre a Matemática, seu entendimento para o outro e seu senso de funcionamento na aula de Matemática. A análise sociológica toma como ponto de partida o conhecimento e as normas sociais da sala de aula. As “normas sociais” referem-se àquilo que está entendido como a construção do conhecimento com efetiva participação dos alunos nas aulas de Matemática. Incluem também as expectativas que os membros da comunidade têm sobre os professores e alunos, os conceitos dos meios utilizados para a elaboração da aula de Matemática e o caminho para validar a aula de Matemática. (PIRES, 2009, p.152)

Concebe que a articulação entre as dimensões psicológicas e sociais, permite ao professor compreender como ocorre o desenvolvimento do conhecimento na sala de aula.

> Quando os alunos começam a se engajar nas atividades planejadas, o professor se comunica e observa os alunos, o que o leva a novas compreensões das concepções dos alunos. O ambiente de aprendizagem evolui como resultado da interação entre o professor e os alunos à medida que eles se envolvem no conteúdo matemático. (SIMON, 1993, p.32, tradução nossa).

Portanto, a articulação entre esses dois domínios, cognitivo e sociológico, indicam que “a aprendizagem é definida como um processo de construção individual e social mediados por professores com a concepção de um trabalho estruturado na qual se entende a aprendizagem dos alunos”. (ROSENBAUM, 2010, p.26).

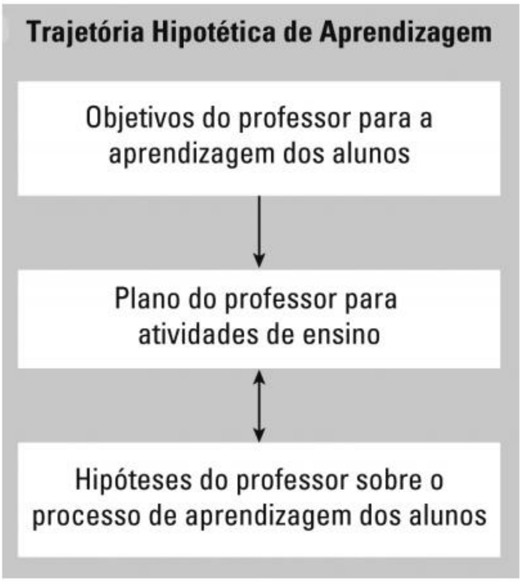
2.4.1 Elementos fundamentais da THA

De acordo com Simon (1993), a trajetória hipotética de aprendizagem permite ao professor elaborar seu próprio projeto de decisões para a aprendizagem de seus estudantes, recorrendo as melhores suposições sobre como ocorre a aprendizagem dos mesmos.

> Uso o termo "trajetória hipotética de aprendizagem" para me referir à previsão do professor sobre o caminho pelo qual o aprendizado pode prosseguir. É hipotético, porque a trajetória de aprendizado real não é conhecida com antecedência. Caracteriza uma tendência esperada. A aprendizagem de cada aluno prossegue ao longo de caminhos idiossincráticos, embora muitas vezes semelhantes. Isso pressupõe que a aprendizagem dos indivíduos tenha alguma regularidade (cf.Steffe, Von Glasserfiel, Richards e Cobb, 1983), a comunidade da sala de aula restringe a atividade matemática, com frequência, de maneiras previsíveis, em que muitos dos alunos de uma mesma classe possam beneficiar-se da mesma tarefa matemática. Uma trajetória hipotética de aprendizagem fornece ao professor uma justificativa para a escolha de um projeto instrucional específico. Tomo minhas decisões com base na minha melhor suposição de como o aprendizado pode ocorrer. (SIMON, 1993, p.35, tradução nossa)

Como podemos observar na Figura 7, há três aspectos fundamentais na composição de uma trajetória hipotética de aprendizagem: os objetivos de aprendizagem estabelecidos pelo professor que orientarão a THA; as atividades matemáticas de aprendizagem; e o processamento hipotético de aprendizagem dos estudantes.

Figura 7 - Trajetória Hipotética de Aprendizagem



Fonte**:** PIRES (2009, p.157)[7]

[7] Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/2136/1660>Acesso em: 07 jan. 2020.

Devemos destacar que a criação e modificação contínua da THA são elementos centrais neste modelo de ensino. Simon (1993) evidencia que

> [...] o desenvolvimento de um processo hipotético de aprendizado e o desenvolvimento das atividades de aprendizado possuem uma relação simbiótica; a geração de ideias para atividades de aprendizagem depende das hipóteses do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem dos alunos; a geração adicional de hipóteses de desenvolvimento conceitual do aluno depende da natureza das atividades previstas. (SIMON, 1993, p.36, tradução nossa)

O conhecimento do professor de Matemática, na THA merece uma atenção especial, pois o autor ressalta que

> Além do conhecimento do professor em matemática e suas hipóteses sobre o entendimento dos alunos, várias áreas do conhecimento do professor entram em jogo, incluindo as teorias sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, conhecimento da aprendizagem em relação à área específica do conteúdo matemático (decorrente da literatura de pesquisa ou da própria experiência do professor com os alunos) e conhecimento de representações matemáticas, materiais e atividades. (SIMON, 1993, p. 32, tradução nossa)

Estes domínios do conhecimento do professor permitem que ele defina quais serão os objetivos de aprendizagem dos estudantes, desenvolva e planeje as atividades matemáticas mais adequadas aos alunos, assumindo uma teoria sobre ensino e aprendizagem; e avalie a THA e a aprendizagem dos estudantes diante das hipóteses previamente levantadas.

Esta proposta de inter-relação cíclica entre os pensamentos, conhecimentos, tomada de decisão e atividades de ensino do professor decorrentes da análise desse experimento de ensino com abordagem construtivista permitiu que Simon (1993) pudesse desenvolver o Ciclo de Ensino de Matemática.

2.4.2 Ciclo de Ensino de Matemática

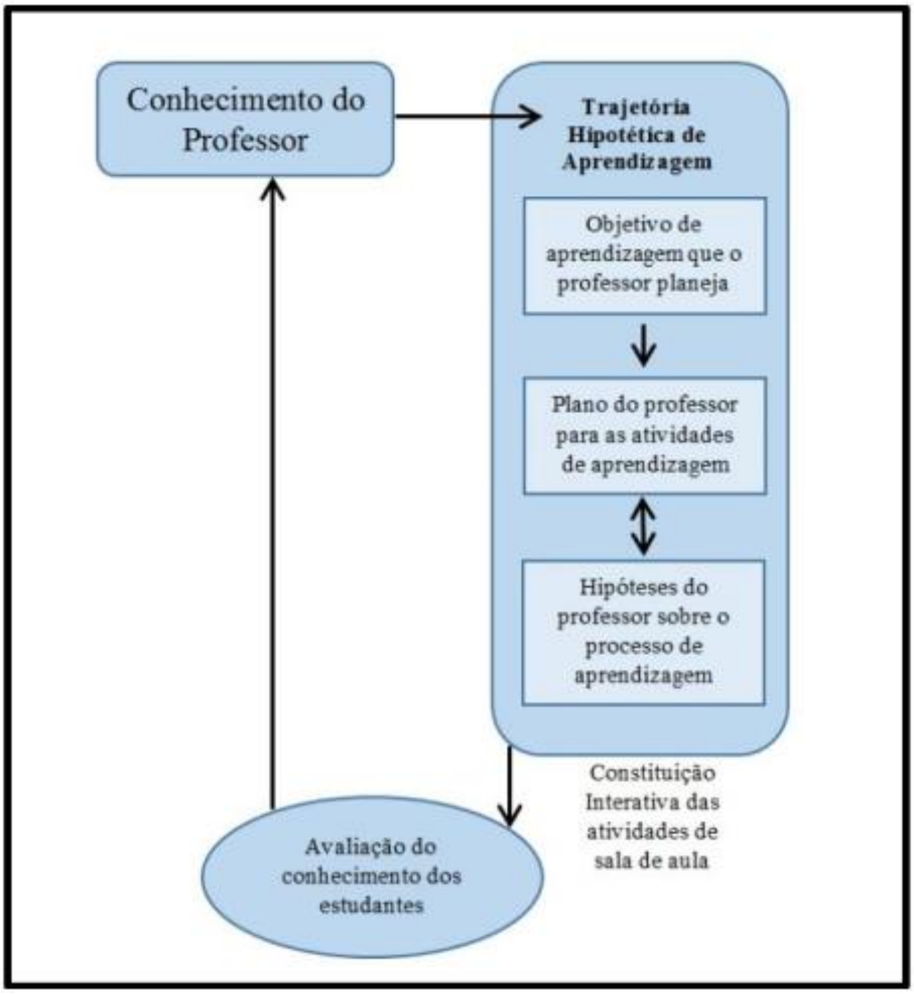
Os objetivos de aprendizagem definidos pelo professor orientam a direção que a THA tomará e o termo "hipóteses" utilizado pelo autor faz referência ao fato de que o professor não possui conhecimentos claros e precisos sobre os conhecimentos dos estudantes.

> A noção de uma trajetória hipotética de aprendizagem não pretende sugerir que o professor sempre busque um objetivo de cada vez ou que apenas uma trajetória é considerada. Pelo contrário, pretende sublinhar a importância de ter um objetivo e uma justificativa para as decisões de ensino e a natureza hipotética de tal pensamento. (SIMON, 1993, p.35, tradução nossa)

Deste modo, o ciclo de ensino de matemática é uma articulação entre as tomadas de decisões feitas pelo professor decorrente de seus conhecimentos e de suas hipóteses sobre a aprendizagem dos alunos, das atividades matemáticas projetadas de acordo com determinados objetivos de aprendizagem alinhada em uma perspectiva de aprendizagem construtivista e a constituição interativa das atividades em sala de aula, que permitem alterações e revisões constantes da compreensão dos estudantes sobre o tema de ensino e possíveis modificações significativas nos conhecimentos do professor.

A Figura 8, ilustra esta proposta de ensino que “enfatiza a importante interação entre os planos do professor e a constituição de atividades da sala de aula pelos professores/alunos.” (SIMON, 1993, p.41-42, tradução nossa).

Figura 8 - Ciclo de Ensino de Matemática (Abreviado)



Fonte: SIMON (1993, p.55)[8]

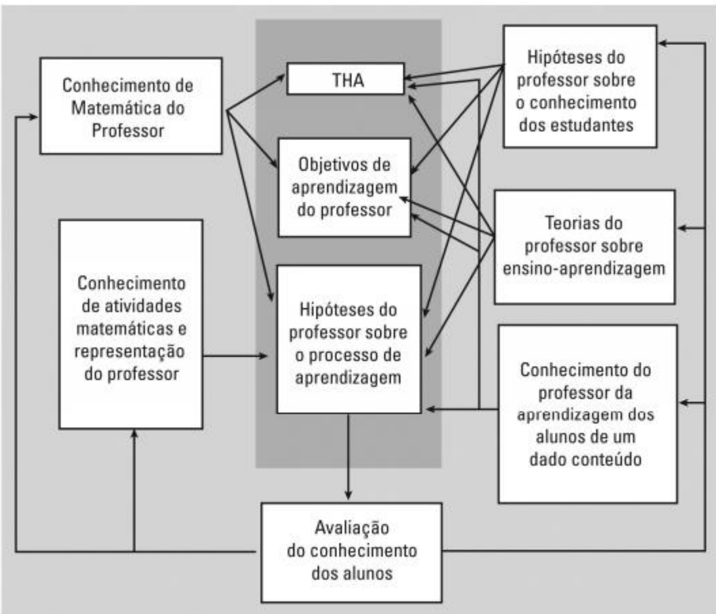
[8] Disponível em: <https://eric.ed.gov/?id=ED364406> Acesso em: 07 jan. 2020.

No que concerne à tomada de decisões do professor, SIMON (1993) destaca quatro temas que considera particularmente importantes.

> - O pensamento/entendimento dos alunos é considerado e recebe um lugar central na concepção e implementação da instrução. Compreender o pensamento dos alunos é um processo contínuo de coleta de dados e geração de hipóteses.
> - O conhecimento do professor evolui simultaneamente com o crescimento dos alunos. Enquanto os alunos aprendem matemática, o professor está aprendendo sobre o ensino de matemática, aprendendo e ensinando sobre o pensamento matemático de seus alunos.
> - O planejamento da instrução é visto como parte integrante na elaboração de uma trajetória hipotética de aprendizagem. Essa visão reconhece e valoriza os objetivos do professor para a instrução e a importância de hipóteses sobre os processos de aprendizagem dos alunos (ideias que espero ter demonstrado não estar em conflito com o construtivismo).
> - O conhecimento em constante mudança do professor, cria mudanças contínuas na trajetória hipotética de aprendizagem do professor. (SIMON, 1993, p. 42-43, tradução nossa)

A relação entre os diversos domínios do conhecimento do professor, a THA e as interações com os alunos, e atentando-se especificamente aos temas 2 e 4 acima apresentados, a Figura 9 explicita como ocorre a articulação e as mudanças nos conhecimentos do professor e na THA, decorrentes da constituição interativa das atividades de sala de aula.

Figura 9 -Articulação entre THA e domínios de conhecimentos do professor



Fonte: PIRES (2009, p.157)[9]

[9] Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/2136/1660>Acesso em: 07 jan. 2020.

O entendimento sobre este ciclo de ensino de Matemática analisando a avaliação dos conhecimentos dos estudantes, de caráter formativo, pois não necessariamente ocorre ao final da trajetória hipotética de aprendizagem, ou seja, pode acontecer ao longo da intervenção planejada pelo professor. As possíveis mudanças, anteriormente citadas, que podem ocorrer durante a constituição interativa das atividades de sala de aula, permitem uma reflexão por parte do docente podendo resultar em novas concepções e criações de THA ou até mesmo alterações na que está em análise, pois

> [...] as ideias do professor sobre como os estudantes agiriam hipoteticamente na THA se transformam ao passo que ele nota como os estudantes estão desenvolvendo a atividade, o que pode fazer com que o professor recrie sua THA, com novas perspectivas para uma próxima atividade. (OLIVEIRA; FRIAS; OMODEI, 2014, p.5)

2.5 Teoria da Aprendizagem Significativa

Os primeiros estudos sobre aprendizagem significativa surgiram nas décadas de 60 e 70. A Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) possui uma abordagem cognitivista–construtivista valorizando o que os alunos já sabem e com ênfase na interação cognitiva, isto é, em como os conhecimentos novos relacionam-se com os conhecimentos prévios na estrutura cognitiva. Essa relação entre os conhecimentos prévios e novos deve acontecer de forma não arbitrária (saberes quaisquer) e não literal (ao pé da letra), com aquilo que o aprendiz já sabe. Portanto,

> Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p.viii)

Quando Ausubel diz “aquilo que o aprendiz já sabe”, refere-se a conhecer a estrutura cognitiva do aprendiz; ao citar “descubra o que ele sabe” diz respeito a averiguar os conhecimentos preexistentes na estrutura cognitiva; e ao afirmar “baseie nisso os seus ensinamentos” concerne em adequar os conhecimentos prévios relevantes, dos aprendizes, utilizando recursos e princípios que facilitem a aprendizagem significativa.

Na perspectiva de Ausubel, existem duas condições necessárias, que devem ser atendidas, para que ocorra uma aprendizagem significativa.

> A aprendizagem significativa pressupõe que:
>
> a) o material a ser aprendido seja potencialmente significativo para o aprendiz, ou seja, relacionável a sua estrutura de conhecimento de forma não-arbitrária e não-literal (substantiva);

> b) o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar o novo material de maneira substantiva e não-arbitrária a sua estrutura cognitiva. (MOREIRA, 2001, p.23)

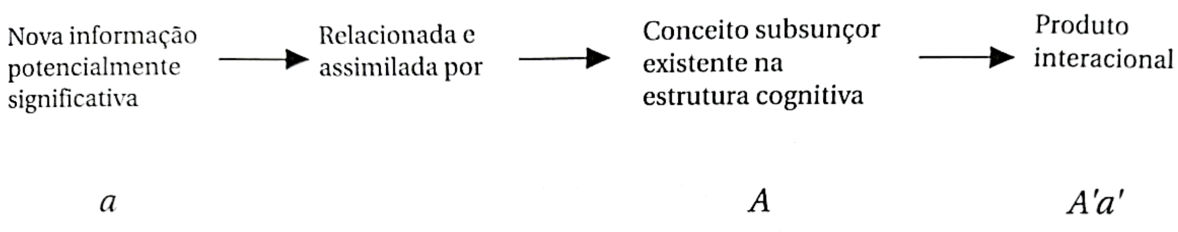
Aprendizagem significativa consiste em uma aprendizagem com compreensão tanto em sua natureza lógica, quanto em sua natureza psicológica. Possui um significado lógico para relacionar (substantiva e não arbitrária) com ideias correspondentes e relevantes já preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz; e têm significado psicológico, pois apresenta um relacionamento do material logicamente significativo com a estrutura cognitiva do indivíduo que aprende.

No que concerne à disposição para aprender, não importa o quão significativo é o material para aprendizagem, se o aprendiz deseja apenas memorizá-lo de forma arbitrária e literal, resultará em uma aprendizagem mecânica.

> Não se trata exatamente de motivação, ou de gostar da matéria. Por alguma razão, o sujeito que aprende deve se predispor a relacionar (diferenciando e integrando) interativamente os novos conhecimentos à sua estrutura cognitiva prévia, modificando-a, enriquecendo-a, elaborando-a e dando significados a esses conhecimentos. (MOREIRA, 2011, p.25)

A interação que acontece, entre novos conhecimentos e os conhecimentos preexistentes, depende de ancoradouros, chamados de subsunçores, que se encontram na estrutura cognitiva do aprendiz, como ilustra a Figura 10 abaixo.

Figura 10 - Processo de interação na perspectiva da aprendizagem significativa.



Fonte: MOREIRA (2017, p.69)

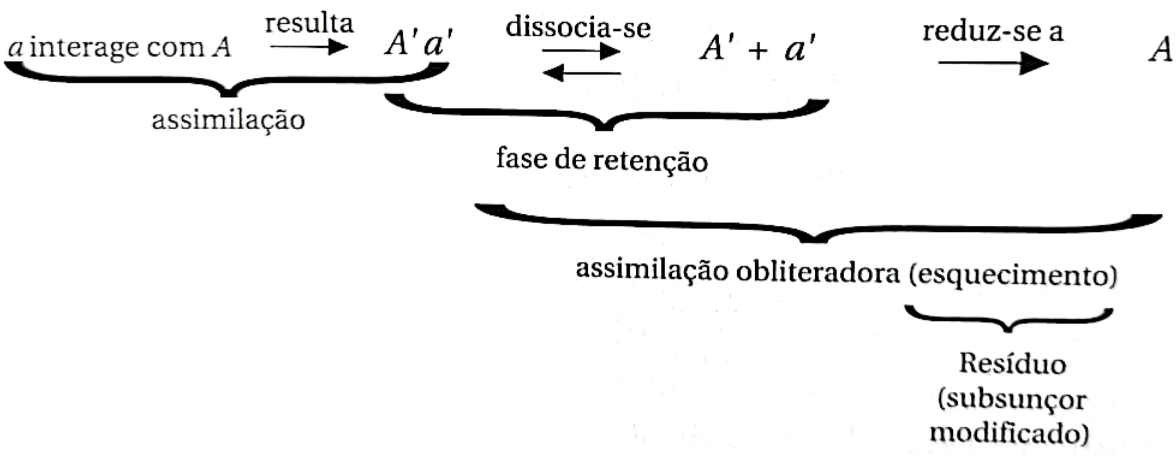
> O subsunçor é, portanto, um conhecimento estabelecido na estrutura cognitiva do sujeito que aprende e que permite, por interação, dar significado a outros conhecimentos. [...] O subsunçor pode ser também uma concepção, um construto, uma proposição, uma representação, um modelo, enfim, um conhecimento prévio especificamente relevante para a aprendizagem significativa de determinados novos conhecimentos. (MOREIRA, 2011, p.18)

Há situações de ensino em que se verifica que os estudantes não possuem subsunçores adequados, para servirem de ancoradouro para os novos conhecimentos. Diante disso, Ausubel propôs o uso de Organizadores Prévios, uma estratégia que tem por finalidade manipular a estrutura cognitiva, preenchendo esse vazio existente entre os conhecimentos prévios e os novos. "Organizadores prévios são materiais introdutórios, apresentados antes do próprio material a ser aprendido, porém, em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade do que esse material". (MOREIRA, 2006, p.23).

> Em outras palavras, organizadores prévios podem ser usados para suprir a deficiência de subsunçores ou para mostrar a relacionalidade e a discriminabilidade entre novos conhecimentos e conhecimentos já existentes, ou seja, subsunções. (MOREIRA, 2011, p.30-31)

Para explicar o processo de aquisição e organização de significados na estrutura cognitiva, de como o conhecimento se organiza na mente do aprendiz, Ausubel incorpora em sua teoria o Princípio da Assimilação (Figura 11). "No processo de assimilação, mesmo após o aparecimento dos novos significados, a relação entre as ideias-âncoras e as assimiladas permanece na estrutura cognitiva". (MOREIRA, 2006, p.28-29).

Figura 11 - Princípio da assimilação



Fonte: MOREIRA (2017, p.69)

> Portanto, a assimilação é um processo que ocorre quando um conceito ou proposição *a*, potencialmente significativo, é assimilado sob uma ideia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, como um exemplo, extensão, elaboração ou qualificação do mesmo. Tal como sugerido no diagrama, não só a nova informação *a*, mas também o conceito subsunçor *A*, com qual ela se relaciona, são modificados pela interação. Além disso, a' e A' permanecem relacionados como co-participantes de uma nova unidade *a'* e *A'* que nada mais é do que o subsunçor modificado. (MOREIRA, 2001, p.25)

Ausubel destaca o papel do esquecimento na aquisição e retenção dos conhecimentos na estrutura cognitiva. Ressalta que a aprendizagem significativa não é aquela que o aprendiz nunca esquece, afirma que "o esquecimento é uma consequência natural da aprendizagem significativa" (MOREIRA, 2011, p.39), admitindo que parte do processo de assimilação caracteriza-se pela indissociabilidade do novo conhecimento com o conhecimento prévio.

Durante um período temporal idiossincrático para cada sujeito, chamado período de retenção, a ideia-âncora e o novo conhecimento admitem uma relação de dissociação entre si. Passando esse período, inicia-se a assimilação obliteradora, um segundo estágio da subsunção (retenção do conhecimento na estrutura cognitiva do que aprende). Neste período, os subsunçores, ou seja, ideias-âncoras, juntamente com as novas informações gradualmente não podem ser mais concebidos em entidades individuais, com isso *a'A'* reduzem-se a '*A'*.

> [...] a ocorrência da assimilação obliteradora como uma continuação natural da assimilação não significa que o subsunçor volta a sua forma original. O resíduo da assimilação obliteradora é *A'*, o membro mais estável do produto *A'a'*, ou seja, o subsunçor modificado. (MOREIRA, 2001, p.27)

Os subsunçores não possuem uma natureza estática, sendo assim sofrem modificações, ganham novos significados e capacitam-se em ofertar novas condições de ancoradouro para novas informações, efetivando um processo cíclico de ancoragem, retenção e assimilação de novos conhecimentos. Dois processos que ocorrem simultaneamente e necessários para construção de novos conhecimentos na estrutura cognitiva do aprendiz, são nomeados, na TAS, como diferenciação progressiva e reconciliação integrativa ou integradora. Segundo Moreira (2001),

> a) diferenciação progressiva é o princípio pelo qual o assunto deve ser programado de forma que as ideias mais gerais e inclusivas da disciplina sejam apresentadas antes e, progressivamente diferenciadas, introduzindo os detalhes específicos necessários [...];
>
> b) reconciliação integrativa é o princípio pelo qual a programação do material instrucional deve ser feita para esporar relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças significativas, reconciliando discrepâncias reais ou aparentes. (MOREIRA, 2001, p.30)

Assim sendo, a concepção ausubeliana sobre a aprendizagem dos indivíduos perpassam por esses conceitos que estruturam a Teoria da Aprendizagem Significativa, que em sua perspectiva cognitivista, discute como é o processo de aquisição de novos conhecimentos pelos aprendizes, que auxiliará nas discussões futuras dessa pesquisa.

3. CAPÍTULO 2 – DOCUMENTOS OFICIAIS E PROPOSTA DE THA

Apresentaremos neste capítulo as diretrizes e orientações constantes em documentos oficiais que orientam a estrutura do currículo na rede pública de ensino do Estado de São Paulo, assim como uma discussão crítica destes pressupostos. Abordaremos a correspondência existente entre a trajetória hipotética de aprendizagem e uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS) encerrando com a proposta de THA para o ensino de funções polinomiais no 9º Ano do ensino fundamental.

3.1 BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) constitui-se de um documento normatizador, em que a equipe organizadora propunha que sua construção aconteceria em um regime de colaboração entre Estados, Municípios e sociedade civil, ainda que, por muitas vezes, seja questionada a metodologia adotada na condução das consultas públicas realizadas. Destaca alguns propósitos que orientam a educação no país, como a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva e o compromisso com a formação humana integral, porém as diversas versões divulgadas deste documento, até a publicação do texto final, evidenciam muitas modificações realizadas por seus idealizadores.

O documento compromete-se em definir um conjunto progressivo e orgânico de aprendizagens essenciais, que os estudantes brasileiros devem desenvolver no decorrer de seu processo de escolarização básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

O texto da BNCC explicita uma preocupação em superar a fragmentação entre as políticas educacionais, assim como busca fortalecer o regime de colaboração entre as três esferas do governo (União, Estados e Municípios) e balizar a qualidade da educação ofertada no território brasileiro.

É um documento com características bem prescritivas e que deveria servir de referência para a formulação dos currículos das redes de ensino e das propostas pedagógicas escolares, antigo projeto político-pedagógico (PPP), contudo não foi elaborado satisfatoriamente junto às comunidades escolares, cabendo a cada qual sua interpretação. “Essa política de alinhamento (objetivo-conteúdo-teste) gera um estreitamento curricular, pois secundariza dimensões mais amplas da formação humana e não considera de fato a influência do perfil socioeconômico dos indivíduos na aprendizagem”. (RODRIGUES; PEREIRA; MOHR, 2020, p.5).

A BNCC preconiza um ensino pautado em competências e habilidades em que competência é associada a conceitos e procedimentos que são responsáveis por mobilizar os conhecimentos e a habilidade, de natureza prática, cognitiva e socioemocional, está relacionada aos valores e atitudes para resolver demandas complexas da vida cotidiana, ao pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p.8). Diante disso, temos que de acordo com Silva (2019) segundo Hirata (1994) "o modelo de competências é originário do discurso empresarial, que se firma em meados da década de 80, tendo sido retomado por economistas e sociólogos, na França, ao longo dos anos 90, com vistas a compor um repertório para orientar a formação dos trabalhadores". (SILVA, 2019, p.125).

Embora, a BNCC esteja "[...] estruturada de modo a explicitar as competências que devem ser desenvolvidas ao longo de toda Educação Básica e em cada etapa de escolaridade, como expressão dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento de todos os estudantes" (BRASIL, 2017, p. 23) percebemos, assim como a autora Orrú (2018, p.144), que "A BNCC é um modelo homogeneizador de ensino, de avaliação, de currículo, de professorado e de escola que dita o ritmo em que cada aluno deve aprender".

A autora destaca a função da avaliação processual neste cenário, em que as concepções de avaliação são modificadas e há uma vinculação direta da "qualidade da educação" ofertada pelas redes de ensino com os desempenhos dos estudantes em avaliações de larga escala, Orrú (2018) considera que

> [...] a avaliação processual perderá seu real significado, uma vez que avaliações e exames nacionais se intensificarão para compor os indicadores de qualidade relacionados a BNCC e seus pressupostos. Os professores e os alunos ficarão reféns dos exames anteriormente aplicados, isto porque se debruçarão por horas, dias e meses para estudá-los com a finalidade de se treinarem com testes simulados para conquistarem um bom ranqueamento na posterior avaliação promovida pelo MEC. (ORRÚ, 2018, p.147).

Para a BNCC as práticas pedagógicas devem assegurar o desenvolvimento das dez competências gerais, durante as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), em que este tratamento didático ofertado possa ser articulado ao desenvolvimento das habilidades, à construção de conhecimentos e à formação de valores e atitudes nos estudantes. Diante disso, a BNCC e o currículo das redes de ensino são documentos complementares que objetivam assegurar as aprendizagens essenciais aos estudantes na etapa específica que se encontram da Educação Básica.

Segundo Marsiglia et al. (2017)

> Os pressupostos que estruturam a BNCC ressaltam a centralidade do documento na diversidade, no pluralismo e na democracia (burguesa), uma visão de mundo pertencente ao discurso multiculturalista - uma das expressões da pós-modernidade mais presentes nos currículos escolares – discurso que na aparência defende a inclusão, a democracia social, o respeito à diversidade cultural, a solidariedade etc., porém, na prática, tem como função a legitimação ideológica do capitalismo contemporâneo. (MARSIGLIA; et al, 2017, p.117)

O currículo teria a função de adequar as proposições da BNCC às realidades locais, contexto das escolas e de seus alunos, sem perder de vista a autonomia existente nas unidades escolares e nos sistemas ou redes de ensino. Porém,

> [...] entendemos que a BNCC é praticamente um documento "normativo" para a construção do currículo, alimentando enfoques prescritivos associados ao produtivismo e ao eficientíssimo do mundo contemporâneo comprometido com as avaliações. (ORNELLAS; SILVA, 2019, p.322-323).

Ao discorrer sobre a área da Matemática, ainda utilizando-se de uma abordagem prescritiva, a BNCC destaca que esta deve buscar garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas e complementa que

> A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. (BRASIL, 2017, p. 263)

Acrescenta ainda que "[...] é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática". (BRASIL, 2017, p.263).

No que se refere à Matemática, a BNCC mantendo seu caráter prescritivo explicita o conjunto de ideias fundamentais (equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação) que compõem seus diversos campos, assim como propõe uma divisão da área em cinco unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística) que, de acordo com a base, se vinculam entre si e buscam orientar a formulação de habilidades a serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental.

Destinaremos ênfase especial à compreensão da unidade temática Álgebra, por ser uma discussão relevante a esse estudo. Desse modo, a BNCC entende que a álgebra

> [...] tem por finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2017, p.268)

Prossegue ressaltando a necessidade de possibilitar aos estudantes que, por meio do estudo da Matemática, estabeleçam

> [...] leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p.268)

Equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade são as ideias matemáticas fundamentais associadas à álgebra, e buscando o desenvolvimento das habilidades previstas no Ensino Fundamental – Anos Finais o documento destaca a indissociabilidade entre a aprendizagem de Matemática e a apreensão de significados.

Embora o documento expresse que “Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares”(BRASIL, 2017, p.96) esta breve passagem no documento que evidencia a relação existente entre as demais áreas de conhecimento e a Matemática, não nos permitiu identificar uma discussão elaborada sobre o tema e, segundo as autoras Mozena e Ostermann (2016, p.331) “a interdisciplinaridade está completamente ausente e inviabilizada, embora ela seja instituída em lei pelas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (2010) e as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2012) como base da organização curricular”.

Dessa maneira entendemos que temos um documento normativo, extremamente prescritivo e que demonstra uma maior atenção na definição das aprendizagens essenciais voltadas aos estudantes brasileiros e, também, busca exercer a função secundária de servir de referência para a construção dos currículos locais, anunciando uma preocupação em considerar a autonomia das instituições escolares, sistemas e redes de ensino, bem como mostra-se atento para que as especificidades das escolas e alunos sejam apreciadas e respeitadas.

Reconhecemos que se trata de um documento que divide opiniões, no entanto percebemos que a BNCC possui princípios e objetivos anunciados e defendidos em seu escopo, que não são percebidos na prática educativa atual sobretudo pelos professores.

O documento pode ser compreendido como uma proposta direta para interferir e homogeneizar os currículos e práticas escolares de um país com contextos sócio-histórico-econômico distintos. A base nacional comum curricular pode, possivelmente, contribuir para acentuar as desigualdades sociais e educacionais dos alunos das escolas públicas, em que são privilegiados métodos de avaliação em larga escala para "verificar" a qualidade da educação ofertada, porém desconsidera as características idiossincráticas das redes e dos alunos do Brasil, podendo propiciar uma retomada da abordagem tecnicista da educação, voltada para a testagem dos educandos.

3.2 Currículo Paulista

Desde a promulgação da Lei Federal nº 5.692, de agosto de 1971[10], atualmente revogada, é de responsabilidade dos Estados elaborar as propostas curriculares das escolas públicas e particulares de seus territórios, assim como a definição dos conteúdos que devem ser assegurados a seus respectivos estudantes.

Com a elaboração e homologação da BNCC da Educação Infantil e Ensino Fundamental, em dezembro de 2017, houve a necessidades de os Estados iniciarem uma discussão e construção e, no caso de São Paulo, reelaboração de seu currículo.

O Currículo Paulista esforçou-se para que sua elaboração fosse realizada em regime de colaboração e contou com três versões preliminares, que contemplaram: etapas de apreciação da BNCC e dos currículos das diferentes redes municipais e privadas, assim como o da própria rede estadual; e seminários regionais para professores e gestores educacionais das redes pública e privada em 611 cidades paulistas.

As contribuições ofertadas nestes processos possibilitaram o envio de uma versão do documento ao Conselho Estadual de Educação, que sugeriu algumas revisões, que após serem atendidas, referendou em junho de 2019 a versão final do documento, sem grandes discussões e resistência dos profissionais da educação e dos professores da rede estadual.

Como esperado o Currículo Paulista se assemelha à BNCC no que se refere aos propósitos educacionais. Mostra-se preocupado em assegurar uma educação de qualidade a todos os estudantes paulistas, porém percebemos uma ênfase expressiva apenas no esclarecimento das aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver, assim como

[10]LEI Nº 5.692, DE 11 DE AGOSTO DE 1971 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1971); LDB (1971) EMENTA: Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-norma-pl.html>. Acesso em: 17 abr. 2020.

anuncia uma necessidade de superar as desigualdades educacionais com foco na equidade, destaca e recomenda aspectos que os planejamentos precisam se atentar.

> Segundo a perspectiva defendida pelo Currículo Paulista, a equidade diz respeito à inclusão de todos os estudantes nas escolas e à garantia de seu direito a educação pública e de qualidade [...] Diz respeito, ainda, à necessidade de respeitar a diversidade cultural, a socioeconômica, a étnico-racial, a de gênero e as socioculturais presentes no território estadual. (SÃO PAULO, 2019, p.26-27)

Há um compromisso explícito no documento com a educação integral, compreendida pelo mesmo como sendo o desenvolvimento dos estudantes em suas dimensões intelectual, física, socioemocional e cultural. Partilhando dos ideais da BNCC sobre a formação integral dos estudantes e que busca a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, porém observa-se que as avaliações externas promovidas pela rede estadual não demonstram uma preocupação significativa com tais princípios. O currículo reitera a ideia de que todos podem aprender Matemática e que se faz necessário investir no desenvolvimento da autoestima e autoconfiança de seus estudantes.

> No Currículo Paulista, os conhecimentos matemáticos privilegiam tanto as especulações teóricas que integram o universo de objetos específicos da Matemática, quanto as aplicações práticas dos conhecimentos matemáticos no cotidiano ou nas demais áreas de conhecimento. (SÃO PAULO, 2019, p.303)

O currículo reelaborado pelo Estado de São Paulo também evidencia o ensino da rede por competências e habilidades apropriando-se das 10 competências gerais da BNCC, assim como das oito competências específicas de Matemática para o ensino fundamental. Ressalta aspectos de especulações teóricas ou aplicações práticas da Matemática, inclusive as relacionadas ao entendimento de uma situação cotidiana ou associada à outra área do conhecimento, porém não aprofunda a discussão de como o professor pode promover tais articulações.

O documento busca possibilitar o desenvolvimento de competências específicas apresentando "habilidades que permitem a articulação horizontal e vertical dentro da própria área da Matemática e com as demais áreas de conhecimento". (SÃO PAULO, 2019, p.304). Aborda como compromisso no ensino fundamental o desenvolvimento do letramento matemático dos estudantes, entendido como

> [...] as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2017, p.264)

O currículo proposto utiliza-se do agrupamento das habilidades da área da Matemática em cinco unidades temáticas, assim como a BNCC, em que destacaremos a unidade temática Álgebra que carrega consigo, de acordo com os princípios do Currículo Paulista, a expressão do pensamento matemático.

O documento apresenta que uma das bases do pensamento algébrico é o raciocínio proporcional, e que em situações que envolvem proporcionalidade, identificar a relação entre as grandezas envolvidas é essencial. De acordo com o currículo, o desenvolvimento da Álgebra no Ensino Fundamental – Anos Finais é uma retomada e aprofundamento do que já foi estudado nos Anos Iniciais, esperando que os estudantes possam ser capazes de

> [...] compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade; investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica, estabelecer a variação entre duas grandezas. Para tanto, é necessário que os estudantes estabeleçam conexões entre incógnita e equação e variável e função. (SÃO PAULO, 2019, p.320).

Considera também a necessidade dos estudantes em expressar suas respostas utilizando diversos registros e linguagens, transpondo um texto em língua materna para a linguagem matemática, em situações-problema ou em sentenças matemáticas específicas.

Por fim, quando explicita o organizador curricular do presente documento, define objetos de conhecimento como sendo um caminho pelo qual uma ou mais habilidades podem mobilizar os conhecimentos constantes nas unidades temáticas, ora assumindo a função de conceito, ora de procedimento. As habilidades são entendidas como as diretrizes do que deve ser ensinado em relação aos objetos de conhecimento.

Apesar de ser um documento aprovado recentemente pela Secretaria Estadual de Educação, e de ser difícil avaliar seu impacto na rede pública, o seu alinhamento expressivo com a BNCC nos leva a considerar que com a falta crônica de investimentos observada nas redes públicas do país, levará as mesmas contradições e dificuldades observadas na BNCC, possivelmente contribuindo para um aumento da desigualdade nas aprendizagens de estudantes da rede pública em relação à rede privada.

3.3 Unidade de ensino potencialmente significativa e a THA

Apesar da atuação profissional dos professores estar cada vez mais direcionada pelas redes de ensino, currículos prescritivos e avaliações externas periódicas, tais obstáculos, segundo Sacristán e Gomez (2009) podem se assumir como componentes do meio natural em que os docentes trabalham. Evidencia que

> Em alguma medida o professor/a pode decidir como será sua atuação dentro das paredes da aula e um pouco menos dentro da escola, mas os parâmetros gerais de sua profissão estão definidos antes que ele questione como atuar, se é que o faz. (SACRISTÁN; GOMEZ, 2009, p.206).

Quando Sacristán e Gomez (2009) discutem o desenvolvimento do currículo baseado na escola, destaca que esta perspectiva:

> [...] deixa de lado a esperança nos grandes projetos cuidadosamente planejados fora da prática por agentes especializados, para enfatizar o valor de tentativas mais modestas, mas próximas às condições das escolas e desenvolvidas em colaboração com elas e seus professores/as. (SACRISTÁN; GOMEZ, 2009, p.212)

Entendemos a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) como um instrumento adotado pelo professor que permite o desenvolvimento do currículo baseado na escola.

Outorga ao professor definir um projeto de decisões sobre o ensino de determinado tema da matemática, em uma perspectiva construtivista. É uma ferramenta de investigação e de planejamento, que visa promover mudanças no ensino da matemática em que os objetivos do professor; as atividades de ensino e o processamento hipotético de aprendizagem são elementos fundamentais na elaboração da THA.

A tendência esperada, o caminho pelo qual a aprendizagem pode ser encaminhada, ou seja, as hipóteses que o professor levanta sobre as aprendizagens dos estudantes para a construção desta THA, foram subsidiadas pela Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel.

A importância em conhecer a estrutura cognitiva, assim como os conhecimentos prévios dos estudantes em considerar a interação entre os novos conhecimentos e os conhecimentos já existentes (subsunçores) na estrutura cognitiva como essencial para promoção uma aprendizagem significativa e a necessidade de atender as duas condições destacadas por Ausubel, para ocorrência de uma aprendizagem significativa (disposição para aprender dos alunos e o uso de um material potencialmente significativo) possibilitaram pensar as atividades matemáticas e os objetivos de aprendizagens que o professor/pesquisador destaca na THA a ser elaborada.

Segundo Moreira (2001) uma das condições para ocorrência de uma aprendizagem significativa na concepção de Ausubel, é que “[...] o material a ser aprendido seja potencialmente significativo para o aprendiz, ou seja, relacionável a sua estrutura de conhecimento de forma não-arbitrária e não-literal (substantiva)”. Sobre o material potencialmente significativo Moreira (2011) acrescenta que

> [...] o significado está nas pessoas, não nas coisas. Então, não há, por exemplo, livro significativo ou aula significativa; no entanto, livros, aulas, materiais instrucionais de um modo geral, podem ser potencialmente significativos e para isso devem ter significado lógico (ter estrutura, organização, exemplos, linguagem adequada, enfim, serem aprendíveis) e os sujeitos devem ter conhecimentos prévios adequados para dar significado aos conhecimentos veiculados por esses materiais. (MOREIRA, 2011, p.10)

Sendo assim, as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) são sequências de ensino fundamentadas teoricamente, comumente na perspectiva da TAS, e se apresentam como unidades de ensino potencialmente facilitadoras de aprendizagem significativa para temas específicos de áreas de conhecimento diversas.

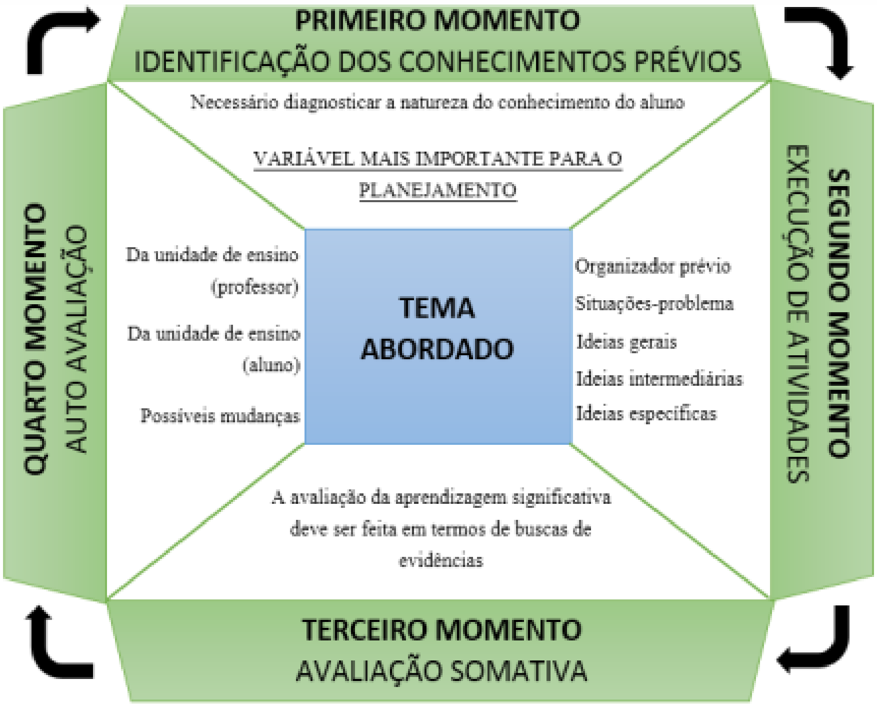
Podemos destacar alguns princípios orientadores das UEPS, que corroboram com os ideais desta pesquisa, de acordo com o que Moreira (2011) expõe:

- O conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem significativa (Ausubel);
- é o aluno que decide se quer aprender significativamente determinado conhecimento (Ausubel; Gowin);
- organizadores prévios mostram a relacionabilidade entre novos conhecimentos e conhecimentos prévios;
- situações-problema podem funcionar como organizadores prévios;
- a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora e a consolidação devem ser levadas em conta na organização do ensino (Ausubel);
- a avaliação da aprendizagem significativa deve ser feita em termos de busca de evidências; a aprendizagem significativa é progressiva;
- o papel do professor é o de provedor de situações-problema, cuidadosamente selecionadas, de organizador do ensino e mediador da captação de significados de parte do aluno (Vergnaud; Gowin);
- a interação social e a linguagem são fundamentais para a captação de significados (Vygotsky; Gowin);

- um episódio de ensino envolve uma relação triádica entre aluno, docente e materiais educativos, cujo objetivo é levar o aluno a captar e compartilhar significados que são aceitos no contexto da matéria de ensino (Gowin);
- a aprendizagem deve ser significativa e crítica, não mecânica (Moreira);
- a aprendizagem significativa crítica é estimulada pela busca de respostas (questionamento) ao invés de memorização de respostas conhecidas, pelo uso da diversidade de materiais e estratégias instrucionais, pelo abandono da narrativa em favor de um ensino centrado no aluno (Moreira). (MOREIRA, 2011, p.2-3)

De acordo com os princípios das UEPS acima explicitados, ao se adotar um tema de ensino específico, a estrutura de uma unidade de ensino potencialmente significativa, ou seja, seus momentos de desenvolvimento, os recursos instrucionais utilizados e as estratégias pedagógicas que a integram podem ser entendidos, observando a Figura 12.

Figura 12 -Modelo de unidade de ensino potencialmente significativa



Fonte: BRUM; DA SILVA, 2015, p. 7.

Os itens abaixo são partes constituintes destes momentos destacados na Figura 12. Moreira (2011) apresenta alguns aspectos sequenciais (passos), isto é, procedimentos que devem ser adotados ao se construir uma UEPS.

> 1. Definição do tópico específico a ser abordado;
> 2. Criação/ proposição de situações que levem o estudante a externar seus conhecimentos prévios relevantes para a aprendizagem significativa;
> 3. Proposição de situações-problema, em nível introdutório;
> 4. Apresentação do conhecimento a ser ensinado/aprendido;
> 5. Retomada de aspectos gerais e estruturantes;
> 6. Proposição de situação problema, em nível mais alto de complexidade;
> 7. Discussão do tema ensinado considerando a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa;
> 8. Avaliação da aprendizagem da UEPS (avaliação somativa individual);
> 9. Avaliação da UEPS. (Adaptação de MOREIRA, 2011, p.3-4)

No primeiro momento prevalece a definição do tópico específico a ser abordado e proposição de situações que façam os alunos revelarem seus conhecimentos prévios sobre o tópico de estudo.

No segundo momento, considerando a diferenciação progressiva e reconciliação integradora, o tema é apresentado desde um nível mais introdutório até alcançar um nível mais alto de complexidade.

O terceiro momento compreende a avaliação das aprendizagens dos estudantes, considerando buscar evidências de aprendizagens significativas seja por atividades individuais, como atividades coletivas, privilegiando questões abertas para que os estudantes possam mostrar suas compreensões acerca do tema discutido.

Finalizando com o quarto momento, que se respalda na avaliação por parte do professor e alunos da unidade de ensino, recursos e estratégias adotadas ao longo da unidade de ensino. “A unidade de ensino não é uma metodologia estanque, engessada, mas passível de reformulações e compete ao professor mudar, quando necessário, na apresentação de um tema em sala de aula”. (BRUM; DA SILVA, 2015, p.7-8).

Isto posto, pelo fato da THA ter suas hipóteses sobre as aprendizagens dos estudantes fortemente fundamentada na TAS, percebemos em sua proposição para o ensino de funções polinomiais muitos destes elementos das UEPS, pois se faz necessário que as atividades matemáticas propostas, as situações-problema, as estratégias e recursos de ensino utilizados aproximem-se consideravelmente de um material potencialmente significativo.

A THA proposta (Apêndice B, p.284) buscará: utilizar materiais e estratégias de ensino diversificadas e que privilegie e estimule o questionamento, o diálogo e a crítica em relação à respostas prontas; caminhos para que os alunos possam expor seus conhecimentos prévios; oferecer um nível crescente de complexidade no tema de estudo e; apropriar-se da reconciliação integradora e a diferenciação progressiva para discussão do tópico a ser ensinado.

3.4 Proposta de THA

O Currículo Paulista e a BNCC estabelecem para o Ensino Fundamental – Anos Finais, mais especificamente para estudantes do 9º Ano desta etapa da Educação Básica os seguintes objetos de conhecimento, com sua respectiva habilidade associada:

> Funções: representações numérica, algébrica e gráfica – (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
>
> Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais – (EF09MA08) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais, e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais, e de outras áreas. (SÃO PAULO, 2019, p.358-359)

Sendo assim, o tópico de estudo dos estudantes para a trajetória hipotética de aprendizagem encontra-se definido, será funções polinomiais e grandezas direta e inversamente proporcionais. Como parte integrante do primeiro momento da UEPS, a THA contará com quatro atividades matemáticas que objetivam mapear a estrutura cognitiva e os conhecimentos prévios dos estudantes.

A *primeira atividade* permitirá ao professor compreender se os estudantes reconhecem a ideia de equação, representam situações-problema por meio de equações do 1º grau e resolvem equações do 1º grau. Também, possibilitará ao professor verificar os conhecimentos prévios (subsunçores) considerados relevantes para ancorar as novas aprendizagens de função polinomial do 1º grau.

A *segunda atividade* buscará por subsunçores que sirvam de ancoradouro para as aprendizagens referentes à função polinomial de 2º grau. Preocupa-se em diagnosticar se os alunos resolvem corretamente equações incompletas e completas do 2º grau.

Em seguida, a *terceira atividade* da THA possibilitará ao professor verificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o plano cartesiano, investigando se os alunos localizam pontos no sistema de coordenadas cartesianas e identificam corretamente pares ordenados de pontos no plano cartesiano.

Por fim, *quarta atividade* matemática explorará dois aspectos: primeiramente o conhecimento prévio dos estudantes acerca do tema funções e concomitantemente vai expor o tema de estudo em nível introdutório.

A observação da quarta atividade permitirá ao docente verificar se os estudantes conseguem analisar as situações apresentadas e compreendem se expressam ou não, funções. Se representam corretamente a lei de formação de funções a partir de situações-problema, assim como, simultaneamente, propõe uma introdução ao tema a ser ensinado em um nível mais elementar.

Ao término de cada atividade proposta até aqui, o professor retomará na aula seguinte o assunto apresentado, utilizando uma estratégia expositivo-dialogada, discutindo os objetivos de cada tarefa matemática, bem como as estratégias que os estudantes poderiam ter adotado para encontrarem a solução e a apresentação da resolução esperada para cada questão aos alunos.

No segundo momento da UEPS, já iniciado pela atividade quatro da THA, temos a proposta de utilização do primeiro experimento de Física, denominado *Esticando a Mola*, em que consiste apresentar aos estudantes, por meio de outra área de conhecimento, um contexto para aquele tópico de estudo, em um nível de maior complexidade.

> O ensino da Matemática que viabiliza a contextualização pode retirar o aluno da passividade no processo educativo e levá-lo a descobrir a importância da sua formação para sua vida e para o mundo. [...] A saber, a contextualização dos conteúdos de ensino pode provocar aprendizagens significantes e mobilizar o aluno a estabelecer relações de reciprocidade entre ele e o conhecimento em construção. (ALVES, TATSCH, 2017, p.90)

O roteiro experimental que será utilizado apresentará um nível crescente de complexidade, em que os estudantes poderão captar os significados, pois estarão em permanente interação social com seus colegas e professor. Após a realização da atividade experimental pelos estudantes, haverá uma discussão coletiva mediada pelo docente, utilizando a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora para orientar os diálogos.

Privilegiando ainda este segundo momento da UEPS, a THA apresentará a *quinta atividade* que discutirá o tema de ensino grandezas direta e inversamente proporcionais e a *sexta atividade* que abordará os gráficos de funções polinomiais do 1º e 2º graus, seguidas de aulas expositivo-dialogadas, para compreensão das mesmas, recorrendo à diferenciação progressiva e reconciliação integradora, se necessário.

Será proposto em seguida, o segundo experimento de Física, intitulado *Queda Livre*, consistindo em: discutir aspectos de natureza da ciência sobre o experimento; buscar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o experimento de queda livre e os conceitos físicos envolvidos como gravidade e força; e discussões do comportamento gráfico de um movimento de queda livre e o significado dos parâmetros da função polinomial de 2º grau associada ao movimento.

O terceiro momento da UEPS, destinado à avaliação formativa (durante o percurso realizado pelos estudantes, sobre o tópico estudado) e avaliação somativa individual (previamente avisada aos estudantes, individual e que permite ao estudante expor sua compreensão e organização hierárquica do assunto estudado) na THA é o momento em que acontece a avaliação do conhecimento dos estudantes denotada na aplicação da última atividade da THA designada *avaliação final.*

Na avaliação final, os estudantes, individualmente e sem consultar seus registros, demonstrarão clareza ou não dos tópicos de ensino discutidos, bem como as compreensões e fragilidades remanescentes dos temas ensinados.

Assim o momento em que o ciclo de ensino de Matemática da THA, concomitante ao quarto momento da UEPS, se destina à avaliação da sequência de ensino proposto, permitirá uma reflexão analítica se foi constatado evidências de aprendizagens significativas nos estudantes, durante toda a trajetória proposta, tal como quais poderiam ser as alterações possíveis e necessárias para que a THA possa ter seu potencial de ensino elevado.

Apresentamos a seguir, assim como no Apêndice B (p.284), as atividades e roteiro experimental da THA proposta aos estudantes.

Atividades da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA)

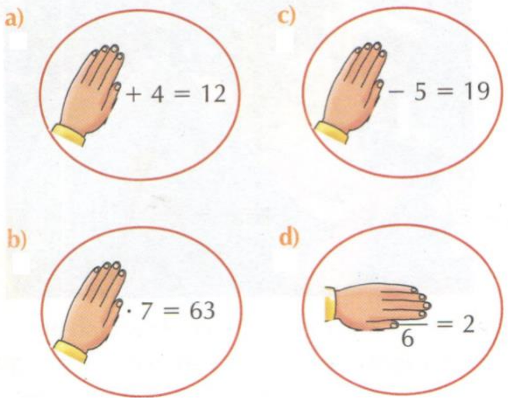
NOMES: ____ GRUPO _____ 9º Ano ______

ATIVIDADE – EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Objetivo Específico: Representar situações por meio de equações de 1º grau; compreender a ideia de equação; resolver equações do 1º grau.

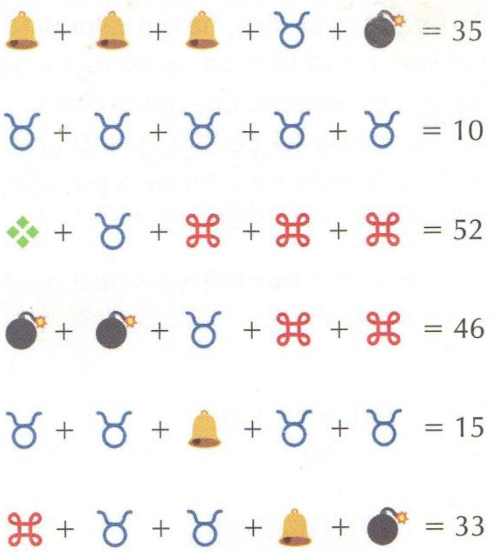
QUESTÃO 1

Descubra os números "escondidos" pelas mãos.



QUESTÃO 2

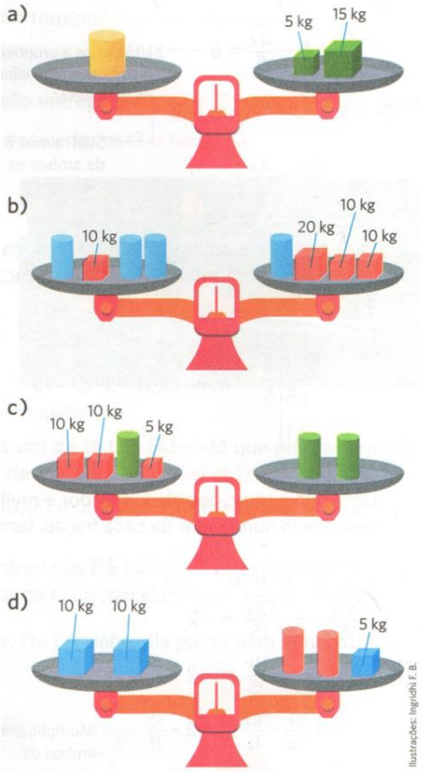
(CPII-RJ) Observe as expressões abaixo:



Quanto vale cada um dos desenhos dessas somas?

QUESTÃO 3

As balanças a seguir estão em equilíbrio. Determine a massa do cilindro de cada item escrevendo e resolvendo no caderno uma equação na qual x represente a massa de cada cilindro.



QUESTÃO 4

Resolva as equações.

a) $x + 2 = 10$

b) $x - 6 = -8$

c) $3x - 21 = 0$

d) $6 + x = 6{,}4$

e) $0{,}5x - 9 = 1{,}5$

f) $4x + 3 = -19$

g) $5x + 2 = 2x - 1$

h) $6 - 3x = -10 - 4x$

i) $2(3x - 5) = 14$

j) $\dfrac{2x - 1}{5} = 3$

NOMES: ____ **GRUPO** _____ **9º Ano** ______

ATIVIDADE – EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Objetivo Específico: Resolver equações incompletas do 2º grau; Utilizar a fórmula de Bhaskara na resolução de equações completas do 2º grau.

QUESTÃO 1

Encontre os valores reais de *z* tais que:

a) $z^2 - 7z = 0$

b) $2z^2 - 16z = 0$

c) $5z^2 + 20z = 0$

d) $-2z^2 - 42z = 0$

QUESTÃO 2

Encontre os valores reais de *x* tais que:

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $x^2 + 13x = 0$

c) $6x^2 - 54x = 0$

d) $8x^2 + 8x = 0$

QUESTÃO 3

Resolva estas equações ($y \in \mathbb{R}$):

a) $y^2 - 121 = 0$

b) $2y^2 - 98 = 0$

c) $2y^2 = -8$

d) $4y^2 + 100 = 0$

QUESTÃO 4

Resolva mentalmente ou usando a fórmula de Bhaskara:

a) $x^2 - 20x + 75 = 0$

b) $x^2 - 2x + 2 = 0$

c) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

d) $x^2 - 15x + 26 = 0$

e) $x^2 + 8x - 33 = 0$

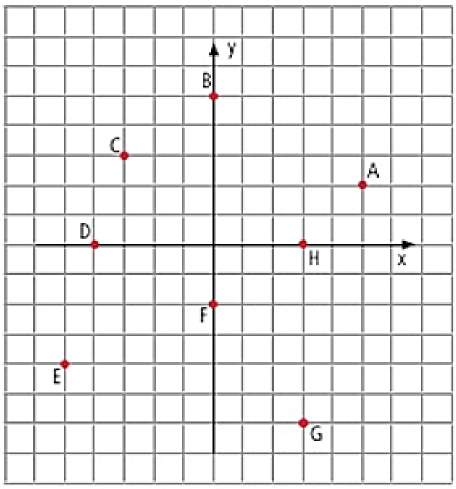
NOMES: ____ **GRUPO** _____ **9º Ano** ______

ATIVIDADE – PLANO CARTESIANO

Objetivo Específico: Localizar pontos no plano cartesiano; Identificar corretamente os pares ordenados de pontos no plano cartesiano;

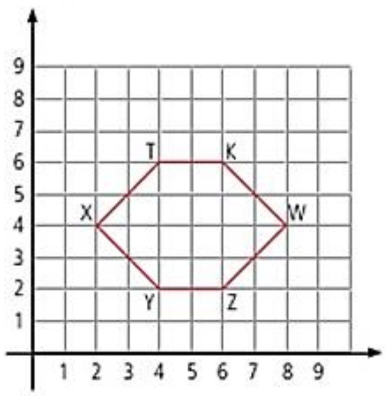
QUESTÃO 1

Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano.



QUESTÃO 2

O hexágono representado no plano cartesiano possui seus vértices denominados por: X, Y, Z, W, K e T.



Quais são as coordenadas do vértice W desse hexágono?

a) (8, 4)

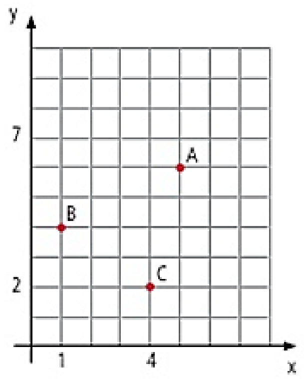
b) (3, 2)

c) (6, 0)

d) (0, 4)

QUESTÃO 3

(Prova Brasil) Observe a figura:



As coordenadas de A, B e C, respectivamente, no gráfico?

a) (1, 4), (5, 6) e (4, 2)

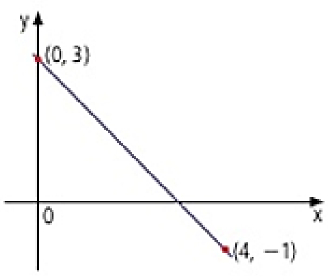
b) (4, 1), (6, 5) e (2, 4)

c) (5, 6), (1, 4) e (4, 2)

d) (6, 5), (4, 1) e (2, 4)

QUESTÃO 4

Observe o gráfico abaixo:



As coordenadas do ponto que intercepta o eixo das ordenadas é:

a) (4, −1)

b) (0, 4)

c) (0, 3)

d) (3, 4)

NOMES: ____ **GRUPO** _____ **9º Ano** ______

ATIVIDADE – IDEIA DE FUNÇÃO, LEI DE FORMAÇÃO DA FUNÇÃO, VARIÁVEIS

Objetivo Específico: Analisar as situações apresentadas e verificar se expressam funções; Representar a lei de formação de funções;

QUESTÃO 1

Alessandra, técnica em informática, presta serviço para uma empresa. Ela recebe R$ 50,00 por hora trabalhada.

A tabela abaixo expressa o valor que Alessandra receberá em função da quantidade de horas trabalhadas.

Quantidade de horas trabalhadas	1	2	3	4
Valor recebido (em R$)	50	100		

a) Calcule quanto Alessandra receberá se trabalhar 14 horas para essa empresa.

b) Calcule a quantidade de horas que ela trabalhou se recebeu da empresa R$ 1.500,00.

c) Podemos dizer que o ganho de Alessandra é função do número de horas trabalhadas?

d) Escreva a lei dessa função.

QUESTÃO 2

Renato comprou uma impressora a jato de tinta para imprimir panfletos de propaganda. Veja, na tabela a seguir, o número de panfletos que esse equipamento imprime de acordo com o tempo.

Intervalo de tempo (em minuto)	Número de panfletos impressos
2	36
4	72
6	108
8	144
10	180

a) Quantos panfletos o equipamento de Renato imprime por minuto?

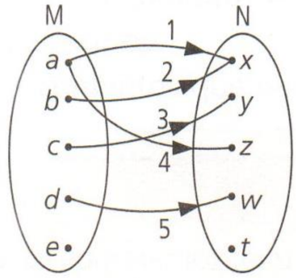
b) O número de panfletos impressos (n) é função do tempo (t) em minutos?

c) Escreva uma lei que relacione n com t.

d) Em meia hora, quantos panfletos são impressos?

QUESTÃO 3

Considere o diagrama abaixo:



Para que seja uma função de M em N, basta:

a) apagar a seta **1** e retirar o elemento *t*.

b) apagar as setas **1** e **4** e retirar o elemento *e*.

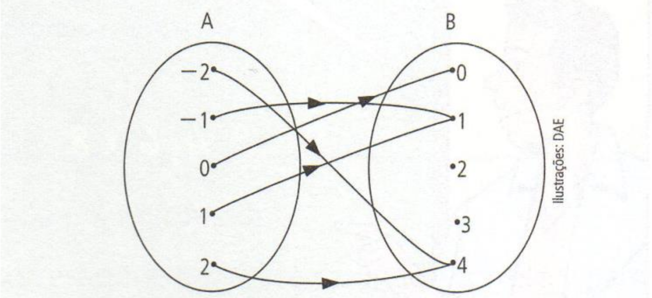
c) retirar os elementos *e* e *t*.

d) apagar a seta **4** e retirar o elemento *e*.

e) apagar a seta **2** e retirar o elemento *e*.

QUESTÃO 4

Observe o diagrama e responda às questões no caderno.



a) A todo número *x* tomado em A corresponde um único número *y* em B?

b) Esse diagrama ilustra uma função de A em B?

c) Escreva a expressão algébrica que liga as variáveis *x* e *y*.

d) Escreva os pares ordenados (*x*; *y*) dessa função.

NOMES: ____ GRUPO _____ 9º Ano ______

ATIVIDADE – EXPERIMENTO ESTICANDO A MOLA

Objetivo Específico: Estabelecer critérios coletivamente, para compreender a ideia de proporcionalidade; utilizar diferentes estratégias para explorar as relações entre grandezas; calcular a constante de proporcionalidade K (constante elástica da mola); relacionar o comportamento gráfico (reta) a uma situação de relação de proporcionalidade direta entre grandezas; compreender as variáveis e os erros experimentais como integrantes do processo de construção do conhecimento científico;

INTRODUÇÃO

O que é uma mola?

Uma mola é um objeto que pode ser deformado por uma força e que volta a sua forma original quando essa força é removida.

Existem molas de todos os tipos, mas provavelmente a mais familiar é a mola de metal helicoidal. Molas são partes essenciais de quase todos dispositivos mecânicos moderadamente complexos; da caneta esferográfica aos motores de carros de corrida.

Ao estudar molas e elasticidade, o físico do século 17 Robert Hooke notou que a curva de tensão *vs* deformação para muitos materiais tinha uma região de comportamento. A partir de agora vocês farão alguns procedimentos e responderá algumas questões para discussão deste comportamento de uma mola.

MATERIAIS

- Suporte;
- Régua;
- Mola metálica;
- Arruelas;
- Calculadora.

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Inicie separando as arruelas por tamanho e preencha as colunas da tabela de massas. (Dica: para encontrar o valor da massa em quilogramas, divida o valor medido em gramas, por 1000).

TABELA DE MASSAS		
	Gramas (g)	Quilogramas (Kg)
ARRUELA **GG**		
ARRUELA **G**		
ARRUELA **M**		
ARRUELA **P**		

Agora, monte o suporte e pendure a régua e a mola do seu kit experimental, como na ilustração.

Vamos preencher a tabela de distensões da mola. Primeiramente, meça a distensão da mola sem massa (x_0) e coloque na tabela abaixo.

TABELA DE DISTENSÕES DA MOLA METÁLICA			
	Centímetro (cm)	Metros (m)	Notação Científica (10^{-2})
x_0			
x_1			
x_2			
x_3			
x_4			
x_5			

Em seguida, coloque a arruela GG e anote o novo valor de distensão da mola (x_1) na tabela. Coloque a arruela G e anote novamente o valor distendido pela mola metálica (x_2). Repita esse procedimento com todas as arruelas. (Dica: para encontrar o valor da distensão da mola em metros, divida o valor medido em centímetros, por 100).

QUESTÕES

1. O grupo percebeu uma relação de dependência entre os valores da massa e da distensão da mola? Se sim, qual?

2. Se há uma relação de dependência entre os valores de massa e distensões da mola, essa relação o grupo considera direta ou inversamente proporcional?

3. Preencha a tabela abaixo e encontre o par ordenado, distensão da mola (x_0, x_1, x_2, x_3, ...) e força elástica ($m_0 \cdot g$, $m_1 \cdot g$, $m_2 \cdot g$, ...). Use $g \cong 9{,}8 m/s^2$

	Distensões da mola (x)(em metros)	Força Elástica (y) (em Newton)	Par Ordenado (x, y) (em notação científica)
MEDIDA 0 (SEM MASSA)			
MEDIDA 1 (Massa 1)			
MEDIDA 2 (Massas 1 e 2)			
MEDIDA 3 (Massas 1, 2 e 3)			
MEDIDA 4 (Massas 1, 2, 3 e 4)			

4. Construam um plano cartesiano, com os eixos das abscissas e ordenadas, localize os pontos da tabela do item anterior, e responda:

a. É possível traçar uma reta por todos os pontos neste gráfico?

b. A reta seria a melhor representação funcional destes pontos? Por quê?

5. Utilizando a expressão $K_n = \frac{m_n \cdot g}{x_n}$, calcule o valor da constante elástica da mola metálica de seu grupo e discuta os resultados com seus colegas e professor.

6. Deixem suas impressões sobre a atividade proposta, dificuldades, elogios e críticas são bem vindos.

NOMES: ____ GRUPO _____ 9º Ano ______

ATIVIDADE – RELAÇÕES DE PROPORCIONALIDADE DIRETA E INVERSA

Objetivo Específico: Compreender a ideia de proporcionalidade; expressar situações e problemas em linguagem algébrica; aplicar as noções de proporcionalidade em diferentes contextos.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 7
GRANDEZAS PROPORCIONAIS: ESTUDO FUNCIONAL, SIGNIFICADOS E CONTEXTOS

VOCÊ APRENDEU?

1. Discuta com seus colegas a seguinte situação: Paulo foi à feira e encontrou ofertas de maçãs:

Em sua opinião, a oferta das 10 maçãs é vantajosa para Paulo? Justifique sua resposta.

____

____

____

____

____

2. A tabela a seguir indica como varia a grandeza **y** em função da grandeza **x**. Analise-a e, levando em conta os valores apresentados, diga se as grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais, ou se não são nem direta nem inversamente proporcionais. Em cada caso, escreva a expressão algébrica que relaciona **x** e **y**.

a)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	10	20	30	40	50	60	70

b)

x	1	2	3	4	5	6	10
y	48	24	16	12	9,6	8	4,8

c)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15

d)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	8	18	32	50	72	98

LIÇÃO DE CASA

3. Refaça a tabela apresentada na atividade 2, item **c** da seção Você aprendeu?, e verifique se há proporcionalidade entre **x** e **y – 1**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15
y – 1							

4. Faça a mesma análise com o item d da atividade 2 apresentado na seção Você aprendeu?, verificando se há proporcionalidade entre os valores de **y** e os de **x²**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
x^2							
y	2	8	18	32	50	72	98

5. Em cada um dos casos apresentados a seguir, verifique se há ou não proporcionalidade direta entre as medidas das grandezas correspondentes. Se houver, expresse tal fato algebricamente, indicando o valor da constante de proporcionalidade, quando possível.

   a) A massa **m** de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade **t**?

   b) Quando compramos **x** metros de determinado fio, o preço **p** a pagar é diretamente proporcional a **x**?

   c) O preço a ser pago por uma fotocópia é diretamente proporcional ao número de cópias?

VOCÊ APRENDEU?

6. Ao dirigir um automóvel, o motorista deve estar atento à distância percorrida pelo automóvel quando o freio é acionado. O código de segurança nas estradas sugere uma relação entre a distância de segurança, isto é, a distância percorrida pelo carro após acionado o sistema de freios e a velocidade do automóvel no instante da frenagem. A tabela a seguir mostra alguns valores encontrados em uma pista de testes:

Velocidade v (km/h)	0	10	20	30	40	50	100	120
Distância de segurança d (metros)	0	1	4	9	16	25	100	144

Observando a tabela, concluímos que $\mathbf{d = k \cdot v^2}$.

a) Qual é o valor da constante de proporcionalidade **k**?

b) O automóvel encontra um obstáculo a uma distância de 83 m. Qual deve ser, aproximadamente, sua velocidade máxima de modo que ele não atinja o obstáculo?

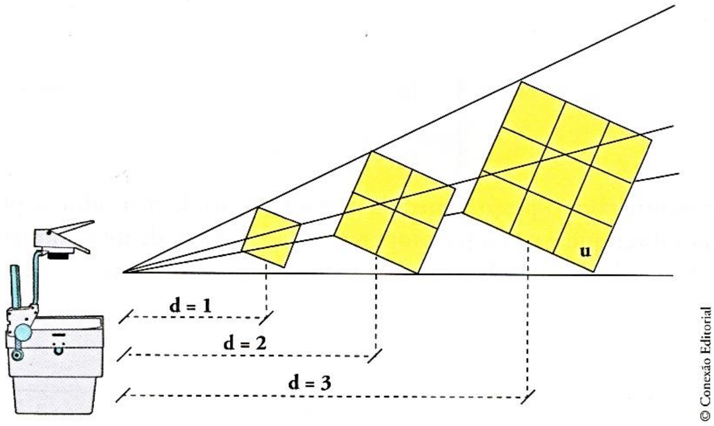
c) Qual é a distância de segurança quando a velocidade do automóvel for v = 80 km/h?

7. Para produzir **x** unidades de um produto **A**, o custo total **C** é composto por uma parcela fixa de mil reais e uma parcela variável, que é diretamente proporcional a **x**. O custo total da produção de **x** produtos é, então, C = 1 000 + kx, sendo **C** em reais. A constante **k** representa o aumento no custo total **C** quando a quantidade produzida aumenta uma unidade. Dado que, para produzir 100 unidades do produto **A**, o custo total é igual a R$ 1 500,00, responda às seguintes questões:

a) Qual é o valor de **k** na expressão C = 1 000 + kx?

VOCÊ APRENDEU?

10. A área **A** de uma imagem projetada é dada em função da distância **d** entre o projetor e a tela.



a) Observe a figura e complete a tabela a seguir, que relaciona a área **A** da imagem com a distância **d** do projetor:

Distância (d)	1	2	3	4	5	6	7
Área (A) (u)	1						

b) Qual das expressões a seguir representa a relação entre **A** e **d**?

A = 2d ( ) A = d + 4 ( ) $A = d^2$ ( ) A = d + 1 ( )

NOMES: ____ **GRUPO** _____ **9º Ano** ______

ATIVIDADE – GRÁFICO DE FUNÇÕES

Objetivo Específico: Compreender situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade; expressar graficamente situações de interdependência entre grandezas.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 8
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE GRANDEZAS PROPORCIONAIS E DE ALGUMAS NÃO PROPORCIONAIS

VOCÊ APRENDEU?

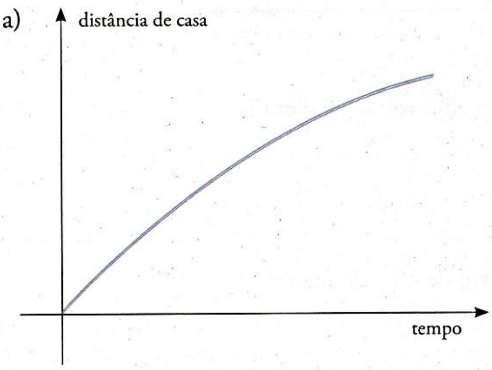
1. Considere as grandezas "distância de casa" e "tempo decorrido" nas situações a seguir e indique o gráfico que melhor corresponde a cada uma.

   I. Paulo saiu de sua casa de automóvel para ir ao trabalho, mas o pneu furou. Depois de trocá-lo, ele continuou o trajeto. Gráfico _____

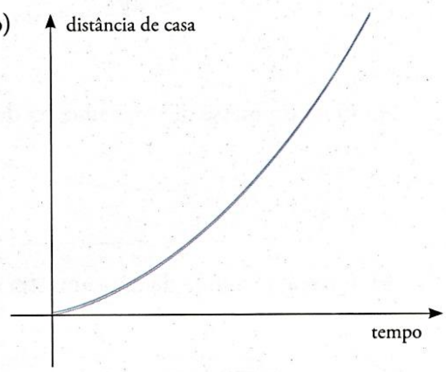
   II. Ana saiu de casa para ir ao banco, mas precisou retornar para pegar sua bolsa. Em seguida, ela foi ao banco. Gráfico _____

   III. Pedro saiu de casa devagar, mas aumentou cada vez mais sua velocidade para chegar mais rápido ao seu destino. Gráfico _____

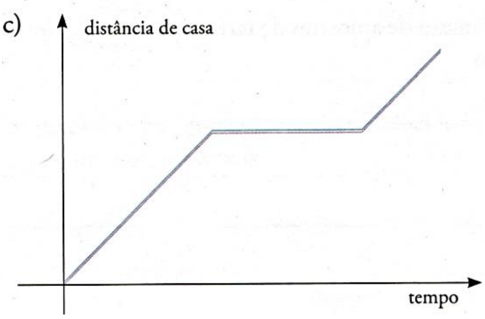
a)



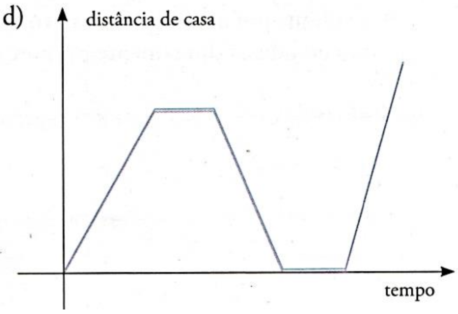
b)



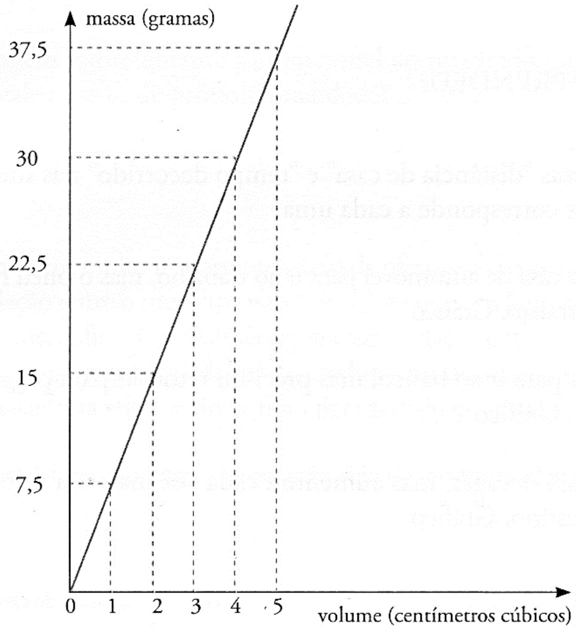
c)



d)



2. Mediram-se as massas de pequenas amostras de ferro de diversos volumes. A unidade de medida de massa foi o grama (g) e a de volume foi expressa em centímetros cúbicos (cm^3). Com os dados encontrados, construiu-se o gráfico a seguir:



a) Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é 4 cm^3?

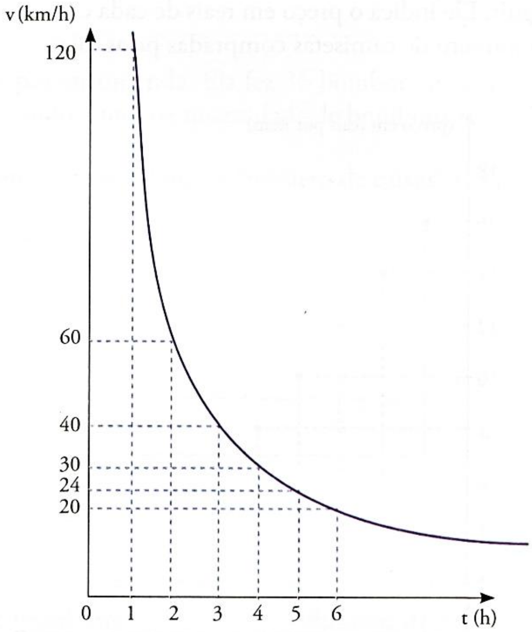
b) Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15 g de massa?

c) Explique por que as grandezas volume e massa de amostras de ferro representadas no gráfico são grandezas diretamente proporcionais.

d) Qual é a constante de proporcionalidade?

e) Escreva a relação entre a massa, **m**, e o volume, **V**, por meio de uma expressão.

3. O gráfico a seguir indica a velocidade que um automóvel precisa alcançar em função do tempo para percorrer uma distância de 120 km.



a) Com base no gráfico, complete a tabela a seguir:

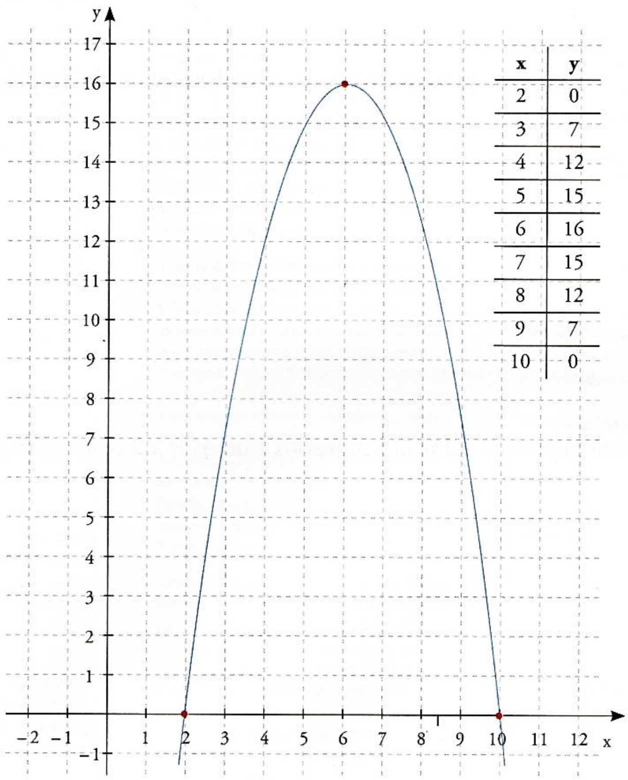
t (h)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
v (km/h)	120		60						

b) Explique por que as grandezas "velocidade" e "tempo" representadas no gráfico são inversamente proporcionais.

c) Escreva a sentença que relaciona **v** e **t**.

LIÇÃO DE CASA

8. Um grupo de alunos da 8ª série/9º ano formou uma banda e precisa determinar o preço **x**, em reais, do ingresso para um *show* de apresentação. Eles imaginaram que, se o valor do ingresso for muito alto, não conseguirão vendê-lo e, se for muito baixo, não obterão lucro, que seria investido na banda. Com base nos valores cobrados por outras bandas, os alunos concluíram que o lucro **L** de cada espetáculo, em reais, poderia ser dado pela expressão $L = -x^2 + 12x - 20$. (**Observação**: $L > 0$ significa lucro e $L < 0$, prejuízo).



x	y
2	0
3	7
4	12
5	15
6	16
7	15
8	12
9	7
10	0

Observe o gráfico e a tabela e, em seguida, responda:

a) Qual será o lucro caso eles decidam cobrar 4 reais por ingresso?

b) Se o preço do ingresso for superior a 6 reais, podemos afirmar que o grupo terá prejuízo? Justifique.

c) Para que intervalo de valores de **x** o lucro aumenta? E para qual ele diminui?

d) Qual é o valor do ingresso para que o grupo obtenha o maior lucro possível? Qual é o valor do lucro máximo?

e) O que acontece quando o valor dos ingressos é inferior a 2 reais ou superior a 10 reais?

f) O que ocorre com o lucro quando os ingressos são vendidos a 3 reais ou a 9 reais?

NOMES: ____ **GRUPO** _____ **9º Ano** ______

ATIVIDADE FINAL – FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS

Objetivo Específico: Expressar situações e problemas em linguagem algébrica; expressar graficamente situações de interdependência entre grandezas; expressar proporcionalidade direta e inversa como função; identificar gráficos que representam proporcionalidade direta entre grandezas ou com o quadrado de outra.

Questão 1
Os professores de uma academia recebem a quantia de 15 reais por aula, mais uma quantia fixa de 200 reais como abono mensal. Então a quantia y que o professor recebe por mês é dada em função do número x de aulas que ele dá durante esse mês. Qual é a lei de formação da função que relaciona essas duas grandezas?

Questão 2
Um motorista, saindo de um ponto A, viaja por uma estrada e verifica que a distância percorrida, desde o ponto inicial, pode ser calculada por $y = 51x + 17$, em que y é dado em quilômetros, e x é dado em horas. Nessas condições, determine as distâncias percorridas, de hora em hora, desde $x = 1$ até $x = 4$.

Questão 3
Construa o gráfico da função polinomial do 1º grau, preenchendo convenientemente a tabela de valores dos pares ordenados, indique se elas são **crescentes** ou **decrescentes** e qual é o ponto correspondente ao **zero da função**.

a. $y = x + 1$

x	$y = x + 1$	y	(x, y)

Questão 4

Num movimento, o espaço percorrido é diretamente proporcional ao tempo, mantendo-se constante a velocidade. O professor Demóstenes deslocou-se no seu automóvel durante 4 horas, a uma velocidade média de 90 km/h. A função que representa corretamente a relação de proporcionalidade direta é

(A) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço}}{\text{Tempo}}$

(B) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço} + \text{Tempo}}{\text{Tempo}}$

(C) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço} - \text{Tempo}}{\text{Tempo}}$

(D) "Velocidade média = Espaço $\cdot$ Tempo

(E) "Velocidade média = $\frac{\text{Tempo}}{\text{Espaço}}$

Questão 5

O comprimento **C** de uma circunferência é uma função do diâmetro **d**; no caso, **C** é diretamente proporcional a **d**, e temos **C = f(d) =** $\pi \cdot$ **d** . Então a constante de proporcionalidade (k) é:

(A) k = 2d

(B) k = π

(C) k = $\frac{2}{\pi}$

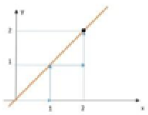
(D) k = 2π

(E) k = $\frac{\pi}{2}$

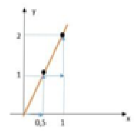
Questão 6

Considere os gráficos a seguir:

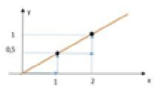
I



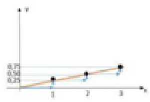
II



III



IV



Considerando as constantes de proporcionalidade encontradas em cada uma das funções e organizando-as em ordem crescente, obtemos a seguinte sequência:

(A) IV, III, I e II.

(B) II, I, III e IV.

(C) III, IV, I e II.

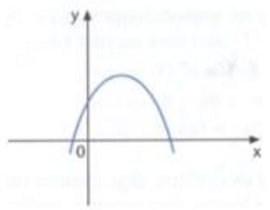
(D) I, II, III e IV.

(E) II, III, IV e I.

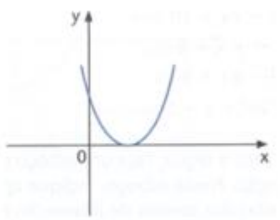
Questão 7

São dadas a seguir os gráficos de três funções de 2º grau, com $y = ax^2 + bx + c$ e $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Em cada caso, diga se a e Δ são positivos, nulos ou negativos.

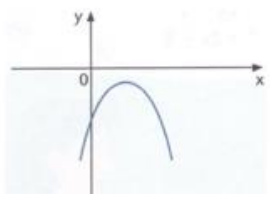
a.



b.



c.



Questão 8

Construa o gráfico da função polinomial do 2º grau, preenchendo convenientemente a tabela de valores dos pares ordenados, calcule o **vértice da parábola** e quais são os pontos correspondentes ao **zeros da função**.

a. $y = x^2 + 6x + 5$

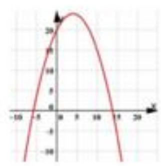
x	$y = x^2 + 6x + 5$	y	(x, y)

Questão 9

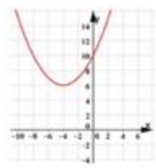
Dada a função: **y = 0,25x² + 2x + 10**.

O gráfico que representa corretamente a proporcionalidade direta entre as duas grandezas é:

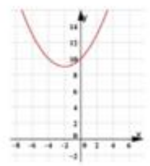
(A)



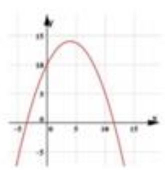
(B)



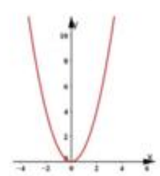
(C)



(D)



(E)



4. CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA E COLETA DE DADOS DA PESQUISA

Apresentamos neste capítulo o contexto e o público da nossa pesquisa, bem como discutimos a metodologia da pesquisa e concepções para a análise dos dados e a descrição das intervenções feitas na sala de aula das turmas pesquisadas, que possibilitaram a coleta de dados do presente trabalho.

4.1 Escola e público da pesquisa

A pesquisa foi autorizada (Apêndice C - p.304) e realizada em uma escola pública da rede estadual de ensino do Estado de São Paulo, que localiza-se no município de Itaquaquecetuba – SP. A escola oferta o ensino nos Ciclos do Ensino Fundamental – Anos Finais (6º ao 9º Anos), e Ensino Médio, atendendo aos discentes em três turnos (manhã, tarde e noite) com docentes residentes no próprio bairro, cidade, assim como nos municípios vizinhos.

A escola abrange uma comunidade escolar, oriunda de famílias carentes, em que a maioria dos pais trabalha fora do bairro não dispondo de muito tempo para uma participação ativa na vida escolar dos seus filhos, dificuldade apresentada por ficarem horas ausentes de casa em suas ocupações cotidianas.

O Plano Municipal de Resíduos Sólidos de Itaquaquecetuba apresenta que a respectiva cidade é o segundo maior município da microrregião de Mogi das Cruzes e acrescenta que:

> Itaquaquecetuba é um município da Grande São Paulo que, muito semelhante a outros municípios conurbados à capital paulista, acaba por sofrer maior influência na flutuação pelo movimento pendular. Ou seja, uma parte de sua população reside no município e trabalha em outro município, gerando um fluxo diário constante, em especial, nos dias úteis. (PREFEITURA MUNICIPAL DE ITAQUAQUECETUBA, s/d, p.26).

Sobre o local de nascimento dos munícipes, o estudo discute que um pouco mais de 20% dos habitantes do município são migrantes da região nordeste do Brasil e aproximadamente 75% são naturais da região sudeste, inclusive do próprio município. Aponta que:

> O censo demográfico do IBGE (2010) revelou que do total de estudantes residentes no município de Itaquaquecetuba, 13,5% se deslocavam para outros municípios da região para estudar, e do total de trabalhadores com ocupação no momento da pesquisa, 46,9% também exerciam seus ofícios em 24 outros municípios. Estes indicadores mostram que uma parcela significativa da população de Itaquaquecetuba se desloca diariamente para o trabalho e estudo. (PREFEITURA MUNICIPAL DE ITAQUAQUECETUBA, s/d, p.27).

Muitos adolescentes que estudam no período noturno, ajudam no orçamento de casa, trabalhando nos estabelecimentos comerciais do próprio bairro, estágios remunerados do programa Jovem Aprendiz e alguns trabalham dentro da própria casa ajudando os pais em seus afazeres domésticos, como também cuidando de bebês e crianças de colo (irmãos, sobrinhos, etc.) ou de pessoas próximas (vizinhos) no período em que estão livres da ocupação escolar. Mesmo diante das dificuldades, a grande maioria das famílias possui casa própria.

O bairro não apresenta opção de lazer, sendo a escola o ponto principal para encontro dos jovens. Há estudantes que residem em bairros distantes, sendo necessária a utilização do transporte escolar gerenciado pela escola para que a frequentem, pois não há outras escolas próximas de suas residências.

Os participantes desta investigação são alunos regularmente matriculados no 9º Ano do Ensino Fundamental com idade aproximada de 14 anos e que residem no próprio bairro, por vezes, em bairros vizinhos.

Os estudantes que aceitaram participar da pesquisa estudavam no período da tarde e pertenciam a duas turmas distintas de nono ano, separados em Grupo A e Grupo B. A quantidade de alunos investigados, é de aproximadamente 24 estudantes no Grupo A e 15 alunos no Grupo B.

Evidencio a palavra aproximadamente devido à dinâmica escolar, que envolve transferências, eventuais faltas dos estudantes em dias destinados à intervenção e também por alguns agrupamentos feitos pelos alunos, de modo que um dos estudantes havia entregue o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), no entanto o outro, parceiro dele na atividade, não. Tais fatores impactaram a quantidade efetiva de participantes durante toda a pesquisa, sem, no entanto, apresentar prejuízos à mesma.

O Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) do IFSP fez uma análise minuciosa do TCLE entregue aos estudantes e responsáveis, da autorização de pesquisa fornecida pela escola, bem como das atividades que seriam destinadas aos estudantes. Analisou a descrição de como se daria a metodologia de coleta de dados, tempo de guarda dos documentos produzidos e como se daria seu respectivo descarte após finalizado o período de armazenamento. Buscou esclarecimentos de como o professor pesquisador procederia com os estudantes que não aceitassem participar da pesquisa e como seriam atendidos sem prejuízos em suas aprendizagens. Após atendimento e esclarecimento de todos esses critérios a pesquisa foi autorizada a prosseguir.

Os estudantes do Grupo A são frequentes, ou seja, não possuíam o hábito de faltar nas aulas, realizavam as atividades propostas no tempo estimado pelo docente, respondendo positivamente a todas as orientações e dinâmicas sugeridas. Possuem, em sua maioria, um índice satisfatório e adequado de aprendizagens para o ano/série em que se encontram matriculados, nos momentos de retomada de temas já estudados, apresentam baixa interação e poucas dúvidas.

O Grupo A possui um perfil que dedica concentração e foco aos momentos em que o professor solicita atenção às suas falas, e durante as orientações dadas em sala de aula. Possui uma boa disposição em fazer perguntas sobre o tema em discussão, muitas vezes oportunizando diálogos extensos e complementares sobre o tema, e discussões com uso de contra exemplos, em muitos momentos. Aparentemente, sentiram-se confortáveis em fazer as tarefas matemáticas propostas, muitas vezes agrupados espontaneamente em duplas ou trios, com pouquíssimas variações entre seus membros, sem que isso prejudicasse a dinâmica da aula adotada pelo professor, demonstrando um engajamento constante nas aulas.

Os alunos que pertencem ao Grupo B apresentam maiores dificuldades nas aprendizagens dos temas propostos para o ano/série em que se encontram matriculados e possui um histórico de ausências maior que o outro grupo, sobretudo em aulas que antecedem feriados, paralisações promovidas pelo sindicato dos professores e até mesmo em algumas sextas-feiras.

O Grupo B no presente ano foi uma das turmas de 9º anos contemplada com o professor de recuperação, que participava de duas aulas semanais com o professor regente, com o propósito de auxiliar nas aprendizagens dos estudantes. Mostram um engajamento menor quando solicitado que desenvolvam as propostas de aulas (exercícios, avaliações e trabalhos em sala), e apenas se agrupavam em duplas ou trios quando era solicitado pelo professor.

O Grupo B possuía um conjunto de estudantes que em determinados momentos da aula desviavam o foco com atitudes que levavam ao riso coletivo e à quebra de concentração, no entanto, eram respeitosos com o professor e dedicavam atenção para as explicações e orientações dadas nas aulas. Não tinham o hábito de dialogarem por muito tempo sobre o tema exposto e nem de expor suas dúvidas diante dos colegas de classe.

O pesquisador neste estudo é o próprio professor das turmas e leciona nesta unidade escolar desde o ano de 2017 fundamentalmente no período da tarde com turmas de 9º ano do ensino fundamental, porém era a primeira vez que trabalhava com esses estudantes.

4.2 Metodologia da pesquisa e de análise de dados

A constante aproximação com a literatura sugere que façamos uma breve discussão sobre a abordagem, natureza, objetivos e os procedimentos do processo de investigação aqui proposto.

Trata-se de uma pesquisa de natureza aplicada, preocupada em gerar conhecimentos para aplicação prática, voltada à solução de problemas específicos com interesses locais. Quanto aos seus objetivos é explicativa, pois

> [...]essas pesquisas têm como preocupação central identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos. Esse é o tipo de pesquisa que mais aprofunda o conhecimento da realidade, porque explica a razão, o porquê das coisas. (GIL, 2002, p.42).

A abordagem aqui adotada é a de uma pesquisa qualitativa, por se considerar ser esta a mais adequada ao contexto educacional. Ainda que ressaltemos que não há uma dicotomia entre pesquisa qualitativa e quantitativa, e que em alguns momentos recorreremos à frequência de algumas respostas dadas pelos estudantes, isto não invalida a nossa preocupação com a compreensão do contexto da intervenção e daremos atenção: às falas dos estudantes; à interação dos mesmos com os colegas e professor; e ao que buscam por meio da linguagem e expressões percebidas nas aulas.

> A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.49).

Ainda sobre a perspectiva da pesquisa qualitativa, concordamos quando Triviños (1987) destaca que

> A pesquisa qualitativa do tipo histórico-estrutural, dialética parte também da *descrição* que intenta captar não só a aparência do fenômeno, como também sua essência. Busca, porém, as causas da existência dele, procurando *explicar* sua origem, suas relações, suas mudanças e se esforça em *intuir* as consequências que terão para a vida humana. (TRIVIÑOS, 1987, p.127)

Por se tratar de uma pesquisa de abordagem qualitativa, de natureza aplicada e com objetivos de explicar a realidade, em que o professor das turmas é o pesquisador da investigação, quanto aos procedimentos, adotaremos a metodologia da pesquisa-ação. Por considerar que os "sujeitos da investigação", diante de uma situação de pesquisa, podem se comportar de modo diferente do que normalmente se comportariam, pensamos que um método para diminuir esses efeitos seria aquele que permitisse que, o pesquisador fosse o próprio professor regular, minimizando o que chamamos de "efeito do observador".

> Como os investigadores qualitativos estão interessados no modo como as pessoas normalmente se comportam e pensam nos seus ambientes naturais, tentam agir de modo a que as atividades que ocorrem na sua presença não difiram significativamente daquilo que se passa na sua ausência. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.68)

Assumiremos então, neste trabalho, a seguinte definição de pesquisa-ação:

> A pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (THIOLLENT, 2011, p.20)

Como a natureza da atividade docente reside na ação e reflexão constantes e sua atividade profissional encontra-se amparada na filosofia da práxis, segundo Thiollent (2011) a pesquisa-ação permite aos pesquisadores desempenhar um papel ativo na própria realidade dos fatos e ainda que a pesquisa-ação seja realizada dentro de uma instituição (escola) que possua hierarquias ou grupos cujos relacionamentos são problemáticos (professores e alunos) não há problemas, do ponto de vista ético, que os pesquisadores trabalhem em uma das partes envolvidas, ainda que seja a que está mais vinculada ao poder. Eventualmente, caso haja problemas de relacionamento entre os grupos, devem ser apreciados em reuniões com representatividade de todas as partes.

De acordo com Gil (2002) como o delineamento expressa em linhas gerais o desenvolvimento da pesquisa, com ênfase nos procedimentos técnicos de coleta e análise de dados, torna-se possível, na prática, classificar as pesquisas segundo o seu delineamento. Assim sendo, Gil ainda acrescenta que:

> [...] na pesquisa-ação ocorre um constante vaivém entre as fases, que é determinado pela dinâmica do grupo de pesquisadores em seu relacionamento com a situação pesquisada. Assim, o que se pode, à guisa do delineamento, é apresentar alguns conjuntos de ações que, embora não ordenados no tempo, podem ser considerados como etapas da pesquisa-ação. São eles:
>
> a) fase exploratória;
>
> b) formulação do problema;
>
> c) construção de hipóteses;
>
> d) realização do seminário;
>
> e) seleção da amostra;
>
> f) coleta de dados;

g) análise e interpretação dos dados;

h) elaboração do plano de ação;

i) divulgação dos resultados. (GIL, 2002, p.143)

As etapas prescritas do item (a) até o item (e) aconteceram sem muita delimitação temporal, simultaneamente, dependendo dos casos, pois mantinham uma complementariedade entre si. No entanto, iniciaremos a elucidar as etapas desta pesquisa-ação com a formulação do problema. Os espaços de formação em serviço, encontros que envolvem professores e a gestão escolar, nos levavam a reflexões sobre o baixo desempenho dos estudantes no componente de matemática e nas avaliações externas propostas pela rede.

Diante desse cenário, e já com a inquietação existente por parte do professor pesquisador sobre a aprendizagem de alguns temas da área da Matemática, e devido ao movimento constante de reflexão sobre a ação do docente, começamos a questionar nestes encontros coletivos quais ações poderíamos adotar, enquanto educadores, para diminuir as fragilidades de aprendizagens observadas. Percebendo que outros colegas de trabalho partilhavam dos mesmos questionamentos, então me propus a investigar a aprendizagem de um determinado tema da matemática (Funções), buscando solucionar um problema prático do cotidiano escolar.

Com o passar dos anos professores e gestores têm percebido que a rede estadual tem intensificado a implantação de avaliações externas (bimestrais e anuais) e modificado seu currículo, alinhando-o com princípios voltados a mensurar a "qualidade" da educação ofertada aos estudantes por meio destas avaliações e uma preocupação em divulgar bons desempenhos das escolas e estudantes da rede nas diferentes etapas em que se encontram da Educação Básica.

Angelucci et al (2004) em sua pesquisa do estado da arte que analisa teses e dissertações que abordam o fracasso escolar entre os anos de 1991 e 2002, aponta que em alguns trabalhos há uma discussão de uma perspectiva de defender que o fracasso escolar está relacionado a um problema de ordem técnica, incorrendo em uma culpabilização do professor. Diante disso, observou que alguns dos trabalhos analisados

> [...] concebe o fracasso escolar como efeito de técnicas de ensino inadequadas ou de falta de domínio da técnica correta pelo professor. Permanece nessas pesquisas o pressuposto de que as crianças das classes populares trazem para a escola dificuldades de aprendizagem, mas o foco muda de lugar: não se localiza nos problemas individuais dos alunos, mas na técnica de ensino do professor. Nesse sentido, leva-se em conta a escola na produção dos reveses da aprendizagem, mas reduzida a uma relação dual abstrata em uma escola abstrata, ou seja, desvinculadas da sociedade que as inclui. (ANGELUCCI et al, 2004, p.61)

Neste contexto educacional da rede pública estadual de São Paulo, as angústias e responsabilizações percebidos pelo professor pesquisador e por seus colegas de trabalho são potencializados. Percebem uma cobrança crescente, sobretudo os docentes que lecionam as disciplinas avaliadas, para que a escola alcance os índices e os estudantes melhorem seus desempenhos nas avaliações, incutem uma lógica perversa a estes profissionais e promovem de maneira inconsciente no ambiente escolar que o professor é o principal responsável pela má avaliação da educação básica e da unidade escolar que atua.

Logo já tínhamos selecionado a amostra, turmas de 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública da rede estadual de ensino do estado de São Paulo. Porém, não foi estabelecido um critério de seleção dos estudantes, por se tratar de uma pesquisa-ação, entendemos que há uma prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos, portanto os estudantes participaram da pesquisa por adesão, sendo de duas turmas distintas, das cinco que a escola possuía no ano de 2019.

Podemos, diante do exposto, caracterizar a etapa da fase exploratória, pois estávamos em contato constante com o campo em que a investigação aconteceria. Os interessados, pesquisador e escola, tinham expectativas de, por meio do plano de ação, procurar evidências de aprendizagem significativa em matemática para o tema selecionado, no qual o campo de investigação limitava-se a sala de aula.

A etapa (d) sugerida por Gil (2002) destinada a realização de seminários, que tem por objetivo discutir as propostas dos participantes e as contribuições dos especialistas, se concretizou durante o curso das disciplinas do programa de mestrado profissional (Metodologia da Pesquisa, Seminário de Pesquisa I e II), por meio das conversas com a professora orientadora do projeto de pesquisa e também por intermédio dos diálogos frequentes que aconteciam com a direção da escola.

Construímos as hipóteses de como a Física, outra área de conhecimento, poderia contribuir para promover aprendizagem em Matemática e discutimos que a experimentação podia ser um caminho. Definimos os experimentos que podiam se adequar às discussões e às turmas e, seguimos para a autorização da pesquisa pela gestão da escola, que aprovou, mediante autorização do Comitê de Ética e Pesquisa do IFSP, em setembro de 2018.

Gil (2002) define o plano de ação como o planejamento de uma ação destinada a enfrentar o problema que foi objeto de investigação. Sendo assim, definimos o referencial teórico que orienta a elaboração das atividades e das intervenções feitas em sala de aula.

Elaboramos um conjunto de atividades matemáticas utilizando como ferramenta de planejamento e investigação a Trajetória Hipotética de Aprendizagem, pensada e estruturada segundo os princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa, e considerando todo o desenvolvimento das aulas alinhado aos princípios de interação e mediação na concepção sócio-construtivista de Vygotsky.

Com exceção da avaliação final, as demais atividades privilegiam os agrupamentos entre os estudantes, pois se compreende a necessidade de valorizar os conhecimentos dos alunos advindos da sua interação com seus pares, com a cultura e a sociedade.

A coleta de dados, nesta perspectiva de pesquisa, tende a privilegiar procedimentos flexíveis, então foi planejado para acontecer por intermédio dos registros dos estudantes nas atividades matemáticas desenvolvidas nas intervenções de aula, assim como pelo diário de itinerância do professor-pesquisador, no qual constam algumas percepções das atitudes dos estudantes durante a aula, comentários relevantes feitos pelo professor-pesquisador e alunos durante o desenvolvimento da THA e também relatos de acontecimentos inesperados das aulas.

O diário foi construído ao longo das intervenções com anotações durante a realização da aula, assim como após seu término. Uma aplicação piloto de parte do projeto de pesquisa com turmas de anos anteriores, permitiu uma tomada de consciência e aprimoramento nos registros que seriam realizados durante a coleta de dados devidamente autorizada.

Definimos para análise e interpretação dos dados a metodologia de análise de conteúdo de Bardin (1977), pois ela se aplica ao estudo das motivações, atitudes, valores, crenças e tendências. Triviños (1987) acrescenta que a análise de conteúdo é:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, obter indicadores quantitativos ou não, que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) das mensagens. (TRIVIÑOS, 1987, p.160)

Concluindo o delineamento da pesquisa, de acordo com as etapas da pesquisa-ação propostas por Gil (2002), há a necessidade de divulgar os resultados, ou seja, publicizar a informação obtida, externamente aos setores interessados, que neste caso é a publicação da dissertação de mestrado e do produto educacional, que é a trajetória hipotética de aprendizagem que foi aplicada, revisada e alterada quando necessário, após a análise desenvolvida no presente estudo.

4.3 Descrição das intervenções em sala e coleta dos dados

Durante o segundo semestre do ano de 2019, aconteceram 15 intervenções (2 horas-aula cada) nas aulas de Matemática e na prática do professor, totalizando 30 horas-aula. Os Grupos A e B reuniram uma parcela dos estudantes de duas turmas do 9º ano do ensino fundamental, os quais produziram, juntamente com o professor/pesquisador, neste período, o material que serviu de coleta de dados para esta investigação. Os registros feitos pelos alunos aconteceram nas atividades impressas entregues aos agrupamentos, e devolvidos ao término das aulas ou quando solicitados pelo professor/pesquisador.

Descreveremos as intervenções didáticas realizadas nas turmas, que subsidiaram a coleta de dados, evidenciando aspectos relevantes e de natureza qualitativa que foram observados, tal como algumas mediações pertinentes e necessárias realizadas pelo professor/pesquisador na aula. A atuação do professor/pesquisador na condução de cada intervenção manteve-se muito próxima em ambas as turmas, não houve alteração quanto aos procedimentos e instruções dadas aos alunos, no entanto, as especificidades relevantes que possam ter acontecido em uma turma e em outra não, serão descritas e destacadas, com o cuidado de especificar em qual dos grupos foi observado e os aspectos analíticos serão tratados na seção seguinte, voltada à análise de dados.

O Quadro 1 abaixo apresenta uma síntese da trajetória hipotética de aprendizagem proposta. Considera os momentos de uma UEPS (coluna 1) durante seu processo de planejamento e realização, assim como destaca quais as finalidades das atividades na perspectiva da THA (coluna 2). Mostra na coluna *Intervenção*, quantas mediações foram realizadas pelo professor pesquisador durante a proposta da THA, sendo complementada pela coluna *Tempo*. Por fim, as colunas *Atividades* e *Objetivos* evidenciam o tema a ser discutido em aula e seus objetivos específicos.

Quadro 1– Quadro de atividades e objetivos da THA proposta.

UEPS	THA	Intervenção	Atividade	Objetivos	Tempo
1º Momento	Reconhecimento da estrutura cognitiva	1 e 2	**1** – Equação 1º Grau	Realizar, discutir e identificar os conceitos subsunçores.	4 aulas
		3 e 4	**2** – Equação do 2º Grau		4 aulas
		5	**3** – Plano Cartesiano		2 aulas
		6	**4** – Ideia de Função	Realizar e discutir a tarefa, identificar conceitos subsunçores, propor situações-	2 aulas

				problema em nível introdutório e apresentar o tema de estudo.	
2º Momento	Introdução ao tema de ensino	7, 8, 9 e 10	**Experimento 1** – Esticando a Mola	Introduzir o tema de estudo em um nível maior de complexidade, apresentar contexto e aplicação do tema Função polinomial de 1º grau e discutir os objetivos do roteiro experimental	8 aulas
	Processo de aprendizagens	11 e 12	**5** – Relações de Proporcionalidade	Realizar e discutir a tarefa, perceber a qualidade das aprendizagens dos estudantes (diferenciação progressiva e reconciliação integradora)	4 aulas
		13	**6** – Gráficos de Funções		2 aulas
		14	**Experimento 2** – Queda Livre	Discutir aspectos da Física, possibilitar contexto e aplicação para o tema Função polinomial de 2º grau.	2 aulas
3º Momento	Avaliação	15	**Avaliação final**	Avaliação das aprendizagens dos estudantes.	2 aulas
4º Momento	Avaliação da Trajetória Hipotética de Aprendizagem / UEPS.				

Fonte: Autor

4.3.1 Intervenção 1 – Atividade 1: Equações de 1º Grau

No conjunto de aulas destinadas à realização da Atividade 1 – Equações do 1º grau, o professor apresentou as instruções de realização da atividade aos estudantes e aguardou que a realizassem. Assumiu uma postura mais distante, com respostas vagas, quando pediam que verificasse ou validasse as respostas encontradas por eles. Os alunos estavam em duplas, sem material de consulta e não possuíam autorização para utilizar calculadora e aparelhos eletrônicos. As dúvidas que eventualmente surgiam eram esclarecidas oralmente pelo professor.

Um número significativo de estudantes resolveu a questão 1 sem dificuldades, porém na questão 2, os estudantes, em ambos os grupos, indagaram se os símbolos iguais poderiam assumir valores diferentes, se estivessem em outra linha; se um dos símbolos podia ser zero; e como deveriam apresentar a resposta.

O professor neste momento respondeu à primeira dúvida da seguinte forma: *"– Os símbolos mudaram?* Responderam que não, então o professor completou *"– Se eu fosse para outra sala, eu deixaria de ser "eu"?"*. Os estudantes riram e responderam que não, e concluíram que independente da linha que os símbolos se apresentavam, seus valores seriam os mesmos. O docente acrescentou que os símbolos assumiam valores numéricos quaisquer, portanto, não havia impedimento para atribuir o zero a um símbolo. E que as respostas deveriam ser apresentadas de forma compreensível por ele.

Na questão 3, houve uma maior concentração de dúvidas, sendo elas: como deveriam montar as equações; como nomear os cilindros; e se podiam, após montar as equações, juntar os termos semelhantes (todos os x) e os números.

Claramente o professor percebeu uma dificuldade de análise da questão e suas informações não alcançaram a maior parte dos estudantes das salas; na turma do Grupo B nenhum estudante demonstrou reações positivas de compreensão após as explicações orais do docente. Sendo assim, o professor tomou a decisão de resolver o item (b) da questão 3, pois considerava que havia alunos que potencialmente resolveriam a questão corretamente se, o que estava sendo solicitado, fosse exemplificado.

A mediação do professor começou chamando a atenção dos estudantes para a posição de equilíbrio entre os pratos da balança, e que isso implicava que ambos os lados apresentavam o mesmo valor de massa, independente de terem cilindros e massas nos dois lados da balança. Foi atribuído a incógnita x aos cilindros e dessa forma o item (b) da terceira questão foi resolvido coletivamente, com o professor praticamente sendo o escriba de alguns alunos que ditavam os procedimentos. Os estudantes que ainda assim, não apresentavam compreensão sobre o item resolvido, tiveram a orientação de deixar a questão em branco e que seguissem para a próxima.

Ao chegarem na questão 4, surgiram mais dúvidas pontuais em algumas duplas, associadas a procedimentos operatórios (operações matemáticas), do que aos procedimentos corretos para resolver uma equação do 1º grau. As duplas que relatavam não saber resolver uma equação do 1º grau, que não podiam receber as orientações procedimentais de outras duplas e nem do professor, tiveram a seguinte orientação do docente: *"– Recomendo que isolem a incógnita em um membro da equação, o objetivo é encontrar o valor da incógnita x. O que vocês precisam fazer para conseguir isso, é com vocês"*.

Ao término das duas aulas, as atividades foram recolhidas pelo professor, com orientação para que organizassem a sala na forma habitual (carteiras enfileiradas e individuais) e foram informados que no dia seguinte discutiriam objetivos e resoluções das questões.

4.3.2 Intervenção 2 – Discussão da Atividade 1 com as turmas

As orientações para esta aula foram de que prestassem atenção e participassem da discussão das questões da atividade anterior, que seria uma aula expositiva e dialógica. Os estudantes receberam as questões impressas, para colarem no caderno, a fim de que valorizassem as discussões e não os registros, ainda que fossem importantes.

A discussão iniciou com o professor perguntando a percepção geral das turmas, sobre a complexidade da questão 1. Os estudantes que se expressaram, disseram ser *"– Muito fácil."*. O docente substituiu a ilustração da mão por um quadrado vazio na lousa e, escreveu as respostas ditadas pelos alunos, sem que indicassem dificuldades aparentes com a resolução.

Ao chegarem à discussão da questão 2, os alunos foram indagados pelo professor para que dissessem, ou buscassem compreender, quais dos símbolos era o mais fácil de ter seu valor numérico descoberto. Rapidamente indicaram o símbolo que se encontrava na segunda linha e já anunciavam o seu valor. Continuando com os questionamentos, ainda que não tivesse um acordo unânime entre as respostas dadas, foram percebendo a estratégia que adotamos para resolver o problema. Os alunos mais confiantes resolveram toda a questão e o professor apenas registrava e mostrava a associação entre as expressões e a fala dos estudantes.

Para conduzir a explicação da próxima pergunta o docente fez o esboço da balança de pratos na lousa, para facilitar a compreensão e discussão da questão 3 e exemplificou uma estratégia de montagem e resolução do item (a). Para os demais itens, o docente indagava quais seriam as próximas etapas, finalizando a tarefa com a percepção de que a maioria dos estudantes da turma, que apresentou dúvidas relevantes no dia anterior, expressava em seus rostos, terem compreendido o procedimento e o que a questão havia solicitado.

Por fim, o professor retomou a orientação dada na aula anterior, de que o objetivo era encontrar o valor da incógnita x e isolá-la em um dos membros da equação. Resolveu os itens (a), (b) e (c) e percebeu que o procedimento adotado não era uma novidade para os estudantes. Propôs uma dinâmica em que os alunos tinham que solucionar os itens seguintes em alguns minutos e logo após esse tempo, ele respondia para que verificassem se tinham solucionado corretamente. Foram apontadas as diferenças entre as equações de 1º grau e as de 2º grau, para que reconhecessem que se tratava de equações distintas, com métodos de resolução diferentes.

Alguns estudantes manifestaram, ao término da discussão da atividade 1, que ela estava fácil, mas que durante a resolução, sem consulta e com baixa mediação do professor, confundiram muito os procedimentos e chegaram até a resolver usando a fórmula de Bhaskara, assunto discutido antes das férias, no 2º bimestre do ano.

A turma que tinha estudantes do Grupo B demonstrou maior interesse nestas duas aulas, porém em alguns momentos, com uma interação mais contida, em que se percebia que a fala do professor, aparentemente, era mais valorizada. E acrescentaram que quando o professor resolvia na lousa, era mais fácil.

4.3.3 Intervenção 3 – Atividade 2: Equações do 2º Grau

Os estudantes, neste conjunto de duas aulas, tinham que apresentar a resolução da Atividade 2 – Equações do 2º grau. As orientações apresentadas foram: que podiam retomar os agrupamentos em duplas e também consultar seus registros pessoais; não tinham autorização para usar calculadora e nem equipamentos eletrônicos; as questões 1, 2 e 3 poderiam ser resolvidas pelo método já ensinado para equações incompletas do 2º grau, e a questão 4 com a utilização da fórmula de Bhaskara.

Havia uma concentração entre as duplas, sobre os procedimentos que necessitavam adotar para resolver a atividade, e as dúvidas mais frequentes foram relacionadas às incógnitas que haviam sido utilizadas (y e z) e não só à incógnita x; e se podiam resolver todas as equações utilizando a fórmula de Bhaskara.

Diante das perguntas o professor disse que o método de resolução era o mesmo, e que usassem as incógnitas apresentadas, como se fossem a incógnita x; e que poderiam resolver todas utilizando a fórmula resolutiva de Bhaskara, no entanto, seria um processo mais demorado e passível de erros.

Apesar de não deixar claro aos estudantes, a orientação de utilizarem procedimentos diversos de resolução de equações do 2º grau, era para verificar quais estudantes e quais turmas apresentavam fragilidades na aprendizagem daquele conhecimento. A turma do Grupo B demonstrou, ainda com autorização de acesso aos registros, uma grande dificuldade em resolver, então o docente colocou dois exemplos e deu uma breve explicação, resolvendo-os. Não era interessante que deixassem de fazer por não recordarem dos procedimentos ensinados, e sim que não solucionassem por não terem se apropriado daquele conhecimento.

Durante o desenvolvimento da atividade o docente teve que responder a algumas perguntas conceituais, pois os estudantes que compunham as duplas divergiam em algum momento, e o professor era a pessoa que indicaria o estudante que "estava certo". Perguntas como: *"– A operação inversa da potência quadrada é a raiz quadrada?"* e *" – A solução é vazia quando chegamos em uma raiz quadrada negativa, né?"*, foram respondidas pelo professor, validando a proposição de um estudante correto, diante da conclusão equivocada do outro, e observamos que o estudante certo, dizia frases afirmando que estava com a razão no debate.

Não tiveram a validação, por parte do professor, se a solução encontrada estava correta, eram lembrados que teríamos as próximas aulas para discussão das resoluções daquelas questões.

Alguns alunos mostraram-se tensos para resolver a atividade apresentada, transparecendo certo constrangimento em apresentar algumas dúvidas, talvez por ter sido um conhecimento exaustivamente mobilizado no bimestre anterior.

A intervenção foi finalizada, com o professor solicitando a entrega das atividades e que os estudantes procedessem com a organização da sala de aula.

4.3.4 Intervenção 4 – Discussão da Atividade 2 com as turmas

As instruções inicialmente dadas aos estudantes pelo professor foram de que a aula seria expositiva-dialogada e que seria disponibilizado um tempo para registros dos procedimentos de resolução apresentados. Não havia a necessidade de se agruparem em duplas naquelas aulas e que o importante era que procurassem esclarecer as dúvidas remanescentes.

O docente registrou todas as equações das questões 1, 2 e 3 na lousa, garantindo o espaço necessário para sua respectiva resolução. Adotou uma estratégia comumente utilizada em suas aulas: resolveu um ou dois exemplos e disponibilizou um tempo de aula para que discutissem e buscassem resolver de forma autônoma. No entanto, o docente se manteve circulando pela sala e intermediando os processos em que percebia que os alunos apresentavam alguma dúvida. Após esse tempo, na lousa, resolvia as equações cobrando que os alunos fossem ditando os passos que ele deveria executar.

A questão 4 era composta por 5 itens com equações completas do 2º grau, então o professor anotou na lousa os itens (a) e (b), deixando o espaço necessário para a resolução, que exigia o uso da fórmula resolutiva de Bhaskara. Recorreu à mesma estratégia adotada nas questões anteriores, disponibilizando os itens (c), (d) e (e) e tempos que julgou relativamente adequados para os estudantes realizarem sob sua supervisão e mediação.

Ao final da discussão do item (e) pelo professor, na lousa, alguns alunos manifestaram que a atividade parecia "mais difícil" e que o docente não os ajudou durante a realização, como na presente aula. Um grupo de alunos considerou o procedimento que adota a fórmula resolutiva de Bhaskara mais fácil que os outros métodos apresentados. O professor contra-argumentou dizendo que o fácil é relativo e que o uso da fórmula implica em mais passos no processo de resolução, desnecessários em alguns casos.

Alunos se mostraram tensos diante da situação, pois era um tema que tinha sido discutido em muitos momentos, de diversas formas, inclusive houve autorização para realizarem consultas em seus registros pessoais, o que talvez os tenha levado à falsa sensação de que não podiam cometer erros.

O professor ainda se encontrava em uma posição de verificador e validador dos procedimentos e conceitos nos momentos de insegurança dos estudantes.

4.3.5 Intervenção 5 – Atividade 3: Plano Cartesiano

Os estudantes foram recepcionados no início das aulas, pelo professor com as instruções sobre os procedimentos que adotariam para realização da atividade, dividida em duas etapas. A primeira etapa solicitava novamente o agrupamento em duplas, sem exceção, e que responderiam à atividade impressa, sem consulta aos registros pessoais e aparelhos eletrônicos, por um período estimado de uma aula e meia (1h10min).

A segunda etapa aconteceria nos trinta minutos que antecederiam o término das aulas, utilizando a estratégia expositivo-dialogada, destinada à discussão das questões propostas, aos métodos de resolução e à solução que era esperada, propiciando um momento de esclarecimentos de conhecimentos com aprendizagens fragilizadas.

Em ambas as turmas, ao pegarem a atividade sentiram-se confiantes com o que era solicitado, no entanto, dúvidas surgiram. Dentre elas, tivemos: quanto valia (em unidades) cada quadradinho; como graduavam numericamente os eixos (sentido dos valores positivos e negativos); e qual era o eixo das ordenadas.

No que se refere à primeira dúvida dos estudantes, foram orientados pelo professor que cada quadradinho correspondia a uma unidade. Já na segunda pergunta, o docente pediu que graduassem de acordo com os conhecimentos que tinham e avaliavam como correto.

A primeira questão chamou a atenção do professor, porque nas aulas em que solicitou papel quadriculado/milimetrado, por questões estéticas, solicitava que os estudantes graduassem uma unidade a cada dois quadradinhos. Grande parte das aulas, que implicaram na construção do plano cartesiano e localização de pontos, com uso de papel quadriculado/milimetrado, o professor recorreu a essa estratégia, para garantir uma legibilidade das produções dos alunos, no entanto, alguns associaram como procedimento fixo na construção do plano cartesiano.

Referente à terceira dúvida levantada pelos alunos, o docente não respondeu, por se tratar de uma das perguntas da atividade, e, respondendo, a pergunta influenciaria na resposta que apresentariam. Porém, uma dupla perguntou especificamente se o eixo y era o eixo das ordenadas, buscando novamente uma validação por parte do professor, mas, não obtiveram também uma resposta do docente.

Após o tempo pré-estabelecido no início da aula, com uma pequena variação, o professor recolheu as atividades respondidas e se encaminhou para a lousa. Como os estudantes haviam acabado de responder às questões, não achou necessário que tivessem novamente acesso às perguntas. Adotou a estratégia de reler cada uma delas, discuti-las e apresentar a solução. A primeira questão apresentava pontos distribuídos pelos quatro quadrantes do plano cartesiano, e o professor reproduziu este plano cartesiano na lousa, começando as discussões sobre aspectos formais de apresentação de uma coordenada cartesiana.

Evidenciou a necessidade de utilizar letra maiúscula para nomear um ponto, convenção adotada na geometria e que se mantinha para aquela situação. Salientou a necessidade de utilizar parênteses para expressar o par ordenado (x, y), e também que os valores podiam ser separados por vírgula (,) ou ponto e vírgula (;). Por fim, com a participação dos alunos, foi representando as coordenadas cartesianas, destacando que o primeiro número do par ordenado correspondia ao deslocamento observado na direção do eixo *x*, e o segundo número, do par ordenado, correspondia ao deslocamento no eixo *y*.

Finalizou a questão, destacando os valores dos pontos $B = (0,5)$, $D = (-4,0)$, $F = (0,-2)$ e $H = (3,0)$, pois eram pontos que uma das coordenadas era nula, ou seja, o ponto estava exatamente em cima de um dos eixos, e que nem sempre o zero é o primeiro algarismo do par ordenado.

As questões 2 e 3, após a leitura, imediatamente os estudantes apresentaram a resposta, e o professor apenas validou, afirmando que estavam corretos. A questão 4, em que muitos alunos não lembravam qual era o eixo das ordenadas, o professor, antes de sua leitura, fez o esboço da questão na lousa. Após ler a pergunta, completou que o eixo *y* era o eixo das ordenadas, observou algumas manifestações positivas e negativas dos alunos, e os mesmos responderam, prontamente, a resposta correta.

A tarefa realizada neste conjunto de aulas se assemelhou às demais atividades anteriormente propostas, no que se refere à necessidade dos estudantes em terem suas respostas validadas por uma autoridade intelectual, naquele momento. Foi percebido um conforto durante sua realização e uma tensão menor dos alunos diante da tarefa, e, aparentemente, poucos se sentiram pressionados com o que era solicitado e houve comentários dos alunos de que a lição tinha sido muito fácil e que o professor poderia passar mais atividades semelhantes.

Na segunda etapa da atividade, aconteceram interações que expressavam poucas dúvidas procedimentais, com a maioria dos diálogos sobre aspectos conceituais, por parte do professor, e respostas rápidas e corretas, em ambas as turmas, por parte dos alunos.

4.3.6 Intervenção 6 – Atividade 4: Ideias de Funções

O docente iniciou as aulas explicando as instruções da Atividade 4 – Ideias de funções, enquanto distribuía as folhas nos agrupamentos de dois alunos, como nas demais atividades. Antes mesmo de apresentar as demais diretrizes da aula, foi interrompido por um aluno que dizia que não tinham aprendido o que era função. O professor fez uma pausa, e disse que se tratava de uma atividade que buscava saber o que eles já sabiam sobre o tema, ainda que não tivessem sido formalmente apresentados a eles.

Continuando com seu planejamento, o professor destacou que a aula seria dividida em duas etapas, como na atividade da aula anterior, com um tempo pré-determinado para responderem à atividade, e que utilizaria os trinta minutos finais da aula para discussão dos pontos que não foram compreendidos perante o que fora solicitado.

As questões 1 e 2 não foram muito desafiadoras aparentemente para, ambos os grupos, surgindo apenas dúvidas dos estudantes quanto à lei de formação que era solicitada nas duas questões. O professor respondeu com a seguinte frase: *"– Lei de formação é a expressão matemática que pode traduzir a situação problema apresentada".* Complementou que mesmo que não tivessem sido apresentados a esse conceito com esse nome (lei de formação), deveriam em algum momento, terem se deparado com ele. Deviam buscar expressões que possibilitasse calcular o salário de Alessandra (personagem da situação problema) e que retratasse o funcionamento da fotocopiadora.

Algumas duplas compreenderam e realizaram corretamente ou de maneira parcialmente correta o item; outros compreenderam, mas não se sentiram confortáveis em escrever a expressão; e uma parcela continuava não compreendendo o que era solicitado.

Aos alunos se depararem com o diagrama das questões 3 e 4 disseram, em sua maioria, não saberem responder. Portanto, logo o professor se dirigiu a lousa e disse que escreveria uma "dica" para ajudá-los. Essa mediação despertou otimismo nos alunos, e o professor anotou na lousa: *"Dica: Busquem identificar se há uma relação de dependência entre grandezas/números nestes problemas".* Os alunos demostraram baixa compreensão diante da "dica", então o professor completou dizendo que precisavam articular raciocínios, entre eles, que percebessem se havia ou não essa relação de dependência nas situações.

Houve uma maior interação e comunicação entre as duplas, maior que o observado nas atividades anteriores, ainda assim, grande parte dos alunos manifestou dificuldades em compreender e esboçar raciocínios que levassem à solução. Foram alertados que podiam deixar a questão em branco, se não soubessem.

Para o início da segunda etapa da atividade, o professor recolheu as atividades impressas e adotou a mesma estratégia expositivo-dialogada da aula anterior. Os alunos podiam permanecer em seus agrupamentos, pois ele faria a leitura da questão e discutiriam as estratégias de resolução, além de esclarecer as dúvidas e anotar a resposta correta. Ressaltou aos alunos que as anotações das respostas em seus cadernos eram facultativas.

Aparentemente os alunos demonstraram que resolver às questões 1 e 2 não era desafiador para sua compreensão, e até mesmo o uso da lei de formação, nas duas situações, foi sugerido nas respostas de alguns alunos durante a resolução; e uma boa parte dos estudantes apresentaram expressões de compreensão do que estava sendo discutido.

A terceira pergunta era de alternativa, o professor fez o diagrama na lousa, e então o foi lendo cada alternativa, e por exclusão, mostrando a alteração no diagrama que o item sugeria, o que permitia que pudessem eliminar assim as alternativas incorretas, com o cuidado e atenção de retomar a dica que havia ressaltado na primeira etapa da aula.

Os estudantes consideraram que poderia haver mais de uma alternativa correta, visto que um dos itens (c) sugeria que retirassem os elementos que "sobravam", sem estabelecer relações entre si. No entanto, o professor, já utilizando um vocabulário específico ao ensino de funções polinomiais, sem a pretensão de que aprendessem naquele momento, justificou porque era um item falso, acrescentando como justificativa uma analogia dele com sua imagem em um espelho, que não podia ter duas imagens diferentes, como o elemento a que tinha duas imagens diferentes x e z.

Na questão 4 o docente fez o diagrama da pergunta na lousa, e percebeu que uma parte considerável dos estudantes tinha dúvidas que decorriam da dificuldade de interpretar a pergunta do item (a). Após fazer a leitura com eles, obteve uma resposta dividida entre os estudantes das turmas. E completou dizendo: *"– Sim, pois cada elemento do domínio A* (indicou na lousa a imagem associada ao domínio A) *possui uma só imagem* (indicou a seta para cada elemento do domínio A ligado a um elemento do contradomínio B) *no contradomínio B"* (indicou a imagem associada ao contradomínio B). Ao ler a pergunta do item (b), de forma unânime disseram ser uma função, o professor só anotou e validou a resposta dos estudantes.

Ao discutir novamente a lei de formação, porém agora com sua visualização em um diagrama e não em um problema, o docente indicou que buscassem perceber qual operação matemática precisavam fazer com os valores do conjunto A, para obter como resposta os números do conjunto B, relacionados pela seta. Neste momento as turmas apresentaram discussões distintas.

A turma que possuía estudantes do Grupo A, depois de alguns palpites refutados pelo professor, obteve como uma sugestão de resolução por um aluno: *"– É o número vezes ele mesmo"*; outro estudante completou: *"– É o número ao quadrado".* O professor, sem validar a resposta, testou a hipótese dos estudantes, e ao término do teste, apresentou a hipótese levantada como verdadeira.

A outra turma, na qual pertenciam alunos do Grupo B, após um tempo de reflexão sobre a questão e testando algumas hipóteses levantadas por eles, o professor percebeu que não conseguiam propor uma hipótese que se mostrasse solução para o problema. Os pensamentos dos estudantes ficavam limitados as operações de adição e subtração com uma constante, portanto, o professor sugeriu a potenciação como alternativa, chegando assim, na resposta correta.

O último item da questão 4, solicitava o registro dos pares ordenados, e os estudantes foram ditando o par ordenado e o professor anotando, de acordo com a convenção já discutida na aula anterior. Mostraram compreender sem problemas.

O professor percebeu que os alunos estavam com dificuldades de compreender quando utilizava a palavra função, então logo após utilizá-la, acrescentava a frase, adaptando-a ao contexto, *"relação de dependência"* e que se há relação entre grandezas consideramos que *"– Algo está em função de algo"*. Retomando os problemas do salário da funcionária e números de impressões da fotocopiadora.

Alguns alunos realizaram cálculos mentais na questão 1 e apresentaram dificuldades em compreender o significado das variáveis *n* e *t* na questão 2.

Na última pergunta, quanto à lei de formação, nas duas turmas os alunos perguntaram se sempre a lei de formação seria x^2, então o professor apresentou dois exemplos de diagramas que não obedeciam a essa expressão. Então, que dependia da situação analisada.

O tópico da atividade se mostrava novo aos estudantes, e, então, foi observado, por alguns, certa resistência em resolver às questões 3 e 4, por não terem sido "formalmente apresentados" ao assunto.

Apesar de deixar claro que era uma atividade de sondagem dos conhecimentos prévios sobre o tema, eles associavam que como a atividade serviria como um instrumento de avaliação de aprendizagens, tinham que acertar as respostas.

As comunicações entre as duplas nesta atividade tiveram um caráter diferente das demais, buscavam compartilhar as respostas e não alternativas de resolução ou dúvidas conceituais.

4.3.7 Intervenção 7 – Experimento esticando a mola (parte 1)

O ambiente foi organizado com a chegada do professor, que pediu que três carteiras fossem colocadas próximas à lousa, na frente da sala. Após serem posicionadas no local pedido, distribuiu um kit experimental[11]sobre cada mesa e pediu que os alunos se agrupassem de forma que não ultrapassassem o limite de 5 estudantes. Distribuiu os roteiros experimentais para os grupos e uma calculadora. Os alunos mostraram-se surpresos com o tamanho da tarefa, mas foram informados pelo docente, que era uma atividade programada para a semana toda, ou seja, contemplaria seis aulas.

O docente pediu que três grupos se voluntariassem para começar a coleta de dados, e que um estudante de cada grupo pegasse o roteiro experimental e um lápis para os registros. Cada kit experimental continha: um suporte com régua em plástico; arruelas metálicas com a massa especificada previamente pelo professor; uma mola metálica; e um gancho de metal conforme ilustrado na Figura 13 abaixo.

[11]Kit experimental distribuído pela Sociedade Brasileira de Física (SBF) e pertencente ao acervo particular do professor/pesquisador adquirido durante o XXII SNEF (Simpósio Nacional de Ensino de Física). Composto por suporte e régua graduada em centímetros, ambos em plástico, mola metálica, arruelas metálicas com massas aferidas em uma balança de precisão e gancho metálico.

Figura 13 - Aparato experimental

Fonte: Arquivo do autor.

Com os três grupos à frente, tinham o desafio de ler o roteiro, montar o aparato experimental e colher os dados, com supervisão e algumas recomendações do professor neste processo. Aos demais estudantes, o professor sugeriu que lessem o roteiro experimental, mas estavam curiosos para acompanhar o desenvolvimento dos três grupos iniciais.

O docente sugeriu aos três grupos, posteriormente aos demais grupos coletores de dados, que elegessem apenas um aluno para fazer as observações de distensões da mola, sendo alertados sobre o erro experimental associado ao observador.

Estes três grupos iniciais levaram um maior tempo na coleta de dados, visto que era tudo uma novidade para eles. Ao final da coleta, os grupos tinham que guardar o kit experimental na caixinha, para que o próximo grupo abrisse e verificasse os itens constantes no roteiro com os encontrados na embalagem. Estratégia adotada pelo professor para garantir o controle do material, que não se extraviasse entre a coleta de dados de um grupo e outro, e também proporcionar a experiência de cuidar e zelar dos equipamentos experimentais, ainda que fossem simples.

Os demais agrupamentos, seguindo os exemplos dos que os antecederam, fizeram com maior facilidade. Observando a dificuldade na coleta de dados de alguns grupos, houve mediações entre os colegas de grupo e, em alguns casos, do professor. De forma recorrente, eles substituíam as massas, ao invés de ir adicionando-as, quando apresentavam esse comportamento, eram levados à leitura do roteiro experimental e compreendiam as etapas com maior clareza. Outros começaram adicionando a arruela de menor massa (P) e não causava uma distensão observável na mola, então também eram orientados a retomar a leitura do roteiro e perceber que começava da arruela de maior massa (GG) para a de menor massa e que precisavam anotar essas variações no comprimento da mola (Δx) a cada arruela (massa) acrescentada.

Ao finalizarem a coleta de dados, tinham que preencher a tabela que solicitava a conversão das unidades de medidas das grandezas massa e comprimento que utilizaram para as unidades de medida adotadas pelo Sistema Internacional de Medidas. Foram disponibilizadas uma calculadora e uma dica no roteiro experimental para que cumprissem essa etapa, e não observamos dificuldades associadas a esses procedimentos nos dois grupos.

A última tarefa dos grupos era responder às questões 1 e 2 do roteiro, que buscavam compreender a ideia de proporcionalidade direta ou inversa envolvida naquela situação experimental e que relatassem o que eles observavam com aquela prática experimental. Surgiram grupos que queriam que o professor definisse o que era uma proporcionalidade direta ou inversa, no entanto, obtiveram a negativa da definição e que deviam responder de acordo com a compreensão do grupo.

O professor se manteve o tempo todo atento às demandas dos grupos, que por ter apenas três kits experimentais, culminou em cada grupo se apresentar em uma etapa diferente no roteiro experimental, necessitando de uma agilidade nos esclarecimentos das dúvidas. Não houve explicações gerais, além das instruções iniciais, e as recomendações e esclarecimentos eram voltados para a necessidade de cada grupo. Finalizou a aula guardando os kits e os roteiros experimentais dos grupos e organizando a sala de aula.

4.3.8 Intervenção 8 – Experimento esticando a mola (parte 2)

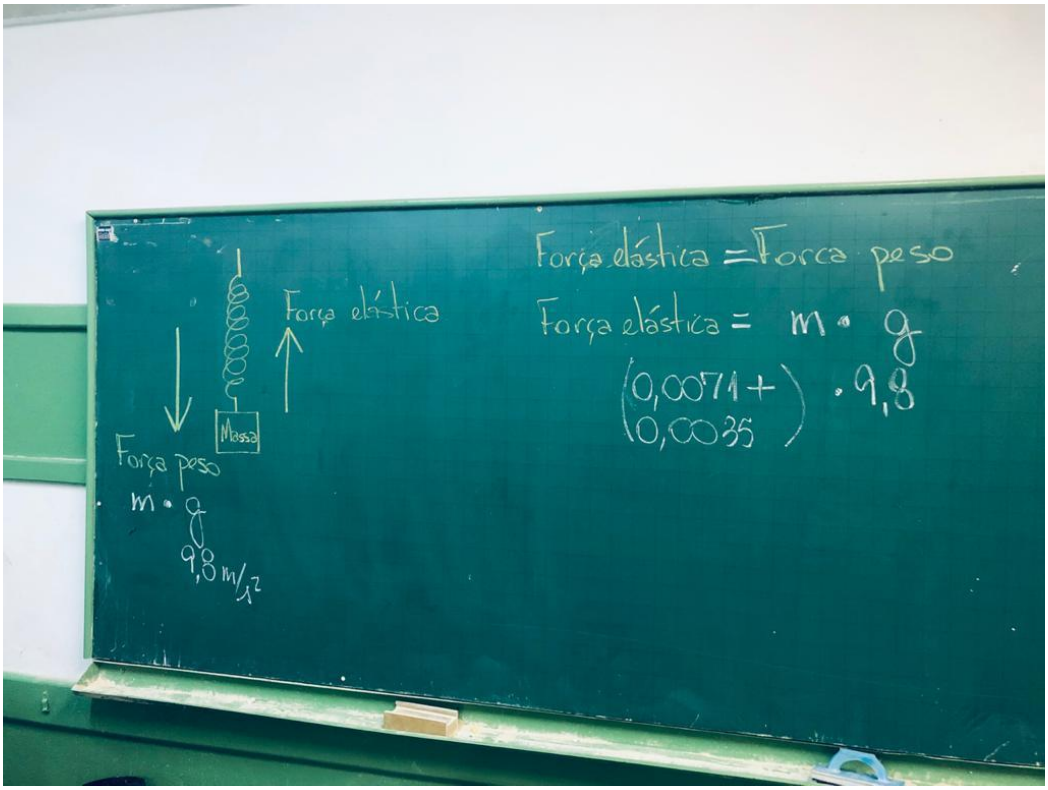
Ao entrar na sala o professor pediu aos estudantes que se reunissem em seus grupos experimentais e entregou novamente os roteiros para os estudantes, juntamente com uma folha de papel quadriculado e uma calculadora. Antecipou a tarefa que realizariam, dizendo que calculariam a força elástica, montariam pares ordenados, preenchendo toda a tabela da questão 3, construiriam um plano cartesiano com os pontos da tabela anteriormente preenchida e responderiam os itens (a) e (b) da questão 4.

Antes que iniciassem qualquer procedimento, foram surpreendidos por uma pergunta geradora. O docente indagou aos alunos *"– O que faz com que a mola estique?"*, e obteve como respostas dos estudantes *"– O peso."; "– A gravidade."*.

O professor pegou um kit experimental, montou rapidamente em um lugar estratégico da sala para que pudessem enxergar, e retomou o experimento com a turma. Mostrou que enquanto a mola oscilava, tinha uma "disputa" entre os valores da força elástica (puxava a massa para cima) e a força peso (puxava a massa para baixo), mas quando a oscilação parava dizíamos que o sistema estava em equilíbrio, e naquela nova situação as forças elástica e peso, eram equivalentes. O professor fez um esquema na lousa, ilustrando o sistema explicado e relacionando a força elástica e força peso.

Apresentou a 2ª Lei de Newton como sendo $F = m \cdot a$ e que pela resultante das forças serem nulas na situação em análise, consideraríamos o sistema em equilíbrio, sendo assim poderiam considerar a força elástica equivalente à força peso. Acrescentou que para calcular a força peso precisariam de um valor para a aceleração, que seria a aceleração da gravidade (valor especificado no roteiro experimental $g \cong 9{,}8 m/s^2$). Com isso, foi montada a expressão $F_{el} = F_p$, e em conjunto foram preenchendo a coluna que solicitava os valores da força elástica. A Figura 14 mostra a discussão sobre a equivalência entre as forças elástica e peso, e como o professor auxiliou no cálculo da força elástica, destacando a necessidade de somar alguns valores de massa.

Figura 14 - Discussão sobre a equivalência entre as forças elástica e peso.

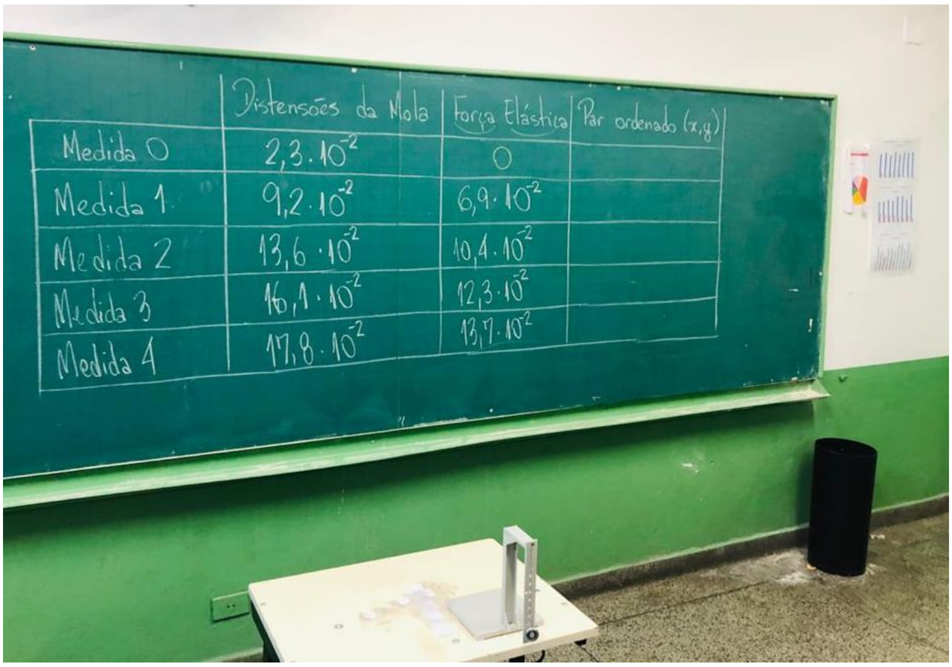


Fonte: Arquivo do autor.

Para montagem do par ordenado que os alunos localizariam no plano cartesiano e que construiriam, o docente sugeriu que os estudantes colocassem os valores das tabelas em notação científica, com a especificidade de manter o expoente da base 10 fixa (10^{-2}), e que entenderiam o motivo mais à frente. Sabiamente, estudantes do Grupo A alertaram o professor que alguns valores não estavam em notação científica, pois o número que multiplica a potência de base dez era maior que 10. Foram parabenizados em público pelo professor, que corrigiu sua fala, para colocarem os números escritos sob a forma de potências da base 10.

Finalizando o preenchimento da tabela e dos valores que iriam compor, escritos como uma potência de base 10, o professor completou sua tabela na lousa (Figura 15), e justificou o motivo de tal orientação. Disse que para que pudessem representar os valores decimais muito pequenos, de forma compreensível no plano cartesiano, tinham que colocá-los em uma mesma ordem de grandeza, e também ajudou os estudantes a determinar a melhor escala para seu plano cartesiano.

Figura 15 -Tabela preenchida pelo professor



Fonte: Arquivo do autor.

O experimento contou com três molas metálicas com constantes elásticas distintas. Duas delas com elasticidades próximas (mais rígidas), e a terceira com uma elasticidade maior (menos rígida). A Figura 16 ilustra a elasticidade das molas com três arruelas de massas aproximadamente iguais.

Figura 16 - Elasticidade das molas

Fonte: Arquivo do autor.

Para os estudantes que coletaram os dados nas molas menos elásticas, o docente sugeriu que utilizassem um espaçamento de 5 quadradinhos no eixo *x* (distensão da mola) e de 2 quadradinhos no eixo *y* (Força elástica) para cada unidade. Os demais estudantes fariam uma escala em que cada unidade, em ambos os eixos (*x* e *y*) teriam o espaçamento de 2 quadradinhos. Passou verificando a compreensão dos grupos, e auxiliando-os quando necessário e retornou a lousa para mostrar como localizar pontos com números decimais. Apresentou dois exemplos, dizendo que era uma localização aproximada, e deixou que os demais pontos fossem localizados por eles.

A turma dos estudantes do Grupo A pediam a verificação e validação da localização de seus pontos e não encontraram dificuldades em determinar suas posições aproximadas. Em contrapartida, a turma dos estudantes do Grupo B encontrou muita dificuldade em localizar os pontos, determinar a escala correta, dificuldade também verificada nas etapas anteriores, que foram: o cálculo da força elástica e a transformação dos valores em números escritos como potência de base 10.

No momento da aula em que era para localizar os pontos, alguns grupos perceberam inconsistências em suas informações. Ao chamarem o professor, o mesmo alertou para que revisassem os cálculos da força elástica novamente. Para finalizarem a tarefa do dia, os alunos responderam à quarta pergunta e após isso, entregaram o roteiro para o professor e organizaram a sala.

Grande parte dos alunos envolvidos nas duas etapas experimentais realizadas, demonstrou compreensão dos conceitos físicos envolvidos e a relação de dependência envolvida entre a massa e a distensão da mola. Fragilidades apresentadas em alguns processos matemáticos comprometeram a entusiasmo de alguns grupos com a segunda etapa do roteiro experimental, ainda que a calculadora estivesse ao alcance deles.

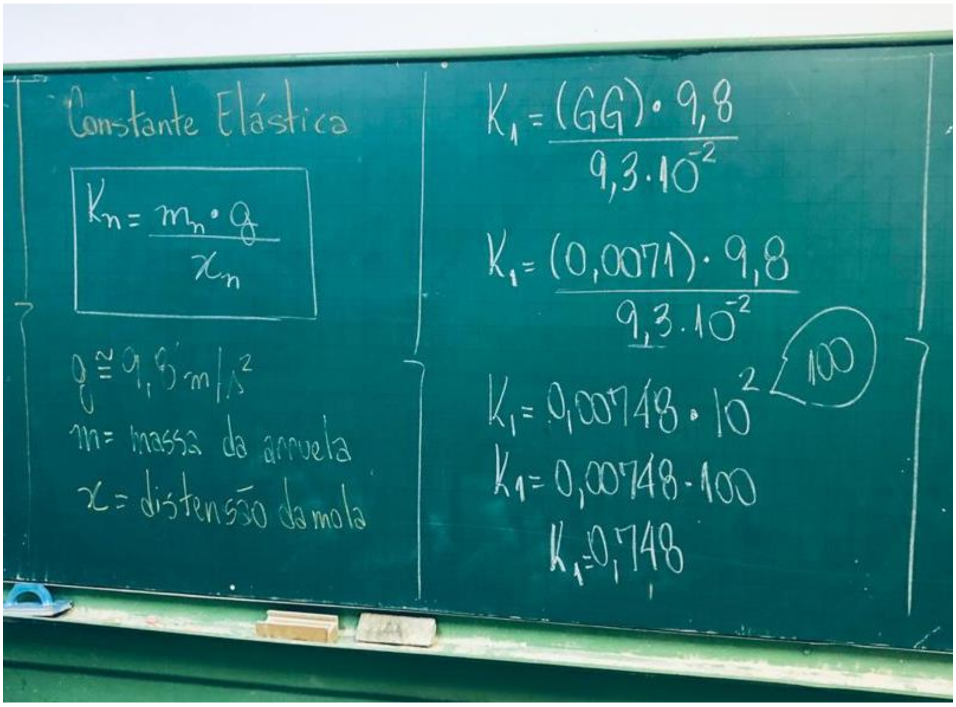
Houve discussões secundárias em alguns grupos sobre técnicas de arredondamento, as quais foram necessárias recorrer, em alguns momentos da aula.

4.3.9 Intervenção 9 – Experimento esticando a mola (parte 3)

A finalização da atividade experimental pelos estudantes iniciou com os agrupamentos dos integrantes de cada grupo e a entrega do roteiro experimental. O objetivo das aulas consistia em responder à questão 5, com o cálculo da constante elástica por meio de uma expressão algébrica e as opiniões, sugestões e comentários que deixariam na questão 6, fechando o roteiro da atividade experimental.

Para o cálculo da constante elástica (k), o professor foi à lousa e reproduziu a mesma expressão algébrica que constava no roteiro dos alunos. (Figura 17)

Figura 17 - Mediação do professor para o cálculo da constante elástica (K)



Fonte: Arquivo do autor.

A turma que possuía alunos pertencentes ao Grupo A, o professor demonstrou como fazer o cálculo do k_1 (valor referente à primeira medida) e orientou para que realizassem os demais, utilizando as outras três medidas que possuíam, atentando-se para os valores das massas, assim como no cálculo da força. A turma conseguiu realizar os demais cálculos sozinha, quando acabavam chamavam o professor, que verificava e validava ou não os resultados.

Se os resultados estivessem corretos, o professor discutia com o grupo o significado daquele cálculo, o porquê, apesar de ser a mesma mola, os valores não eram exatos para a constante elástica e também qual era o significado do valor médio encontrado para a constante elástica (rigidez da mola). Orientava-os a concluir o roteiro respondendo à questão 6 e adotou esse procedimento para todos os grupos da turma.

Na outra turma, com estudantes do Grupo B, apesar de adotar o mesmo procedimento, ao solicitar que calculassem a constante elástica com a segunda medida, ou seja, o k_2, o professor percebeu que ainda não tinham compreendido o raciocínio expresso no exemplo dado, e muitos grupos o chamavam relatando não terem entendido.

Diante disso, o docente resolveu retomar o procedimento novamente, calculando a constante elástica com as segundas medidas (k_2), junto com os alunos. Quando solicitou que calculassem, utilizando as terceiras medidas (k_3), montou a expressão coletivamente substituindo os valores das massas e a terceira distensão da mola, porém não concluiu o cálculo. Circulou pela sala, para auxiliá-los e, quando todos acabaram seus cálculos, ele retornou à lousa e concluiu o seu resultado. Recorreu ao procedimento novamente, porém não colocou nenhum valor na fórmula, apenas indicou a soma das massas como elas eram nomeadas (GG, G, M e P) e pediu que eles prosseguissem. Voltou a caminhar entre os grupos e orientá-los caso surgissem dúvidas, que reduziram significativamente em relação ao primeiro cálculo da constante elástica.

Após os alunos calcularem a constante elástica com as quatro medidas experimentais, o professor concluiu seu quarto cálculo e, aproveitando que seus quatro resultados se encontravam na lousa, solicitou a atenção dos alunos. Arredondou os resultados, explicando brevemente os critérios de arredondamento, disse aos estudantes a proximidade encontrada entre os valores e discutiu o significado diferente das constantes elásticas encontradas pelos grupos, justificando com aspectos relacionados à natureza da ciência experimental. Finalizou pedindo que respondessem à questão 6 e entregassem o roteiro.

O tempo destinado à atividade experimental foi adequado, no entanto as turmas responderam de forma distinta à atividade e foi necessário buscar abordagens diferentes em alguns momentos para respeitar a especificidade de cada grupo. O uso da calculadora não se mostrou um desafio, sendo na verdade uma ferramenta que colaborou em muitos momentos para não tornar mais desafiador os cálculos matemáticos.

4.3.10 Intervenção 10 – Discussão do experimento esticando a mola

O professor iniciou a aula pedindo aos estudantes que permanecessem em seus lugares habituais, sem que se organizassem em grupos, pois seria uma aula expositivo-dialogada sobre todo o percurso proposto pelo roteiro experimental. Não tinham a obrigatoriedade de fazer registros em seus cadernos e o foco da aula se encontrava no diálogo professor-aluno.

Os alunos foram incitados a levantar suas memórias sobre o que fizeram na primeira etapa da atividade experimental. Disseram que precisavam anotar o comprimento da mola, conforme iam colocando massa. Completaram que só uma pessoa podia verificar essa elongação e tinham que responder as primeiras questões. O professor chamou para si a atenção das turmas e relembrou que a massa e a distensão da mola verificada se tratavam de grandezas diretamente proporcionais. Leu as duas primeiras questões do roteiro experimental e anotou as respectivas respostas na lousa, dizendo que era a resposta que esperava obter dos estudantes.

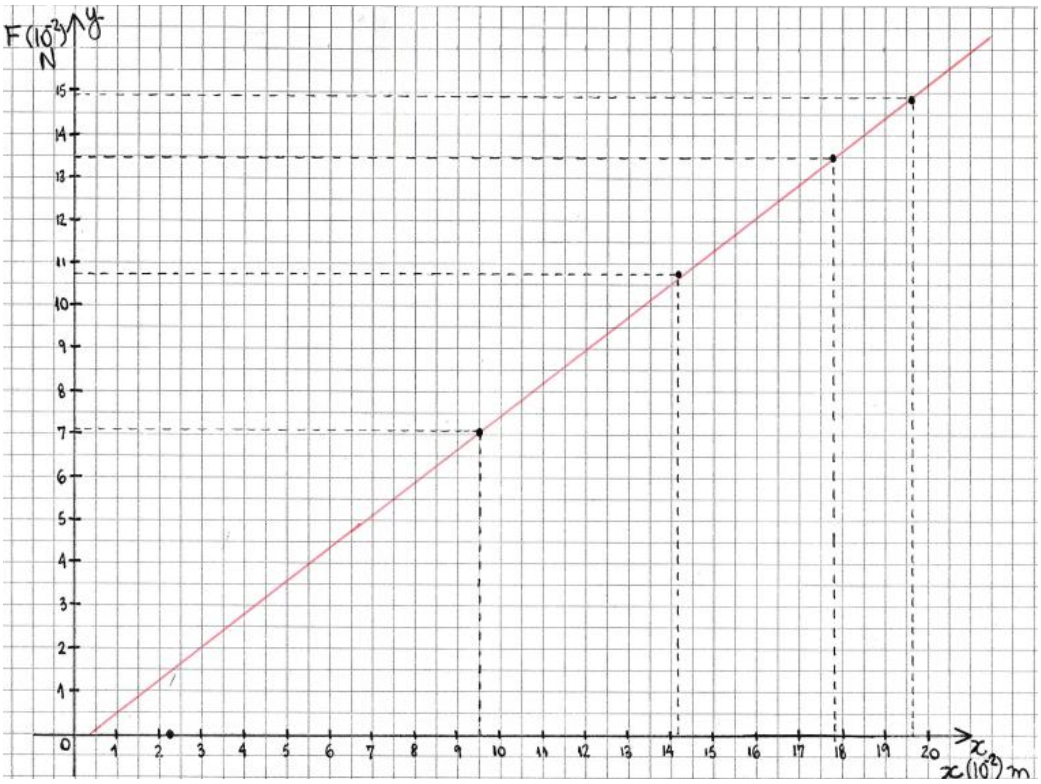
Deu prosseguimento novamente pedindo que contassem as memórias do segundo dia de discussão do roteiro experimental. Disseram que tinham que calcular a força e fazer o gráfico. Então, o professor ressaltou que pelo fato do sistema estar em equilíbrio, podiam usar a 2ª Lei de Newton – $F = m \cdot a$ para afirmar que a força peso era equivalente à força elástica, ou seja, possuíam o mesmo valor e direção, porém tinham sentidos opostos. Optou por não usar a expressão (mesmo módulo) e sim mesmo valor.

Discutiu com os estudantes que a unidade de medida para força era chamada de Newton, assim como a unidade de medida de massa era o quilograma e de comprimento era o metro, e por isso solicitou aos estudantes que fizessem a conversão das unidades de medida. Apresentou aos alunos seus dados, dizendo que também os tinha coletado, utilizando a mola metálica menos rígida, e retomou o cálculo da força elástica.

Em seguida, o professor fez a leitura da questão 4, item (a), e perguntou se eles achavam que poderia passar uma reta por todos os pontos. Em sua fala, deu destaque à palavra TODOS, e com isso os alunos, em sua maioria, disseram que TODOS não. O professor completou dizendo que, realmente, todos não era possível, que por se tratar de uma situação experimental, que está influenciada por muitas imprecisões, por todos era muito improvável.

Prosseguiu lendo a pergunta 4 item (b), que indagava se a reta seria a melhor representação daqueles pontos. Uma parcela de estudantes disse que sim, outros disseram que não, então o professor rapidamente destacou de seu roteiro a construção de seu plano cartesiano, e mostrou aos alunos, disponibilizando para que circulasse pela sala o exemplo feito por ele. Destacou que apesar de não poder traçar uma reta por todos os pontos, a ciência experimental permitia que construíssem uma "reta média", ou seja, uma reta que melhor se ajustasse àqueles pontos. A Figura 18 a seguir, ilustra o plano cartesiano do professor/pesquisador, feito com os dados coletados pelo mesmo.

Figura 18 -Plano cartesiano elaborado pelo professor pesquisador



Fonte: Arquivo do autor.

No exemplo apresentado pelo professor, apenas o primeiro ponto experimental não pertencia à reta, e disse que conseguiu tal resultado porque com a experiência que tinha, tentou minimizar todos os erros experimentais existentes. Discutiu com detalhes o erro do observador, o erro do instrumento e o erro de arredondamento, e por uma atividade experimental ser carregada de imprecisões causada por esses erros e alguns outros como a paralaxe, eram necessários em muitos casos fazer uma coleta mais extensiva de dados e recorrer a valores médios como resultados.

Concluindo esta discussão sobre a natureza da atividade experimental, o professor pediu que retomassem o que haviam feito no último dia do roteiro experimental. Falaram que tinham que calcular o *k*, porém quando indagados sobre o que era o *k*, ninguém se arriscou a responder. O docente então retomou a fórmula de cálculo da constante elástica na lousa e fez um exemplo utilizando a primeira medida k_1, e disse que fazendo o mesmo cálculo para as demais medidas, tinham quatro valores de *k*, isso implicava que tinha um valor aproximado de constante elástica.

O professor finalizou a discussão comparando os dois valores aproximados de constante elástica da mola dos experimentos relacionando o valor maior, a mola mais rígida e o valor menor a mola mais flexível. Perguntou aos alunos qual a finalidade de saber a constante elástica de molas e obteve um silêncio como resposta, então acrescentou que era fundamental saber a constante elástica para alguns equipamentos que utilizavam mola, pediu exemplos e sugeriu outros aos alunos, sendo destacados: carros com molas em seus amortecedores, cama elástica de crianças, trampolim e tablado de solo na ginástica artística e até mesmo canetas. Perceberam a diversidade de aplicações e a aula foi concluída elencando na lousa a quantidade de conhecimentos mobilizados na atividade.

Durante a explicação sobre os erros experimentais, os estudantes mostraram-se surpresos com a quantidade de erros associados a uma atividade experimental e ficaram aliviados em saber que não havia um “valor correto”. Perceberam a aplicabilidade e relevância do estudo sobre as molas, inclusive exemplificando locais nos quais eram possíveis encontrar molas (carros e cama elástica).

Os estudantes consideraram uma atividade trabalhosa, difícil em algumas etapas, porém elogiaram a proposta de abordagem do tema.

4.3.11 Intervenção 11 – Atividade 5: Relações de Proporcionalidade

Após um conjunto de aulas ministradas pelo professor, sem que tivesse qualquer tipo de interferência das perspectivas desta pesquisa sobre o tema funções escolhido, o docente buscou no decorrer das aulas contemplar discussões sobre: o conceito de função; as relações de proporcionalidade direta e inversa e a não proporcionalidade; o zero das funções polinomiais de 1º e 2º graus; comportamento e construção dos gráficos de funções polinomiais do 1º e 2º graus; vértice da parábola; e discriminante (Δ) e coeficiente *a* da função polinomial de 2º grau e suas implicações nos gráficos.

Logo após esse conjunto de aulas, o docente novamente retomou a estratégia de permitir o agrupamento dos estudantes em duplas e orientou que os mesmos respondessem a Atividade

5 – Relações de Proporcionalidade, porém não restringiu consulta aos registros pessoais, no entanto, calculadora e aparelhos eletrônicos estavam proibidos.

Para a primeira questão, os alunos apresentaram um nível de compreensão satisfatório e não fizeram perguntas sobre o que era solicitado, porém a partir da questão 2, dúvidas cada vez mais frequentes passaram a acontecer. A segunda questão solicitava que identificassem se as tabelas apresentavam relação de proporcionalidade direta, inversa e ou se não havia relações de proporcionalidade entre seus valores. Caso existissem relações proporcionais, qual era a lei de formação. Muitos alunos se atentaram a dizer se eram direta ou inversamente proporcionais ou se não havia proporcionalidade entre os valores, mas, no entanto, ainda era um obstáculo estabelecerem uma lei de formação.

As questões 3 e 4 sondavam a mesma habilidade dos estudantes, obtendo resultados semelhantes, apesar de muitos preencherem os espaços vagos da tabela corretamente.

A quinta questão da atividade buscava a compreensão dos alunos sobre a mesma habilidade, porém com situações-problema, e solicitava que caso percebessem uma relação de proporcionalidade entre as grandezas, que expressassem algebricamente indicando o respectivo valor da constante de proporcionalidade envolvida. Grande parte dos estudantes reconhecia as situações que envolviam relações de proporcionalidade, mas não construía expressões matemáticas que as representassem.

Em todas essas situações, o professor não interferiu no raciocínio que os alunos manifestavam, e instruiu que se não conseguissem montar a expressão matemática, não haveria problema.

Na sexta questão, o docente foi à lousa para explicar aos estudantes, pois diversos relatos durante a aula foram surgindo, dizendo que não estavam mais entendendo as questões. A sexta e sétima questões evidenciaram a dificuldade de compreensão do problema associado à dificuldade de associação a uma expressão matemática, que pudesse resolvê-lo. Contudo, o professor interpretou o problema com os alunos e calculou o item (a) e disse que utilizassem a resposta encontrada no item (a) juntamente com a expressão do enunciado da questão para resolver as demais. Alguns alunos não concluíram a questão e outros apresentaram acertos parciais.

A questão 7 não sofreu nenhuma mediação do professor no que se referia à resolução da equação, que apenas fez a leitura, interpretou com os alunos o que era solicitado, identificou as variáveis com os estudantes e esperou que concluíssem o cálculo por conta própria.

Neste momento a aula já se aproximava do término, a atividade se mostrou mais complexa que a atividade experimental. Alguns alunos completaram a questão 8, outros resolveram parcialmente e outros não concluíram por causa do tempo. A última questão gerou problemas associados à interpretação nos itens (c) e (d) porque as frases diferiam em apenas uma palavra, e como a concentração e atenção já estavam afetadas, apresentaram respostas contraditórias nesses itens.

Nas mediações feitas pelo professor para esclarecer as características de grandezas direta e inversamente proporcionais, o professor usou uma analogia muito usual, uma receita culinária, em que relacionava a quantidade de porções e a quantidade de cada ingrediente. Ao exemplificar esta situação como diretamente proporcional, disse que se acontecesse o inverso, se dobrasse uma das grandezas e a outra caísse pela metade, estariam diante de uma relação de proporcionalidade inversa. Caso não identificassem nenhuma das relações descritas, não havia proporcionalidade entre as grandezas.

A atividade 5 se mostrou muito limitada quantos aos objetivos que se esperava alcançar, os estudantes saíram muito confusos com as questões propostas, impactando em uma reflexão do professor, culminando em uma reformulação da Atividade 6 – Gráfico de Funções, que inclusive já se encontrava elaborada, mas foi reavaliada antes de sua aplicação.

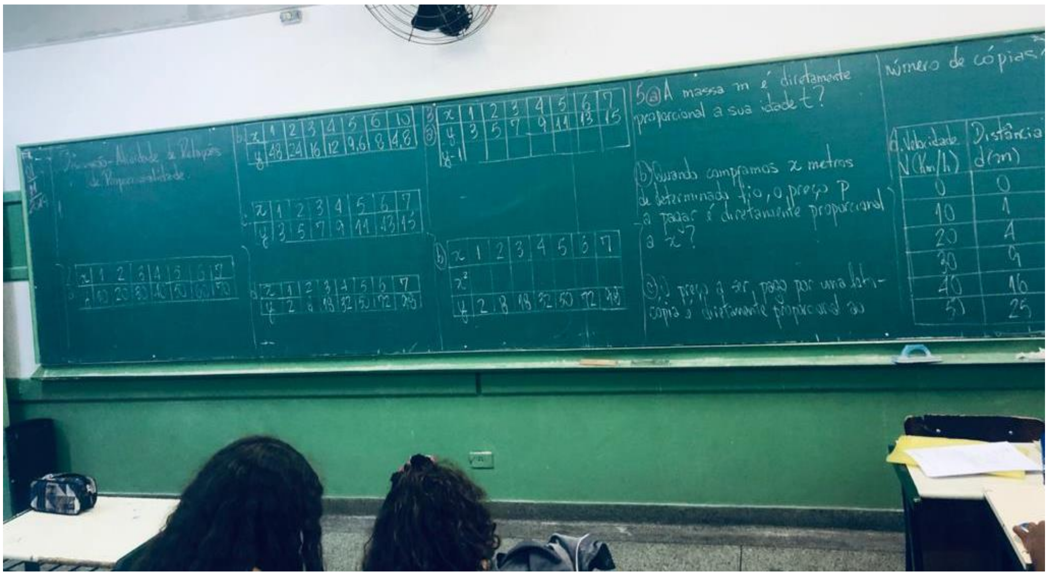
Foi um grande desafio para os alunos articularem a correta interpretação do que o problema estava solicitando com a adequada resolução do mesmo. As questões 6, 7 e 8, potencialmente, não estavam adequadas aos estudantes, no momento da aprendizagem que se encontravam.

4.3.12 Intervenção 12 – Discussão da Atividade 5: Relações de Proporcionalidade

Seguidamente às aulas que foram utilizadas para a resolução da Atividade 5, mostrou-se necessário discutir claramente os objetivos de cada questão, bem como suas resoluções. Os estudantes foram orientados pelo professor que acompanhassem e participassem das discussões de cada questão e que registrassem em seus cadernos as questões e resoluções. A aula foi organizada para que toda a atividade fosse discutida.

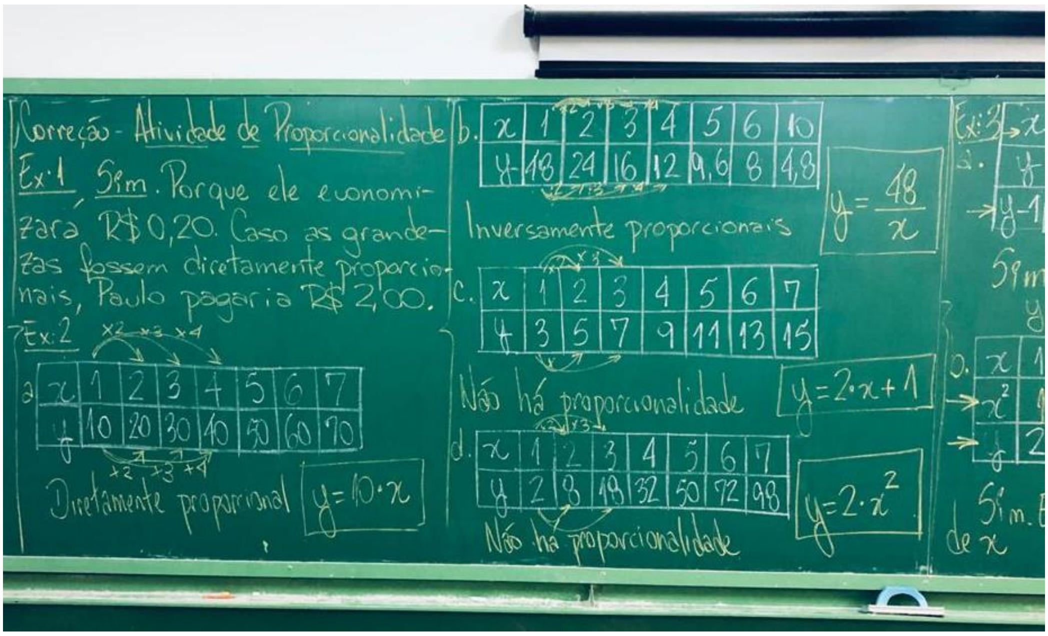
Ao terminar as orientações o professor preencheu a lousa com as primeiras questões da atividade 5 a ser discutida, reservando o espaço para suas resoluções e disponibilizou um tempo para que os estudantes pudessem anotar (Figura 19).

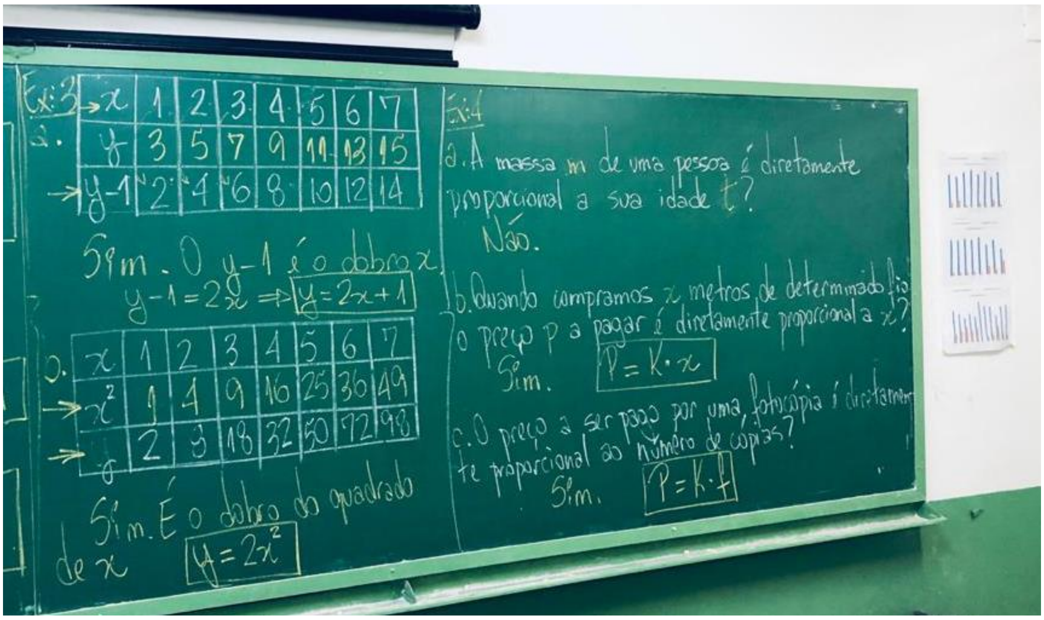
Figura 19 - Período de registros das questões da atividade 5



Fonte: Arquivo do autor.

Figura 20 - Lousa com registros do professor, após as discussões com os estudantes





Fonte: Arquivo do autor.

A discussão da questão 1 iniciou e os alunos, claramente, observaram que o anúncio contido na segunda placa era mais vantajoso para os fregueses, sendo necessário apenas sistematizar a resposta por eles anunciada.

Com o avanço das discussões, o professor comentou sobre cada uma das tabelas com os estudantes e sistematicamente fez perguntas para as turmas, buscando com que os alunos classificassem ou notassem a relação de proporcionalidade ou sua ausência, percebendo que gradativamente foram compreendendo a racionalidade envolvida. As turmas conseguiram falar a maioria das leis de formação relacionadas às tabelas e quando indagados sobre o nível de compreensão, respondiam estar entendendo os procedimentos.

Na questão 5, assim como durante a atividade, identificaram as relações de proporcionalidade e não proporcionalidade corretamente, e com a ajuda do docente apresentaram as expressões algébricas solicitadas, demonstrando compreensão dos procedimentos realizados pelo professor.

Com o preenchimento da lousa, foi dado um tempo aos alunos para anotações dos registros e após esse período, a lousa foi apagada e novamente preenchida com as questões restantes, disponibilizando o espaço necessário para suas respectivas soluções.

Foi retomada a interpretação dos problemas apresentados na questão 6 e 7, e com os diálogos em sala, o professor percebeu que a maior dificuldade era na compreensão do problema, já evidenciado na realização da tarefa nas aulas anteriores. Os procedimentos de cálculo que envolviam as equações disponíveis só apresentavam uma maior dificuldade quando os alunos tinham que reconhecer em qual das variáveis deveriam substituir os valores numéricos apresentados.

Finalizando a discussão e a aula, a questão 8, itens (a) e (b) não apresentaram dificuldades, preencheram a tabela sem auxílio do professor, e associaram corretamente a lei de formação correta. Antes de iniciar a leitura dos dois itens restantes, o professor solicitou que prestassem atenção à frase como um todo. Ao ler o item (c), conseguiram perceber que era uma afirmativa falsa, ainda que alguns manifestassem dúvidas e no item (d), após a leitura do docente, compreenderam que se tratava de uma relação diretamente proporcional ao quadrado da distância.

Foi uma aula que exigiu atenção e concentração por um período muito longo dos estudantes e uma organização entre registros e diálogos, que superou positivamente a expectativa do professor, que considerou a qualidade das mediações da aula bem promissoras.

O docente adotou uma postura já utilizada anteriormente, de questionar, usar contra-argumentos e validar soluções em determinados momentos, buscando explicar com cuidado as dúvidas que os alunos levantavam na aula. Ainda assim, ouviu relatos de alunos que disseram “não gostar” do assunto proposto e mantendo uma interação mais contida em determinados momentos, caracterizando uma aula mais expositiva por parte do professor e numa perspectiva de aprendizagem por recepção.

4.3.13 Intervenção 13 – Atividade 6: Gráfico de Funções

Devido à análise feita pelo professor da atividade anterior, percebeu uma necessidade de reavaliar todas as questões que iria propor e garantir que permanecessem as perguntas que estivessem mais adequadas à realidade de aprendizagens dos estudantes. Então, considerou reduzir o número de questões e manter as que abordariam o tema de maneira mais elementar e fundamental.

Ao adentrar a sala, o professor pediu aos estudantes que as duplas fossem formadas para a realização da Atividade 6 – Gráficos de Funções. Calculadora e aparelhos eletrônicos não eram permitidos e a aula seria fracionada em dois momentos, uma para realização e outro para discussão das estratégias adotadas para resolução.

Iniciaram a realização da tarefa sem grandes dúvidas, porém surgiram algumas relacionadas à palavra constante e também o que era uma grandeza direta ou inversamente proporcionais, no entanto, já conseguiam definir e queriam apenas confirmar se o que tinham como certo realmente era a definição correta, e poucos casos necessitaram de uma adequação na definição apresentada por eles.

Na questão 3 havia um gráfico, uma tabela e tinham que analisar o gráfico, preencher corretamente os valores da tabela e definir a natureza da relação entre as variáveis velocidade e tempo. Mostraram segurança e um alto nível de acertos neste item da questão, conseguiram reconhecer a relação de proporcionalidade inversa envolvida na situação.

Outro aspecto importante, é que neste hábito de procurarem a validação da resposta pelo professor, no item (c) da questão 3, algumas duplas expressavam corretamente, de forma oral, a lei de formação da situação em análise, porém registravam com algum erro no papel. Nestes casos, o professor interviu para que reavaliassem se o que diziam se traduzia na expressão escrita por eles. Os alunos pouco solicitaram a atenção do docente para realizarem a atividade, quando solicitavam a atenção do professor não era para obter explicações, mas para saberem se estavam certos ou errados, ou até mesmo se estavam corretos na definição que apresentavam.

As questões 3 e 4 não exigiam apenas um caminho para a resposta correta, podiam extraí-las do gráfico, da tabela ou até mesmo calcular por meio de expressões o que ampliou as possibilidades de raciocínios. Ao entregarem, quando indagados sobre a complexidade da tarefa, consideraram fácil, então na organização que mantinham, iniciou-se a discussão, atentando-os que o registro era facultativo.

Na questão 1, solicitou que os estudantes associassem uma representação gráfica à uma situação descrita. Enquanto o professor lia a situação, fazia o esboço na lousa, ao final da leitura tinha uma representação próxima a um gráfico apresentado na questão permitindo uma associação direta ao item correto. Procedeu assim em todo o exercício e os alunos, ainda que tivessem errado na sua resolução, perceberam o significado entre a frase e o gráfico.

A questão 2 exigia uma compreensão do gráfico apresentado e nos itens (a), (b) e (c) os estudantes acertaram significativamente; nos itens (d) e (e) a frequência de acerto diminuiu, porém um número maior de estudantes conseguiu reconhecer a constante de proporcionalidade e montar a lei de formação para aquela situação.

Na questão 3 também não apresentaram surpresas diante da estratégia adotada pelo professor, todos os estudantes dos Grupos A e B articularam corretamente os valores da tabela com os do gráfico. Os números na tabela que não possuíam correspondência no gráfico, evidenciaram que uma parcela de estudantes não reconheceu qual procedimento deveriam adotar para encontrar os valores corretos. Todas as duplas dos grupos pesquisados acertaram a relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas velocidade e tempo, transparecendo na interação feita em aula, um grupo maior também acertou a lei de formação desta situação, expressando-a durante a discussão.

Finalizando a discussão com a questão 4, o professor evidenciou que poderiam extrair as respostas recorrendo à tabela, ou ao gráfico, ou à lei de formação da função. Discutiu os zeros da função polinomial de 2º grau, relacionando aos valores de ingresso que correspondiam a um lucro nulo, e discutiu o valor de máximo lucro no ponto de máximo da função polinomial de 2º grau, indicando o vértice da parábola. Mostrou que os valores que se apresentavam no quarto quadrante, eram o que representava um prejuízo à banda.

Houve uma interação mais baixa na discussão, pois as respostas, para muitos já era conhecida. Os erros se concentraram na questão 4, devido a interpretação do problema e na visão dos estudantes o gráfico era mais sofisticado, em relação às questões anteriores.

4.3.14 Intervenção 14 – Experimento: Queda Livre

Os alunos foram recepcionados nestas aulas, na sala de leitura da escola, ambiente que o professor, minutos antes do início da aula, tinha organizado para utilizar com seu computador portátil e o projetor da escola. Os alunos sentaram em mesas redondas com quantidades variadas de estudantes por mesa, e como eram insuficientes, sentaram-se também entre as mesas, havendo a necessidade de buscar cadeiras extras na sala (Figura 21).

Figura 21 -Disposição dos alunos na sala para a intervenção didática proposta

Fonte: Arquivo do autor.

O professor ficou à frente, em uma mesa com seu computador e ao lado da tela de projeção. Atrás da tela de projeção tinha uma lousa, que em alguns momentos, foi utilizada pelo docente. Orientou aos alunos que se quisessem anotar conceitos, perguntas e respostas expostas poderiam fazê-lo, mas que o foco principal era o diálogo.

Iniciou seu planejamento com um vídeo[12] disponível no canal do YouTube – Espaço Ciência Online IPRJ que retratava o experimento feito por eles em sala, sobre a Lei de Hooke. Enquanto o vídeo era apresentado, o professor pausava e fazia referência dos passos do vídeo, com as etapas vivenciadas por eles. Ao término desse vídeo de retomada, o professor em um dos espaços da lousa, retomou que o modelo de função polinomial que estava associado à Lei de Hooke era de primeiro grau, e que o comportamento era uma reta, como já tinham discutido. Perguntou se estavam acompanhando disseram que sim, e então prosseguiu.

A pergunta geradora feita pelo professor direcionada aos estudantes, após relembrarem o experimento passado foi: *"– O que é o experimento de queda livre?".* Os alunos apresentaram algumas respostas como: *"– Cair livremente, sem nada para atrapalhar."* e também *"– Paraquedas".*

Na turma que continha alunos do Grupo A, após a hipótese levantada, o professor interviu perguntando o que impedia ou influenciava, a queda livre. Falaram que dependia do objeto, pois a pipa não caia e se o objeto tivesse asas também não. Então, novamente o docente perguntou o que era necessário? E pensaram um pouco para responder, no entanto um aluno falou *"– Resistência do ar."* Continuando a discussão foi perguntado o motivo pelo qual os objetos caiam, e também foi surpreendido pela resposta de um aluno que disse: *"– Pela gravidade."*.

Na outra turma, dos integrantes do Grupo B, o professor lapidou a resposta para dizer que não era o objeto paraquedas e talvez o movimento do paraquedista ao saltar do avião, e os estudantes concordaram. Dando continuidade à discussão o professor perguntou *"– O tempo todo é queda livre?"* e alunos debateram que a velocidade diminuía e que o paraquedista controlava a velocidade quando acionava o paraquedas, porém um aluno destacou: *"– Mesmo acionado, é queda livre!".* A situação foi dividida em dois momentos, pelos próprios alunos e o professor aproveitou o momento para explorar, e mesmo considerando que acontecia a mudança de velocidade, diziam: *"– Muda a velocidade, mas cai do mesmo jeito."*.

[12] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9GXnRXJSths>. Acesso em: 08 Jul. 2020.

Ao encerrarem esse debate, como descrito acima em cada turma, o professor, sem acrescentar qualquer comentário, pediu a atenção dos alunos ao vídeo que apresentaria. Buscou pelo vídeo da BBC TWO[13], que discute o experimento de Galileu sobre a queda dos corpos.

Iniciou o vídeo colocando a legenda, após a primeira situação em que apresenta a queda de dois objetos distintos (bola de boliche e penas) fez uma pausa e perguntou: *"– Nenhuma novidade, né?"*, fazendo referência à hipótese que anteciparam sobre qual dos dois objetos, soltos na câmara, inicialmente aberta, atingiriam o caixote primeiro. Prosseguindo com o vídeo, ele mostrava que estavam fechando e retirando o ar da câmara. Foi feita outra pausa e perguntado aos estudantes o que era vácuo, e um dos alunos respondeu: *"– Ausência de oxigênio."* Já outro disse: *"– Falta de ar."* Então, o docente definiu vácuo e complementou que para aquela situação poderiam considerar como a ausência de ar.

Dando prosseguimento ao vídeo, quando novamente os objetos estavam prestes a serem soltos, nesta segunda situação, com ausência significativa do ar, foi novamente pedido aos alunos que levantassem hipóteses sobre qual dos objetos chegaria primeiro ao caixote (Figura 22). Ficaram bem divididos, porém as três hipóteses foram levantadas nas duas turmas. 1ª hipótese: a bola de boliche chegaria antes; 2ª hipótese: as penas chegariam antes; 3ª hipótese: os dois chegariam ao mesmo tempo.

Figura 22 -Vídeo sobre o experimento de Queda Livre de Galileu

Fonte: Arquivo do autor.

[13] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=qSeW0f51QzY>. Acesso em: 08 Jul. 2020.

Ao dar continuidade ao vídeo, e com olhares atentos dos estudantes para saberem qual das hipóteses estava correta, ao atingirem o caixote, surgiram muitos comentários simultâneos entre eles. Então, foi feita a pausa no vídeo, e apesar de as penas darem a impressão de chegarem antes, por causa de seu formato, o professor ressaltou que durante todo o movimento de queda, eles estiveram sincronizados, as penas não aparentaram estar à frente da bola de boliche em nenhum momento.

Novamente, o professor mediou a experiência perguntando: *"– Por que os objetos estão caindo?"* e então obteve como resposta nas duas turmas, *"– Por causa da gravidade"*. E então, em cada turma a discussão tomou um caminho diferente.

Na turma do Grupo A, o professor definiu que aquele experimento apresentado, retratava um movimento de queda livre. Acrescentou a definição como sendo: *"– O movimento realizado pelo corpo que se encontra sujeito apenas à ação da gravidade."* Como a turma não mostrou mais interação, o professor deu prosseguimento ao seu planejamento.

A turma do Grupo B ao ser indagada sobre o que era o movimento de queda livre, expressou comentários como *"– Quando cai de uma grande altura."* e até mesmo: *"– Quando tem a presença de ar"*. Então, o professor explicou que o vídeo ilustrava um movimento de queda livre, e também apresentou a definição, tal qual como dito na turma anteriormente descrita. Complementou com a situação do paraquedista, dizendo que até o momento em que ele aciona o paraquedas, desprezando a força da resistência do ar sobre o corpo dele, que podíamos considerar que o paraquedista estava em movimento de queda livre.

Avançando a discussão na turma do Grupo B o professor indagou: *"– A gravidade é igual em todos os lugares?"* e ainda *"– O que influência na gravidade?"*. Um aluno disse entre as duas perguntas feitas pelo professor que *"– A Terra puxa tudo para o centro dela."* E então começaram a levantar hipóteses sobre quais fatores influenciam na gravidade, sugerindo que eram: o Sol, as placas tectônicas, a atmosfera, o raio e as estrelas.

Um aluno da turma do Grupo A sugeriu que pesquisasse um vídeo chamado LITO EM ZERO G EXPERIENCE[14] (Figura 23), posteriormente apresentado na turma do Grupo B, em que um conjunto de pesquisadores simulava as diferentes gravidades existentes e como eles as percebiam em seus corpos.

---

[14] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=cuSkhtzhwYY>. Acesso em: 08 Jul. 2020.

Figura 23 -Vídeo sugerido pelo aluno do Grupo A que simula diversas gravidades

Fonte: Arquivo do autor.

A turma do Grupo A, após o vídeo, não manifestou perguntas relacionadas e com isso o professor fez apenas algumas considerações sobre as diferentes gravidades, seus valores relacionados às massas dos corpos, no caso planetas, estrelas e satélites naturais como a Lua.

A sugestão do vídeo, aliada às hipóteses levantadas sobre o que influenciava na gravidade, permitiram uma discussão mais diversificada na turma do Grupo B. Aspectos relacionados às massas dos planetas, estrelas e satélites naturais foram abordados, bem como houve a necessidade de fazer comparações sobre os valores da gravidade na Terra, Lua e Júpiter, como ilustrado na Figura 24.

Figura 24 - Valores de gravidades nos astros do Sistema Solar

	Gravidade em metros / segundo²
Sol	273,42
Mercúrio	3,78
Vênus	8,60
Terra	9,8
Marte	3,72
Júpiter	24,8
Saturno	10,5
Urano	8,5
Netuno	10,8
Plutão	5,88
Lua	1,67

Fonte: *site* Toda Matéria.[15]

[15] Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/gravidade/>. Acesso em: 10 abr. 2020.

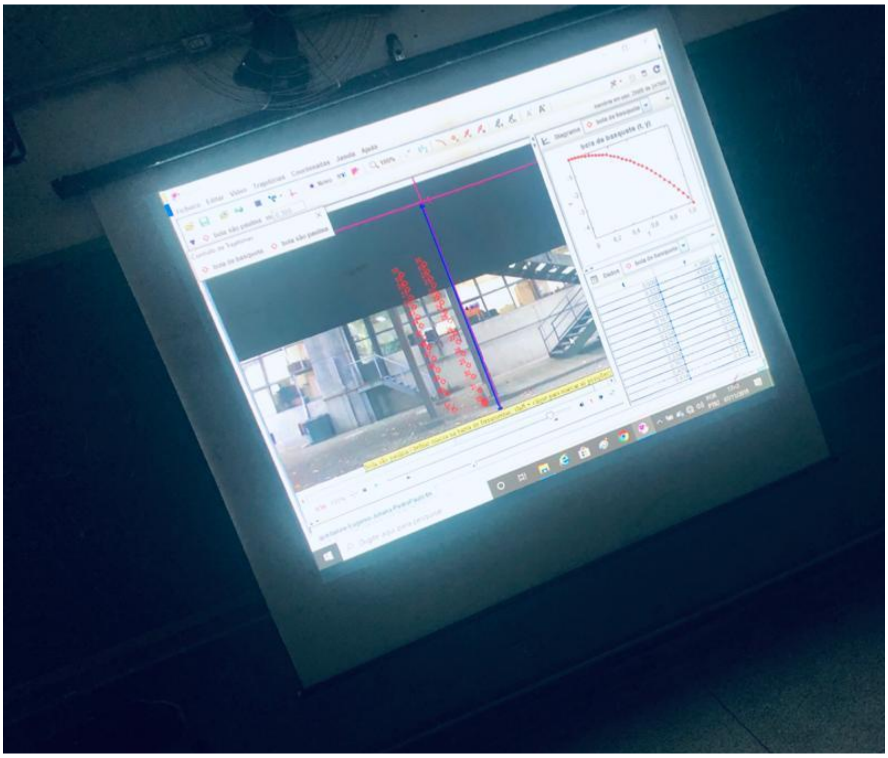
A discussão avançou no Grupo B para justificar a quantidade de luas que o planeta Júpiter possui (fazendo uma pesquisa no mesmo momento para apresentar a quantidade correta de luas em Júpiter) e como, ao longo do tempo, ele (Júpiter) foi adquirindo-as, fazendo esboço de trajetórias de asteróides que passavam próximos ao planeta e foram "forçados" a mudarem a sua trajetória original e, consequentemente, ficaram "presos" à Júpiter, devido a sua gravidade.

Retomando o planejamento, o professor discutiu que haviam interesses envolvidos quando buscavam saber a gravidade local da Terra e de outros astros, recorrendo aos modelos matemáticos que permitissem que esse valor fosse determinado. Após essa introdução, o professor/pesquisador abriu o *Software Tracker* e pediu que os alunos prestassem atenção ao experimento de queda livre que os amigos da faculdade dele fizeram

Após repetir a queda de duas bolas no software algumas vezes, perguntou: *"– Qual das bolas possui maior massa? E Por quê?"*. Nas duas turmas os alunos apresentaram divergências em suas escolhas, mas a maioria disse que era a bola marrom, pois chegava primeiro ao solo. O professor confirmou, porém ressaltou que, com a ausência de ar, não seria possível determinar as massas dos objetos, pois chegariam ao mesmo tempo ao solo.

Foram informados que o *Software Tracker* pode ser usado para analisar algumas situações experimentais e foi apresentada uma ferramenta do programa que analisava os pontos experimentais, mostrava o comportamento gráfico dos pontos experimentais bem como possibilitava o ajuste de uma curva ao comportamento e os valores de seus parâmetros. Porém, antes de discutir o ajuste da curva e os valores de seus parâmetros, perguntou aos estudantes: *"– A disposição destes pontos lembra algo?"* e obteve como resposta, em ambas as turma, *"– Uma parábola."*.

Figura 25 - Discussão do experimento de Queda Livre com duas bolas distintas, utilizando o *Software Tracker*

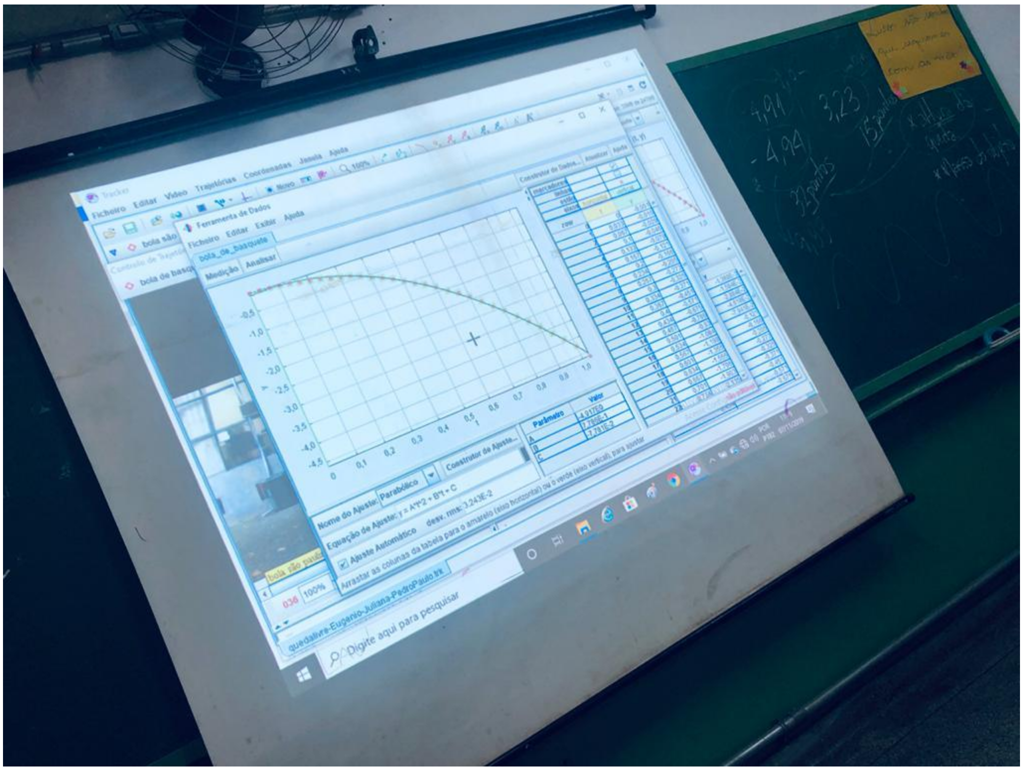


Fonte: Arquivo do autor.

Depois de apresentar todos esses recursos aos estudantes, foi mostrado que assim como a função polinomial de 1º grau modelava o comportamento de distensão da mola (Lei de Hooke), experimento que fizeram em aula e relembrado pelo vídeo no começo da aula, a função polinomial de 2º grau modelava o movimento de queda livre dos corpos.

Retomou que o comportamento gráfico da função polinomial de 1º grau é uma reta, já a polinomial de 2º grau é uma parábola. O docente, utilizando uma das ferramentas do *software*, indicou em que local verificavam os valores dos parâmetros a, b e c da função polinomial de 2º grau e pediu para que olhassem o valor do coeficiente *a* e multiplicassem o valor dele por 2. Fez esse procedimento para as curvas obtidas pela trajetória de queda livre das duas bolas. Obtiveram valores próximos ao valor da gravidade da Terra. Então, o professor completou dizendo que, por meio do experimento de queda livre e análise de seu movimento, era possível determinar o valor da gravidade local, e como aquele vídeo foi gravado na superfície da Terra, o parâmetro *a* da função polinomial de 2º grau representava, aproximadamente, metade do valor da gravidade da Terra.

Figura 26 -Discussão do comportamento dos pontos experimentais no movimento de Queda Livre



Fonte: Arquivo do autor.

Em seguida o professor mostrou um vídeo produzido por ele, em sua casa, e que também apresentava a queda de um objeto. Fez todo o procedimento no *software* e pediu para que dobrassem o valor do parâmetro *a*, obtido por meio dos dados de queda do seu objeto. Apresentou um valor próximo de 6,3 e perguntou *"– Não tinha que dar o valor da gravidade na Terra?".* Os estudantes, surpresos**,** argumentaram que não entenderam o motivo de estar "errado". O professor aproveitou o ensejo e discutiu que os erros experimentais envolvidos, haviam influenciado no resultado encontrado por ele, que os colegas dele coletaram os dados do movimento de queda livre das bolas de uma altura superior, com uma câmera profissional e que as condições de coleta do professor foram outras, mais precárias.

Finalizou a aula reforçando que a distensão da mola proporcionava um modelo funcional de 1º grau, já a queda livre um modelo funcional de 2º grau e o movimento harmônico simples (pêndulo) um modelo funcional trigonométrico (uma senóide). Sem entenderem a terceira conclusão, o professor mostrou o vídeo de um movimento pendular, e tratando os dados no *software* mostrou o comportamento gráfico dos pontos, fazendo o esboço de uma senóide, acrescentando que outros movimentos podem oferecer outros modelos funcionais para explicá-los e compreendê-los.

As mediações do professor se deram durante toda a aula, em momentos em que era necessário organizar as falas dos estudantes, apresentar ideias e conceitos, favorecer o intercâmbio de informações e argumentos.

A intervenção foi bem dialógica com discussões que transitaram entre os campos da Matemática e da Física, em diversos momentos com muita fluidez, e ao término da proposta planejada, alguns alunos agradeceram e elogiaram a iniciativa, havendo perguntas do porquê que o professor não dava aulas de ciências também. Os estudantes se mostraram bastante participativos, ainda que em uma das turmas, as perguntas e interações aconteceram em menor frequência.

4.3.15 Intervenção 15 – Avaliação Final

Aulas dedicadas à avaliação das aprendizagens dos estudantes, os quais tinham que fazê-la sem comunicação com os colegas, sem consulta a registros pessoais e aparelhos eletrônicos, incluindo a calculadora. Os estudantes sentaram em fileiras, um atrás do outro e foi entregue uma folha para cada um.

Realizaram a atividade dentro das instruções dadas no início, e as dúvidas que apresentavam, eram relativas à compreensão do que solicitava a questão, sendo respondidas pelo professor em voz alta para que todos ouvissem.

Ao perguntarem o que era para fazer na questão 1, o professor respondeu que queria saber a lei de formação para o problema apresentado.

Dúvidas referentes à questão 2, foram levantadas e o professor respondeu que havia a necessidade de se calcular a quilometragem percorrida pelo automóvel a cada hora, nas quatro primeiras horas de viagem.

Ao chegarem à questão que solicitava a construção do gráfico para uma função polinomial de primeiro grau, o docente alertou que podiam calcular o zero da função polinomial e pegar valores próximos a ele para ajudarem no preenchimento da tabela e construção do gráfico.

Mostraram dificuldades em construir o gráfico da função quadrática, bem como em estabelecer critérios para valores e cálculos da tabela sugerida.

Na questão 7, os alunos tinham que informar se os valores de a e Δ eram positivos, negativos e nulos e o professor alertou que tinham que olhar o esboço do gráfico apresentado e dizer para cada item o que consideravam sobre o coeficiente a e o discriminante Δ.

Verificou-se um momento de bastante tensão dos estudantes, pois era a hora de mostrarem "que aprenderam" tudo que foi discutido durante todo percurso planejado pelo professor.

A avaliação final foi finalizada, recolhida pelo professor e os alunos foram informados que as próximas aulas seriam abordadas por outras temáticas. Agradeceu os estudantes por todo percurso feito e as colaborações que proporcionaram durante todo o planejamento e execução daquelas aulas.

5. CAPÍTULO 4 – INTERPRETAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Discorreremos neste capítulo sobre a metodologia de análise de dados e buscaremos analisar as atividades matemáticas que compuseram a THA. Primeiramente serão analisadas as quatro atividades que objetivaram mapear as estruturas cognitivas dos alunos e a presença ou ausência de subsunçores necessários para ancorar as novas aprendizagens, ou seja, os conhecimentos prévios dos estudantes. Em seguida, dedicaremos atenção à primeira atividade experimental (Esticando a mola) e, na sequência, a mais duas atividades matemáticas que abordavam os conceitos matemáticos em estudo. Finalizaremos com a análise da segunda atividade experimental (queda livre) e a avaliação final realizada pelos estudantes.

5.1 Análise de conteúdo como metodologia de análise de dados

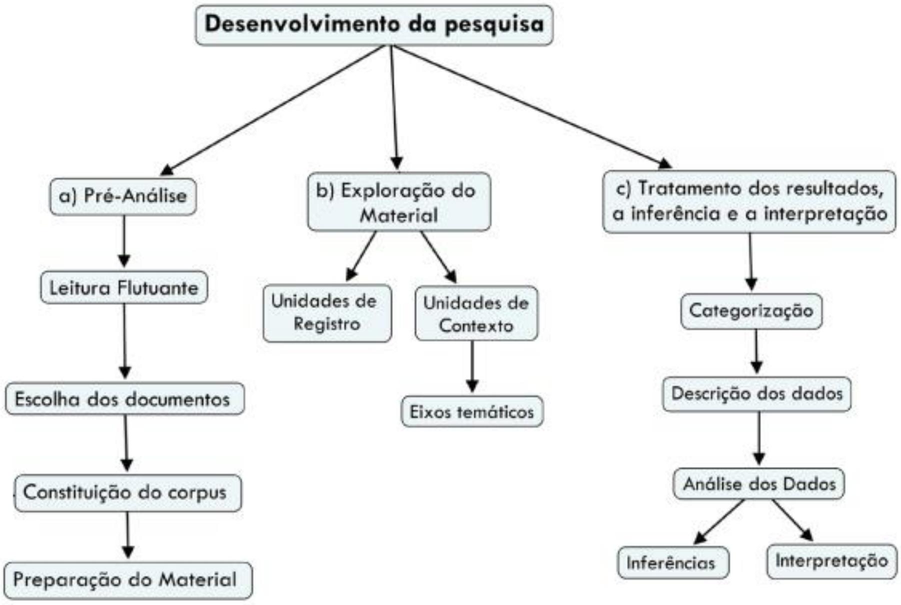
A análise de conteúdo é uma metodologia destinada à análise das comunicações por meio de descrições dos códigos das mensagens. É muito utilizada na pesquisa qualitativa e, segundo Bardin (1977) é:

> Um conjunto de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (BARDIN, 1977, p.42).

Entendemos que a função do pesquisador, nesta perspectiva é o de “[...] analista, no seu trabalho de poda, é considerado como aquele que delimita as unidades de codificação, ou as de registros. Estas de acordo com o material ou código podem ser: a palavra, a frase, o minuto, o centímetro quadrado.” (BARDIN, 1977, p.36).

Ainda, segundo a autora, a organização da análise de conteúdo deve ser estruturada de acordo com três fases (Figura 27): a pré-análise, a exploração do material, e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Figura 27 -Fases da Análise de Conteúdo



Fonte: Adaptado de: MENDES; MISKULIN, 2017, p. 1051.

A pré-análise é a etapa em que é necessário dedicar-se à organização dos dados objetivando constituir o *corpus* da pesquisa. “O corpus é o conjunto de documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos.” (BARDIN, 1977, p.96). Ainda nesta etapa, o pesquisador/analista necessita recorrer à leitura flutuante, a qual permite ao mesmo estabelecer um contato inicial com os dados e buscar uma primeira percepção e algumas impressões contidas nas mensagens, assim como elaborar hipóteses e objetivos da pesquisa.

Ao fazer a escolha dos documentos de análise, entendidos como o material que fornecerá informações sobre a questão de pesquisa, objetivos propostos e articulados com a teoria que subsidia o estudo, que acontece ainda nesta fase de desenvolvimento da análise de conteúdo, é possibilitado ao analista alcançar a etapa de constituição do *corpus* da pesquisa, necessitando atentar-se para algumas regras, como:

> (i) exaustividade, sugere-se esgotar todo o assunto sem omissão de nenhuma parte; (ii) representatividade, preocupa-se com amostras que representem o universo; (iii) homogeneidade, nesse caso os dados devem referir-se ao mesmo tema, serem coletados por meio de técnicas iguais a indivíduos semelhantes; (iv) pertinência, é necessário que os documentos sejam adaptados aos objetivos da pesquisa. (SANTOS, 2012, p.385)

Bardin (1977) sugere finalizar esta etapa, indicando a utilidade em referenciar índices e elaborar indicadores, assim como preparar o material de análise.

> [...] o índice pode ser a menção explícita de um tema numa mensagem. [...] o indicador correspondente será a frequência deste tema de maneira relativa ou absoluta, relativamente a outros. [...] o material reunido deve ser preparado. "Trata-se de uma preparação material e, eventualmente, de uma preparação formal." (BARDIN, 1977, p.100)

Diante do exposto, para atendermos esta etapa, os documentos escolhidos para análise são compostos pelas atividades escritas realizadas pelos estudantes durante as aulas, e pelo diário de itinerância do professor/pesquisador.

Acreditamos atender às regras para se constituírem como o *corpus* deste trabalho, pois no que se refere à homogeneidade e pertinência as atividades foram concebidas de forma a atender aos objetivos e questões de pesquisa, e ofertadas aos estudantes buscando garantir a igualdade de condições de acesso às instruções e a realização das propostas em sala, por todos os alunos. Quanto à representatividade, não foi necessário a seleção de amostras, dado o universo e o interesse da pesquisa e, no que concerne à exaustividade, procurou-se considerar todos os elementos presentes e observáveis nos documentos escolhidos para análise.

A leitura flutuante permitiu ao pesquisador/analista perceber as possíveis articulações, convergências e divergências com as hipóteses e objetivos da pesquisa, tal como a conexão das atividades propostas com a THA e a TAS.

Com o *corpus* da análise definido, caminhamos para a próxima fase, a exploração do material. "Os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos (falantes) e válidos" (BARDIN, 1977, p.101), ou seja, os documentos escolhidos são estudados de maneira mais aprofundada, oportunizando a definição das unidades de registro e das unidades de contexto.

Para Bardin (1977) tratar o material é codificá-lo, e acrescenta que:

> A *codificação* corresponde a uma transformação – efectuada segundo regras precisas – dos dados brutos do texto, transformação esta que, por recorte, agregação e enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo, ou da sua expressão, susceptível de esclarecer o analista acerca das características do texto, [...]. (BARDIN, 1977, p.103)

A codificação compreende a necessidade de explicitar as unidades de registro e contexto. Assim sendo, unidade de registro

> É a unidade de significação a codificar e corresponde ao segmento de conteúdo a considerar como unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial. A unidade de registro pode ser de natureza e de dimensões muito variáveis. (BARDIN, 1977, p.103)

Dentre as diversas possibilidades de unidades de registro, adotaremos neste trabalho, dada a natureza, hipóteses, questões de pesquisa e teoria orientadora, a **temática**.

> [...] o tema é a unidade de significação que se liberta naturalmente de um texto analisado segundo certos critérios relativos à teoria que serve de guia à leitura. [...]. Fazer uma análise temática consiste em descobrir os <<núcleos de sentido>> que compõem a comunicação e cuja presença, ou frequência de aparição podem significar alguma coisa para o objectivo analítico escolhido. (BARDIN, 1977, p.105)

No que se refere à unidade de contexto, Bardin (1977) ressalta dois critérios: o custo e a pertinência, devendo ao analista adaptar a unidade de contexto ao seu tipo de material e quadro teórico, não devendo estas unidades ser nem demasiadamente grandes ou pequenas.

> A unidade de contexto serve de unidade de compreensão para codificar a unidade de registro e corresponde ao segmento da mensagem, cujas dimensões (superiores às da unidade de registro) são óptimas para que se possa compreender a significação exacta da unidade de registro. (BARDIN, 1977, p.107)

Portanto, em cada momento da THA é necessário estabelecer as unidades de registro e contexto. No primeiro momento, dedicado ao reconhecimento da estrutura cognitiva dos estudantes e seus conhecimentos prévios decidimos organizar conforme a Quadro 2 apresenta:

Quadro 2 - Unidades de registro: Atividades 1, 2, 3 e 4 da THA

TEMAS	DESCRIÇÃO
Resolução correta do item/questão	Atribuído aos estudantes que demonstraram compreensão do que era solicitado na questão e resolveram corretamente.
Resolução parcialmente correta do item/questão	Atribuído aos estudantes que apresentaram compreensão do que era solicitado e resolveram incorretamente; e atribuído aos estudantes que apresentaram uma compreensão parcial do que era solicitado e resolveram incorretamente.
Resolução incorreta do item/questão	Atribuído aos estudantes que não compreenderam o que era solicitado e resolveram incorretamente.
Abstenção na resolução do item/questão	Atribuído aos estudantes que deixaram o item/questão em branco, sem resolução.

Para o primeiro experimento – Esticando a Mola – definimos as seguintes unidades de registro, conforme Quadro 3:

Quadro 3 - Unidades de registro: Experimento Esticando a Mola

TEMAS	DESCRIÇÃO
Relações entre grandezas	Considerações dos estudantes sobre as relações entre as grandezas distensão da mola e massa no experimento de Física proposto.
Grandeza direta ou inversamente proporcional	Compreensão dos estudantes sobre grandeza direta ou inversamente proporcional envolvida na atividade experimental.
Plano cartesiano e representação gráfica do experimento	Compreensão dos estudantes na montagem do par ordenado, plano cartesiano e considerações sobre a representação gráfica da atividade experimental.
Constante elástica da mola	Compreensão dos estudantes do cálculo e significado da constante elástica (K) da mola.
Atividade experimental como contexto para o ensino de funções polinomiais	Impressões dos alunos e professor pesquisador da atividade experimental proposta.

Por fim, a terceira e última fase da análise de conteúdo destina-se ao tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. “A ventilação das componentes das mensagens analisadas em rubricas ou categorias não é uma etapa obrigatória de toda e qualquer análise de conteúdo” (BARDIN, 1977, p.117), assim preocupamo-nos em evidenciar os elementos presentes nas mensagens dos estudantes, por meio de seus registros e do diário de itinerância do professor, para inferir e interpretar os resultados, porém nota-se uma classificação do material analisado em três grupos distintos: resolução correta, resolução parcialmente correta e resolução incorreta.

Sobre a inferência temos que “A intenção da análise de conteúdo é a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou eventualmente, de recepção), inferência esta que recorre a indicadores (quantitativos ou não).” (BARDIN, 1977, p.38). A autora ainda acrescenta que “[...] o analista tira partido do tratamento das mensagens que manipula, para inferir (deduzir de maneira lógica) conhecimentos sobre o emissor da mensagem ou sobre seu meio, por exemplo”. (BARDIN, 1977, p.39).

A inferência, de acordo com a autora, permite a passagem explícita e controlada da descrição à interpretação. *Descrição* entendida como a enumeração das características do texto, de forma resumida e após tratamento e *interpretação* como sendo a significação dada à essas características do texto.

Entendida como uma técnica de tratamento de dados, a inferência é orientada por diversos pólos de comunicação (o emissor, o receptor, a mensagem e o canal ou instrumento), conforme observado na Figura 28 a seguir.

Figura 28 – Características dos Pólos de Inferência

Pólos de Comunicação			
Emissor	**Receptor**	**Mensagem**	**Canal**
Produz a mensagem; Pode ser um indivíduo ou um grupo.	Pode ser um indivíduo; Recebe a mensagem e estuda sobre a que ela se destina.	É o ponto de partida da análise; Estuda-se o conteúdo, significado, significantes, código e significação.	Serve mais como procedimento experimental do que para análise de conteúdo.

Fonte: Revista Eletrônica de Educação[16] (SANTOS, 2012, p.386).

Desse modo, "[...] a análise de conteúdo constitui um bom instrumento de indução para se investigarem as causas (variáveis inferidas) a partir dos efeitos (variáveis de inferência ou indicadores; referências no texto). [...]" (BARDIN, 1977, p.137). Para a interpretação dos dados, o pesquisador/analista deve retomar seu referencial teórico para subsidiar suas análises e garantir um sentido à interpretação apresentada, sendo assim "[...] as interpretações pautadas em inferências buscam o que se esconde por trás dos significados das palavras para apresentarem, em profundidade, o discurso dos enunciados." (SANTOS, 2012, p.386).

5.2 Reconhecimento da estrutura cognitiva dos estudantes

Para compreender, mapear e identificar os conhecimentos prévios dos estudantes, à luz da THA, propusemos um conjunto de quatro atividades que objetivavam:

- Atividade 1 – Compreender a ideia de equação, representar e resolver situações por meio de equações de 1º grau e resolver equações do 1º grau.
- Atividade 2 – Resolver equações incompletas do 2º grau e resolver equações completas do 2º grau.
- Atividade 3 – Identificar corretamente pares ordenados de pontos no plano cartesiano, compreender a nomenclatura utilizada para nomear os eixos (abscissa e ordenada).
- Atividade 4 – Analisar situações e considerar se expressam funções, representar a lei de formação de funções e reconhecer por meio de diagramas, se a relação estabelecida entre seus elementos é uma função.

A necessidade em conhecer os conhecimentos prévios dos estudantes, acerca desses objetivos específicos de cada atividade, é que se identificarmos esses conhecimentos, estes poderão atuar como subsunçores relevantes que vão ancorar os novos conhecimentos, caso os

[16]Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/291/156>. Acesso em: 09 mai. 2020.

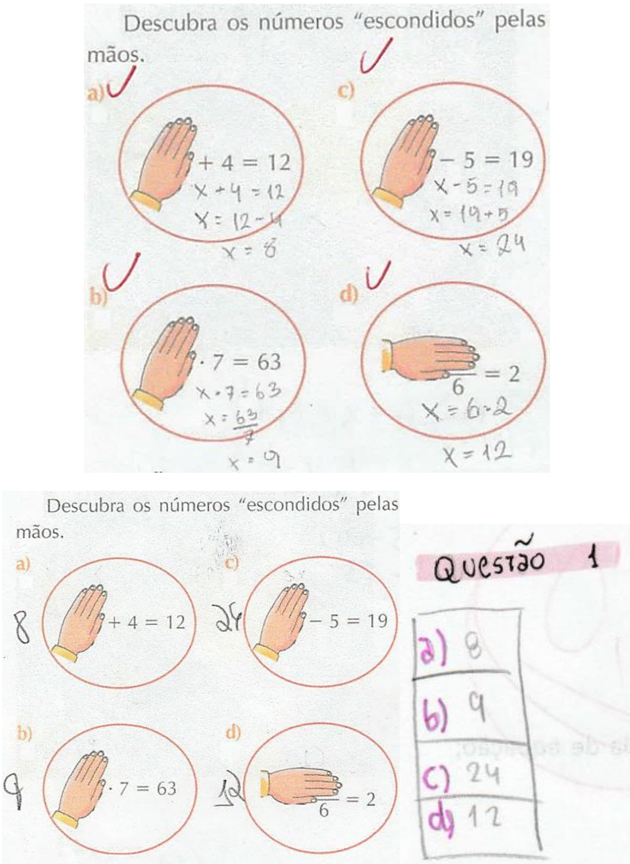
alunos não os possuam, necessitariam que fossem oportunizados organizadores prévios para que pudessem exercer o papel desses subsunçores ausentes, e esta ausência, possivelmente, não seria um obstáculo para promoção de uma aprendizagem significativa.

5.3 Atividade 1 – Equações do 1º Grau

Para a realização desta atividade os alunos foram orientados a se agruparem em duplas, e que resolvessem a atividade sem consultar seus registros pessoais, aparelhos eletrônicos e calculadora. Que evitassem, ao máximo, a comunicação entre as duplas e que teriam o tempo de duas horas-aula de cinquenta minutos cada, para resolverem a atividade.

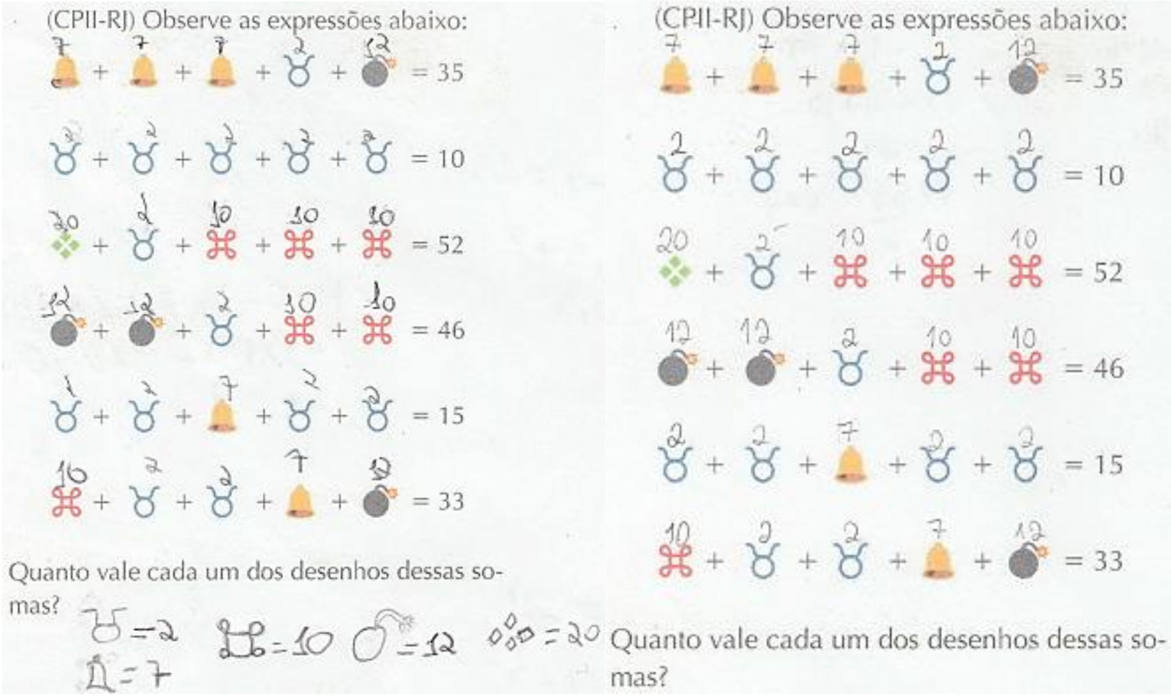
Durante o desenvolvimento da atividade, algumas duplas trocavam informações entre si, buscavam a atenção do professor para esclarecimentos de alguns procedimentos e compreensão do que era solicitado nas questões. Responderam com maior tranquilidade a questão 1, mas já na questão 2, surgiram dúvidas quanto aos valores dos símbolos, porém diante das mediações do professor compreenderam o melhor caminho para resolver o problema.

Figura 29 - Estratégias dos estudantes (Grupos A e B) para resolução da questão 1



Fonte: Arquivo do autor.

Figura 30 - Estratégias dos estudantes (Grupos A e B) para resolução da questão 2



Fonte: Arquivo do autor.

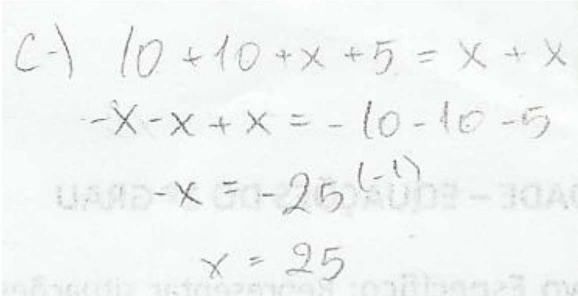
Na questão 3, concentraram-se a maior quantidade das dúvidas, fazendo com que o professor intervisse de forma mais explícita, resolvendo um dos itens da questão na lousa, exemplificando, pois as instruções dadas oralmente, não estavam alcançando a compreensão dos alunos. E as dúvidas referente à questão 4, foram esclarecidas por intervenções orais do professor.

Figura 31 - Proposta da questão 3 item c) disponibilizada aos estudantes

Fonte: Livro Didático.[17]

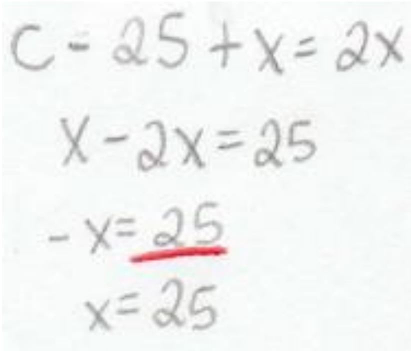
[17]CHAVANTE, E. R. **Convergência: matemática, 8º ano: anos finais: ensino fundamental.** Edições SM. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2015.

Figura 32 - Estudantes Grupo A – Compreenderam a questão 3.c) e resolveram corretamente



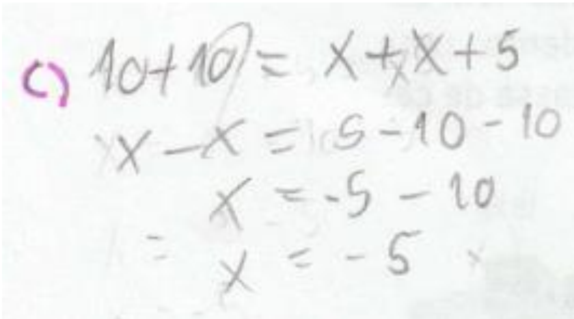
Fonte: Arquivo do autor.

Figura 33 - Estudantes Grupo A – Compreenderam a questão 3.c) e resolveram parcialmente certo



Fonte: Arquivo do autor.

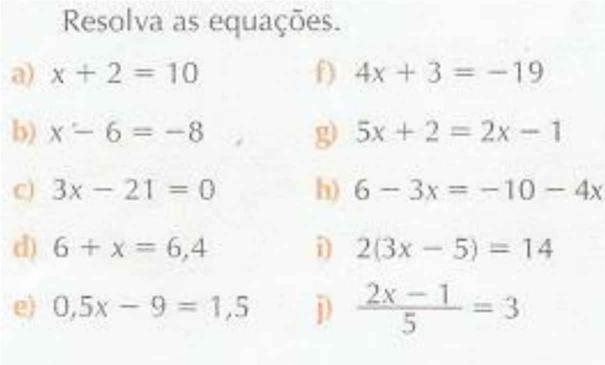
Figura 34 - Estudantes Grupo B – Não compreenderam a questão 3. c) resolvendo inadequadamente



Fonte: Arquivo do autor.

A seguir, a Figura 35 ilustra a proposta da questão 4 disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B, em que consistia resolver equações de 1º grau. A Figura 36 mostra alguns procedimentos adotados pelos alunos para resolver a respectiva questão, em que uma parte considerável dos estudantes do Grupo B acertou parcialmente as resoluções de equações do 1º grau.

Figura 35 - Proposta da questão 4 disponibilizada aos estudantes



Resolva as equações.

a) $x + 2 = 10$

b) $x - 6 = -8$

c) $3x - 21 = 0$

d) $6 + x = 6,4$

e) $0,5x - 9 = 1,5$

f) $4x + 3 = -19$

g) $5x + 2 = 2x - 1$

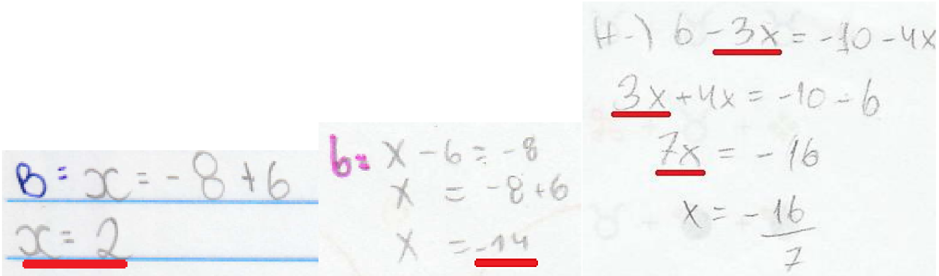
h) $6 - 3x = -10 - 4x$

i) $2(3x - 5) = 14$

j) $\frac{2x - 1}{5} = 3$

Fonte: Livro Didático [18]

Figura 36 - Acertos parciais dos estudantes dos Grupos A e B analisados



Fonte: Arquivo do autor

Nos dois grupos de alunos analisados (Grupo A e Grupo B), apresentaram de forma satisfatória a compreensão das ideias de equações, exploradas nas questões 1 e 2 da tarefa.

A questão 3, que tinha como objetivo buscar a compreensão dos estudantes sobre como representar e resolver situações por meio de equações do 1º grau, observamos uma discreta diferença entre as respostas dos dois grupos. O Grupo A, após a intervenção do professor com orientações do tipo: "O que vocês querem descobrir? Como acreditam que devem proceder para conseguir descobrir o valor da incógnita *x*?", compreendeu e resolveu, em sua maioria, corretamente. Porém o Grupo B, apesar de entender que precisavam descobrir o valor da incógnita, apresentou maior índice de alunos que não compreenderam o que era solicitado, acertando parcialmente a questão, ou seja, com erros nos procedimentos e resultados, ou deixando-a em branco.

Houve acertos parciais, por parte dos dois grupos de estudantes analisados, na questão 4, envolvendo operações com números inteiros e racionais, porém compreendendo os procedimentos envolvidos na resolução de uma equação do 1º grau, assim como, alguns alunos

---

[18] ANDRINI, A.; VASCONCELOS. M.J. **Praticando a Matemática, 8.** Editora do Brasil. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

não concluíram a questão por falta de tempo e por relatarem "não saberem" resolver equações do 1º grau.

Os dois grupos analisados apresentaram um comportamento semelhante durante o desenvolvimento da atividade bem como em seus resultados, com exceção da questão 3 e a quantidade de acertos parciais na questão 4, em que os estudantes do Grupo B apresentaram maior quantidade de acertos parciais, porém de mesma natureza, que os alunos do Grupo A.

Após as discussões da atividade 1 nas aulas subsequentes a sua aplicação, em que foram apresentadas as resoluções e procedimentos que os alunos poderiam ter adotado para chegarem ao resultado correto, nos permite concluir que os estudantes dos grupos A e B demonstraram possuir os conhecimentos prévios sobre a compreensão e resolução de equações do 1º grau.

Os acertos parciais se devem ao fato de que não tiveram a validade de suas resoluções dadas pelo professor durante a aula, que optou por não dizer se os procedimentos e resultados estavam certos ou errados, pois nas aulas posteriores faria discussão e correção das questões, propiciando interações que fortalecessem os conhecimentos já consolidados em suas estruturas cognitivas e esclarecessem as dúvidas remanescentes, em busca de aprendizagem significativas.

Outro fator a considerar é que Ausubel destaca que aprendizagem significativa não é aquela que o aprendiz nunca esquece, o esquecimento é consequência natural da aprendizagem significativa (assimilação obliteradora). Senso assim, o fato dos alunos ficarem com algumas dúvidas e até cometerem equívocos na resolução, pela interação da aula em que foram discutidas as correções, notou-se que compreendiam e possuíam o conhecimento requerido na tarefa.

5.4 Atividade 2 – Equações do 2º Grau

Os estudantes foram orientados para que formassem duplas e que estava permitido consulta aos registros pessoais, contudo aparelhos eletrônicos e calculadora não poderiam ser utilizados. Teriam o tempo de duas horas-aula de cinquenta minutos cada para utilizarem na resolução da tarefa e que evitassem a comunicação entre os agrupamentos.

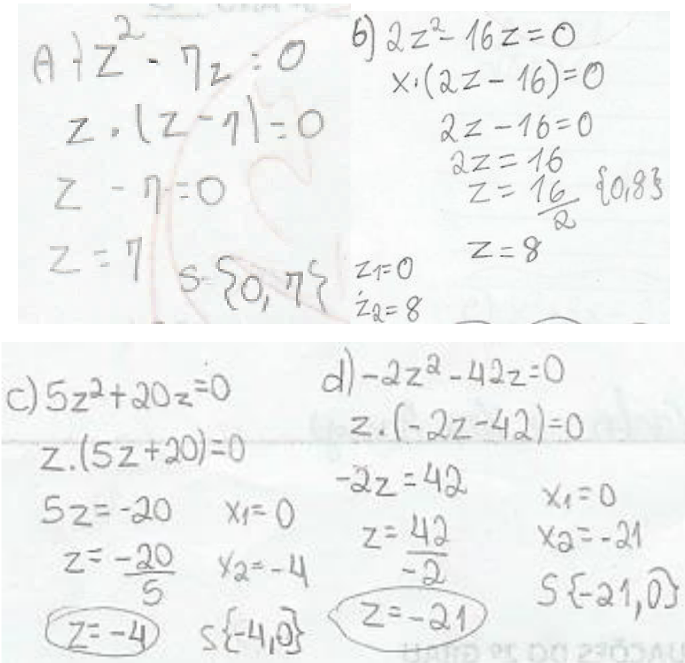
Os estudantes do Grupo A, em sua maioria, não encontraram dificuldades em resolver a atividade, e suas dúvidas permearam a troca das incógnitas nas equações (haviam questões que não utilizavam o *x* como incógnita) e a necessidade do professor em verificar e validar os procedimentos e resultados encontrados pelas duplas de alunos.

O Grupo B demonstrou maiores dificuldades, ainda que pudessem consultar seus registros pessoais, para desenvolver a proposta de atividade. Implicando em divisão de tarefas entre as duplas, em que acordaram qual integrante resolveria as questões 1 e 2 e qual integrante resolveria as questões 3 e 4; uma troca maior de informação entre as duplas, por insegurança nos procedimentos que escolhiam para resolver as questões; e preocupação em fazerem corretamente, pois havia sido tópico de estudo no bimestre anterior.

Diante dessa demanda no desenvolvimento da tarefa, o professor decidiu resolver dois exemplos de equações incompletas do 2º grau para o Grupo B, uma do tipo $ax^2 + bx = 0$ e outra do tipo $ax^2 + c = 0$ ambas com $a \neq 0$ e b e c números reais, buscando relembrá-los e garantir que não fariam porque não sabiam e não porque esqueceram os procedimentos matemáticos.

Os dois grupos de estudantes, apesar de apresentarem características distintas, demonstraram conhecimentos relevantes acerca do tema equações do 2º grau. Algumas duplas apresentaram resoluções parcialmente corretas nos dois grupos, como vemos nas figuras abaixo, e estas resoluções parciais estão mais ligadas à falta de atenção em alguns procedimentos, do que na ausência de conhecimentos para resolver equações do 2º grau. No entanto, um número pequeno de duplas demonstrou uma grande fragilidade sobre o assunto.

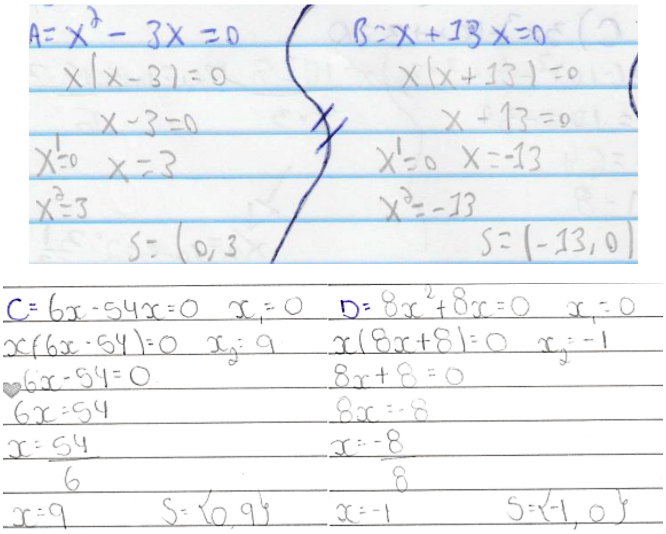
Figura 37 - Resoluções corretas dos itens da questão 1 de alunos do Grupo A



Fonte: Arquivo do autor

Apesar dos alunos compreenderem que a incógnita envolvida na questão é a letra z, percebemos que os estudantes resolveram corretamente os itens (c) e (d), porém ainda recorreram à letra x como incógnita. Isso demonstra a exposição dos mesmos, a situações que envolviam prioritariamente a incógnita x em seus problemas.

Figura 38 - Resoluções corretas dos itens da questão 2 de alunos do Grupo B

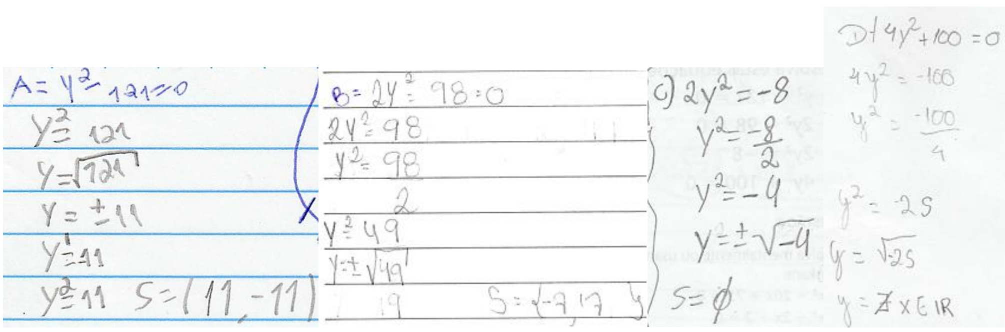


Fonte: Arquivo do autor.

As questões 1 e 2 possuíam equações incompletas do 2º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$ com $a \neq 0$ e b e c números reais, cuja incógnitas eram *z* e *x*, respectivamente. Esperava-se que utilizassem o recurso da fatoração da equação e encontrassem os valores das soluções. Ambos os grupos tiveram um desempenho que, em sua maioria, demonstram que possuem os conhecimentos acerca da forma adequada de se resolver uma equação deste tipo, com uso desta estratégia, no qual os acertos parciais se limitaram a fragilidade que possuíam na operação com números inteiros ou até mesmo não percebendo que o algarismo apresentado na equação era um número inteiro negativo.

Na questão 3, os alunos eram apresentados a equações incompletas do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$ com $a \neq 0$ e b e c números reais, cuja incógnita era o *y*. A estratégia esperada era de que os estudantes adotassem neste tipo de resolução o do isolamento da incógnita no primeiro membro. A Figura 39 abaixo mostra resoluções apresentadas pelos dois grupos analisados.

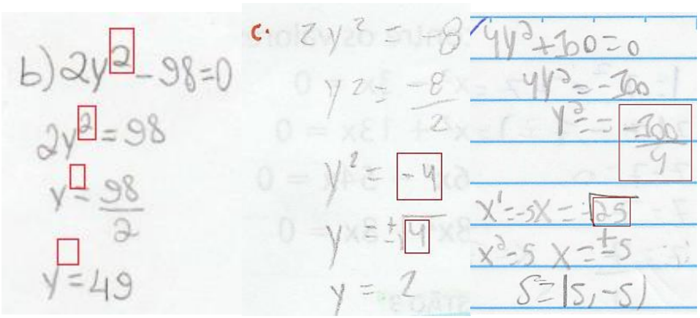
Figura 39 - Resoluções corretas dos itens da questão 3 de alunos dos Grupos A e B



Fonte: Arquivo do autor.

Os estudantes de ambos os grupos, apesar de compreenderem corretamente uma das diversas possibilidades, de como se resolver equações incompletas do 2º grau com ausência do coeficiente *b*, apresentaram um grande número de acertos parciais, pois utilizavam alguns procedimentos matemáticos inadequados, ou por considerarem que existia uma solução para raiz quadrada com radicando negativo, como resposta da equação no conjunto dos números reais, ou por desprezarem o sinal do radicando de uma etapa para a outra (Figura 40).

Figura 40 - Resoluções parcialmente corretas dos itens da questão 3 de alunos dos Grupos A e B

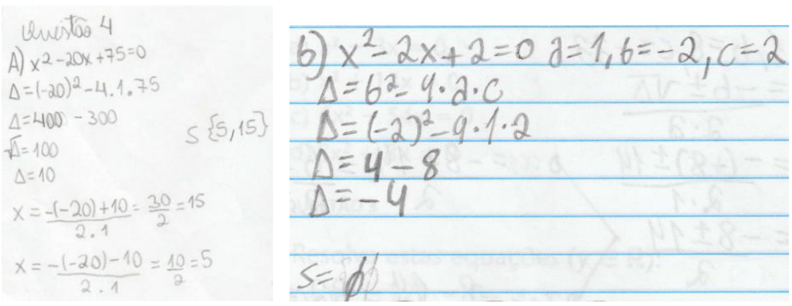


Fonte: Arquivo do autor.

Por meio dos debates e diálogos levantados nas aulas destinadas a discussão das equações de 2º grau propostas, percebemos que a supressão da potência quadrada ou dos sinais nas passagens da resolução não configuram um erro relacionado à maneira adequada de resolver a equação, mas sim, em procedimentos matemáticos com fragilidades ou até mesmo falta de atenção durante a realização dos cálculos, portanto assumimos um acerto parcial para esses estudantes, uma vez que o conhecimento envolvido se encontra preservado.

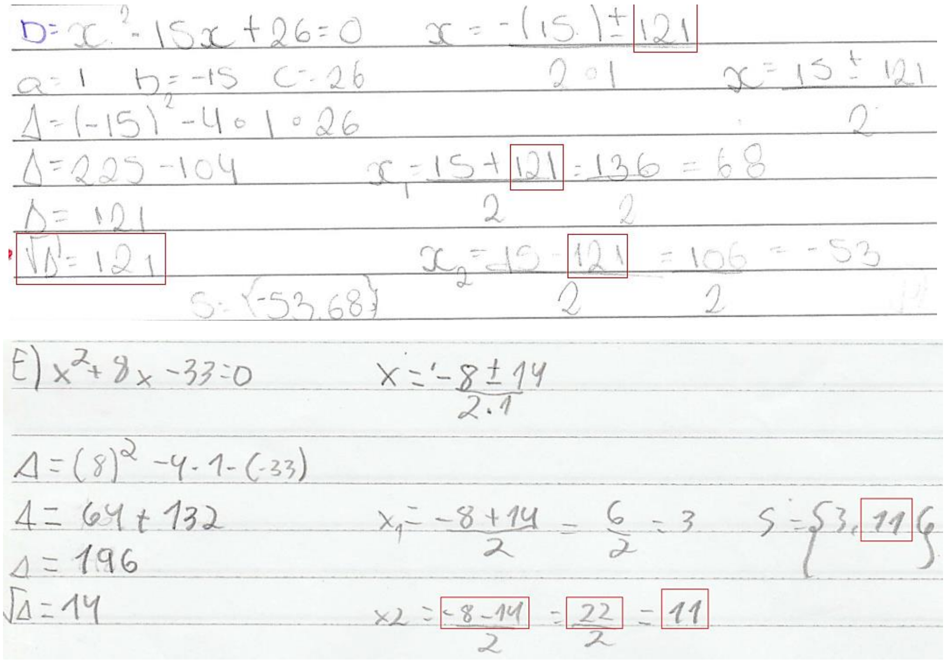
Por fim, a questão 4 da atividade buscava a habilidade dos alunos em resolver mentalmente ou pela fórmula de Bhaskara equações completas do 2º grau ($ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ e b e c números reais). Todos recorreram ao uso da fórmula resolutiva e a natureza do erro encontrado nesta questão são os mesmos apontados nas questões anteriores.

Figura 41 - Resolução correta de itens da questão 4 de alunos do Grupo A



Fonte: Arquivo do autor.

Figura 42 - Resoluções parcialmente corretas de itens da questão 4 de alunos dos Grupos A e B



Fonte: Arquivo do autor.

Assim sendo, grande parte dos alunos demonstrou possuir o conhecimento prévio buscado, relacionado à resolução de equações completas e incompletas do 2º grau. Os erros apresentados, aparentemente, são decorrentes do fato de que o professor não interferiu no processo, alertando-os sobre os possíveis erros em procedimentos operatórios e matemáticos dos cálculos.

Nas aulas subsequentes à aplicação da atividade, em que foram apresentados os recursos e estratégias de resolução que poderiam ter adotado para determinarem o conjunto solução das equações propostas, os estudantes expressaram entendimento pela interação na aula dialogando e respondendo as perguntas feitas sobre os procedimentos operatórios, como prosseguir quando o radicando em uma raiz quadrada era negativo e também se era possível continuar resolvendo, no conjunto dos números reais, quando o discriminante Δ (delta) apresentava um valor negativo. Um pequeno grupo dos alunos analisados, ao que parece, não possui os conhecimentos requeridos para esta atividade, pois se manteve em silêncio durante grande parte da interação proporcionada na aula.

5.5 Atividade 3 – Plano Cartesiano

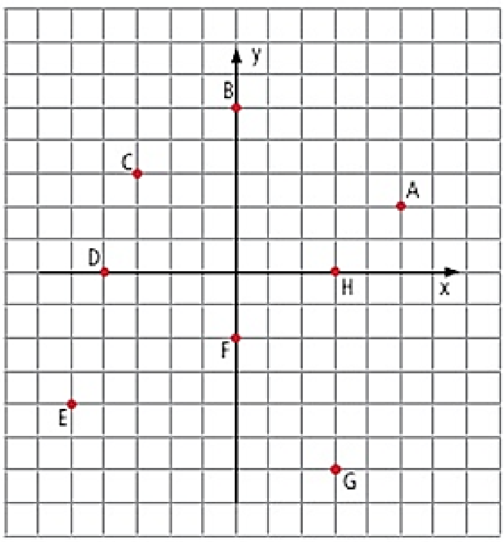
As instruções dadas aos estudantes para realização desta atividade eram de que se agrupassem, impreterivelmente, em duplas. Não poderiam consultar seus registros pessoais, nem aparelhos eletrônicos ou utilizar calculadora e que teriam um tempo, para realização da atividade, menor que as duas tarefas anteriores, pois nos trinta minutos que antecedessem o final da aula seriam feitas discussões sobre as questões e o que se esperava que apresentassem como resolução, esclarecendo as dúvidas remanescentes.

Após uma leitura parcial da atividade, os estudantes tiveram dúvidas pontuais em algumas questões, no entanto, uma dúvida que foi bem recorrente era qual o valor associado a cada quadradinho, pois nas aulas em que houve discussão e construção do plano cartesiano com papel quadriculado/milimetrado, foram orientados pelo professor, a deixar dois quadradinhos para representar cada unidade, apenas por uma questão de legibilidade. No entanto, ao pegar um exercício em que não havia a graduação nos eixos, perguntavam se a unidade era de dois em dois quadradinhos, como fizeram nas aulas anteriores, então neste momento foram orientados a conceber que cada quadradinho, nesta situação, equivalia a uma unidade.

Os equívocos mais comuns nas respostas dos alunos são: inversão dos valores na apresentação do par ordenado (x, y), graduação equivocada dos eixos e sentidos crescente e decrescente dos eixos trocados, e falta de clareza no discernimento entre o eixo da abscissa e ordenada.

Figura 43 - Proposta da questão 1 disponibilizada aos alunos

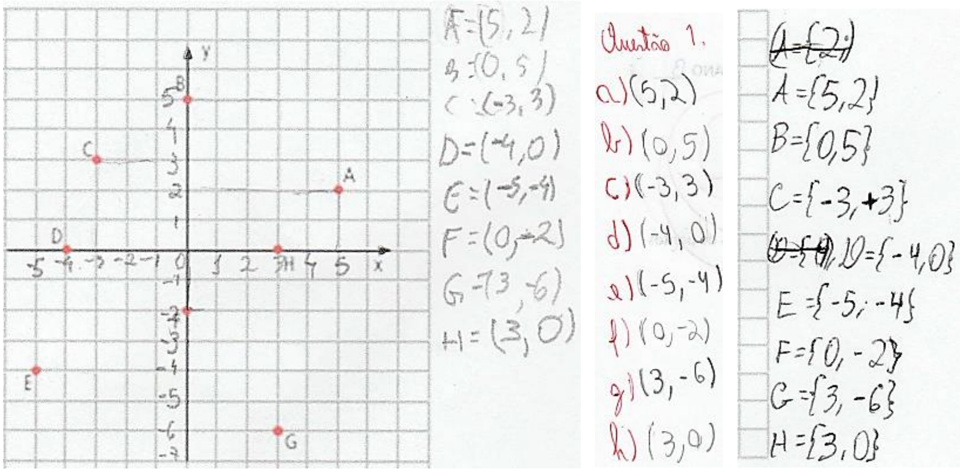
Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano.



Fonte: Livro Didático[19]

[19] ANDRINI, A.; VASCONCELOS. M.J. **Praticando a Matemática, 9.** Editora do Brasil. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

Figura 44 - Resolução correta da questão 1 dos estudantes dos Grupos A e B

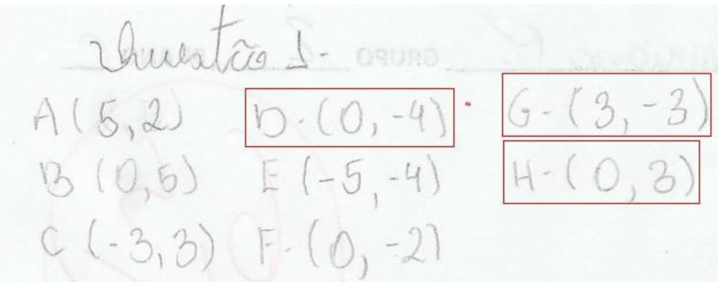


Fonte: Arquivo do autor.

É evidente que o estudante da direita representou os pontos entre chaves e os estudantes do centro da figura não utilizaram letra bastão maiúscula e o correto seria representar um par ordenado como os estudantes da esquerda, entre parênteses e letra bastão maiúscula. Ainda assim, foram consideradas corretas as resoluções dos estudantes da direita e centro, pois os mesmos estabelecem que a representação de pontos é dada, convencionalmente, de uma maneira preestabelecida e também reconhecem critérios para qual valor ocupará a primeira e segunda posições no par ordenado.

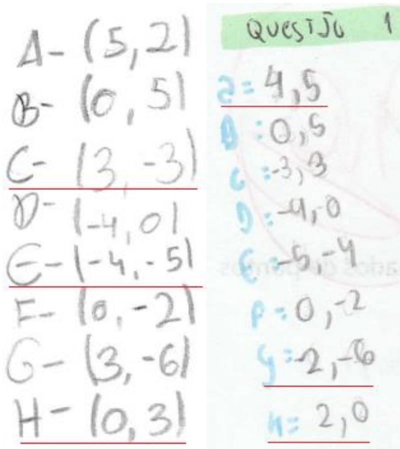
Dos estudantes analisados nos dois grupos, a maioria apresentou acertos parciais em suas respostas, ou seja, alguns valores dos eixos se encontravam errados ou invertidos, não estabelecendo critérios para anotar o par ordenado. Em alguns casos, em que um dos valores dos eixos era nulo, estudantes consideraram que o zero sempre viria primeiro no par ordenado, chegando a valores equivocados dos pontos D e H, casos observáveis nas Figuras 45 e 46 a seguir.

Figura 45 -Resposta parcialmente correta da questão 1 de estudantes do Grupo A (abscissa sempre nula)



Fonte: Arquivo do autor

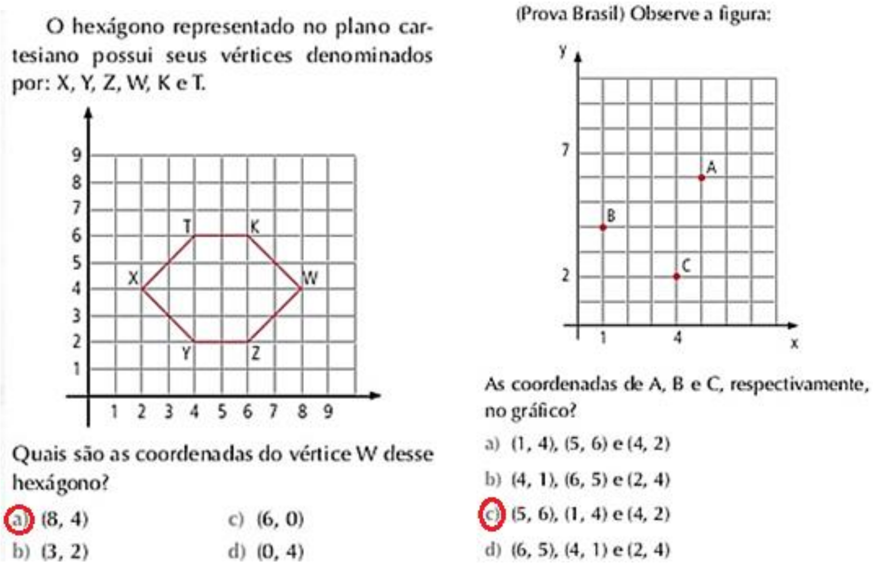
Figura 46 - Resposta parcialmente correta da questão 1 de estudantes dos Grupos A e B



Fonte: Arquivo do autor

Dos 20 alunos que responderam a questão 2 e 3 do Grupo A, tivemos 100% e 90% de acertos, respectivamente. No Grupo B, 13 alunos foram analisados, com percentual de acerto de 100% na questão 2 e 77% na questão 3.

Figura 47 - Proposta das questões 2 e 3 disponibilizadas aos alunos



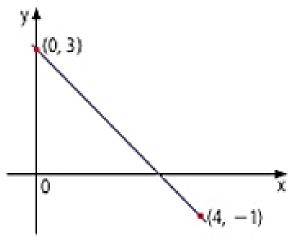
Fonte: Livro Didático.[19]

Os erros associados à questão 3 foram: na compreensão do critério de apresentação da resposta, primeiro ponto A, em seguida ponto B e por fim ponto C (item a), bem como se percebe que alguns estudantes invertem os valores dos eixos na representação dos pares ordenados (item d) ou não compreendem a ordem solicitada na resposta e nem estabelece critérios para apresentação do par ordenado (item b).

Houve uma maior concentração de erros na questão 4, pois os próprios estudantes deveriam identificar corretamente qual era o eixo das ordenadas, mesmo perguntando ao professor, tiveram a resposta por ele negada, levando à um percentual de acertos de 55% no Grupo A e 15% no Grupo B.

Figura 48 - Proposta da questão 4 disponibilizada aos alunos

Observe o gráfico abaixo:



As coordenadas do ponto que intercepta o eixo das ordenadas é:

a) (4, −1)
b) (0, 4)
c) (0, 3)
d) (3, 4)

Fonte: Livro Didático.[19]

Nos trinta minutos finais da aula, professor e estudantes discutiram as questões propostas e o docente evidenciou a necessidade de representar corretamente os valores no par ordenado (x, y) e também a convenção matemática de nomear pontos com letra bastão e maiúscula no nosso alfabeto. Esclareceu que o eixo x é o eixo das abscissas e o eixo y é o eixo das ordenadas. Concluiu a aula considerando que essa breve intervenção foi o suficiente, diante da análise das dificuldades encontradas e a relevância das respostas apresentadas pelos alunos, as quais foram discutidas e esclarecidas durante estes trinta minutos finais.

Assim sendo, grande parte dos estudantes compreendeu a localização e a representação de pontos no plano cartesiano. Ainda que sejam identificadas algumas fragilidades em suas respostas, não são equívocos que denotam total incompreensão do sistema de coordenadas cartesianas, mas erros que ao serem discutidos caminharam para suas superações.

5.6 Atividade 4 – Ideias de Funções

Aos estudantes foi solicitado que se agrupassem em duplas e que respondessem ao conjunto de questões selecionadas. De antemão foram avisados que apesar da atividade apresentar um tema, a princípio, ainda não discutido e ensinado, que buscassem responder com os conhecimentos que dispunham. Não tinham autorização para consultar aparelhos eletrônicos e nem calculadora, e como não era um tema já apresentado não sentiram a necessidade de consultar seus registros pessoais. O tempo de duas horas-aula era destinado à realização da atividade e discussão da mesma nos trinta minutos que antecedessem o término da aula.

Aos poucos os alunos foram se apropriando do que era solicitado nas perguntas e diante das questões 1 e 2, a dúvida mais apresentada pelos aprendizes foi sobre o que era uma lei de formação. Tiveram esta dúvida respondida pelo professor como sendo a expressão matemática que pode traduzir a situação problema apresentada, com isso algumas duplas conseguiram apresentar correta ou parcialmente correta a resposta para este item.

Figura 49 - Proposta da questão 1 disponibilizada aos alunos

Alessandra, técnica em informática, presta serviço para uma empresa. Ela recebe R$ 50,00 por hora trabalhada.

A tabela abaixo expressa o valor que Alessandra receberá em função da quantidade de horas trabalhadas.

Quantidade de horas trabalhadas	1	2	3	4
Valor recebido (em R$)	50	100		

a) Calcule quanto Alessandra receberá se trabalhar 14 horas para essa empresa.
b) Calcule a quantidade de horas que ela trabalhou se recebeu da empresa R$ 1.500,00.
c) Podemos dizer que o ganho de Alessandra é função do número de horas trabalhadas?
d) Escreva a lei dessa função.

Fonte: Livro Didático.[20]

Figura 50 - Proposta da questão 2 disponibilizada aos alunos

Renato comprou uma impressora a jato de tinta para imprimir panfletos de propaganda. Veja, na tabela a seguir, o número de panfletos que esse equipamento imprime de acordo com o tempo.

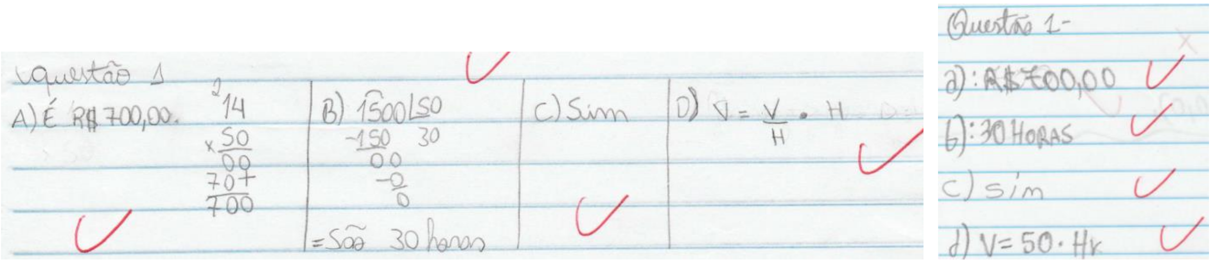
Intervalo de tempo (em minuto)	Número de panfletos impressos
2	36
4	72
6	108
8	144
10	180

a) Quantos panfletos o equipamento de Renato imprime por minuto?
b) O número de panfletos impressos (*n*) é função do tempo (*t*) em minutos?
c) Escreva uma lei que relacione *n* com *t*.
d) Em meia hora, quantos panfletos são impressos?

Fonte: Livro Didático.[20]

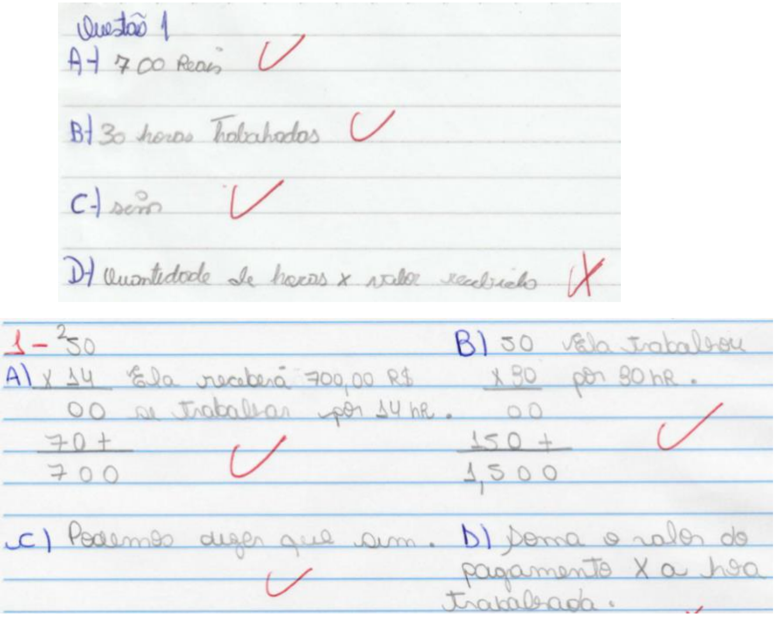
[20]ARARIBÁ, Projeto. **Matemática.** Editora Moderna. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

Figura 51 - Resolução correta da questão 1 de estudantes do Grupo A



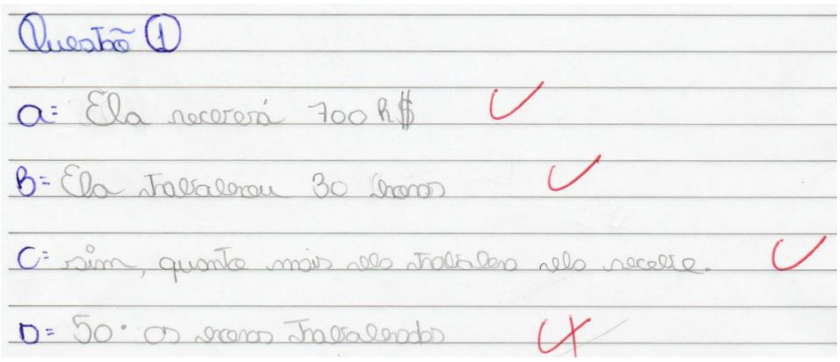
Fonte: Arquivo do autor.

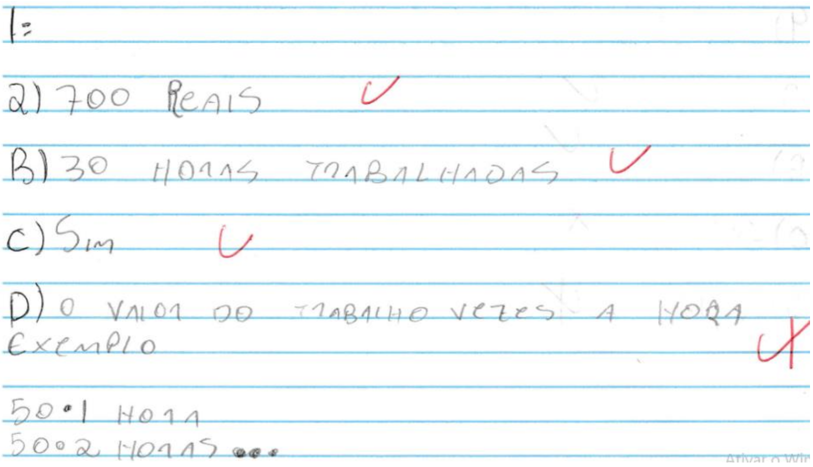
Figura 52 - Resolução parcialmente correta da questão 1 de estudantes do Grupo A



Fonte: Arquivo do autor.

Figura 53 - Resolução parcialmente correta da questão 1 de estudantes do Grupo B

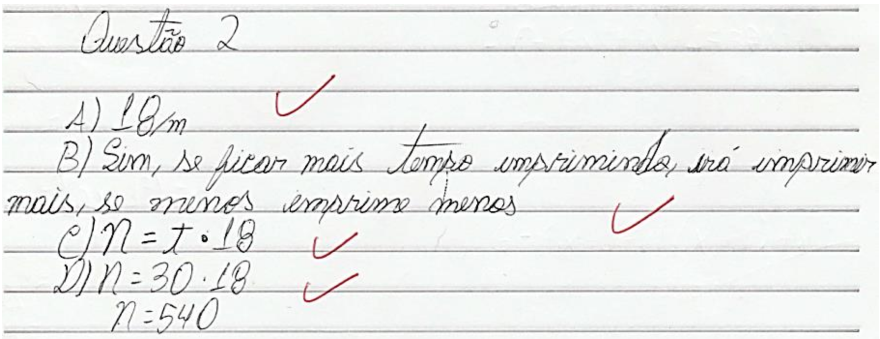



1=
a) 700 REAIS
B) 30 HORAS TRABALHADAS
C) Sim
D) O VALOR DO TRABALHO VEZES A HORA
EXEMPLO
50·1 HORA
50·2 HORAS ...

Fonte: Arquivo do autor.

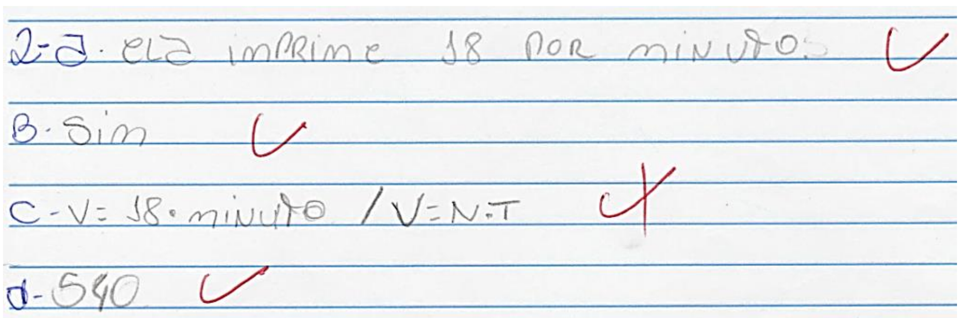
A resolução expressa pela Figura 51 demonstra que os alunos compreenderam e expressaram uma sentença matemática adequada a situação problema da questão 1. Porém, alguns estudantes apesar de compreender como era possível calcular o salário da personagem da questão, não conseguiam associar uma expressão matemática, e uma parcela não conseguiu, nem com palavras, expressar a lei de formação como observamos na Figura 52 e 53.

Figura 54 -Resolução correta da questão 2 de estudantes do Grupo A


Questão 2
A) 18/m
B) Sim, se ficar mais tempo imprimindo, irá imprimir mais, se menos imprime menos
C) $n = t \cdot 18$
D) $n = 30 \cdot 18$
$n = 540$

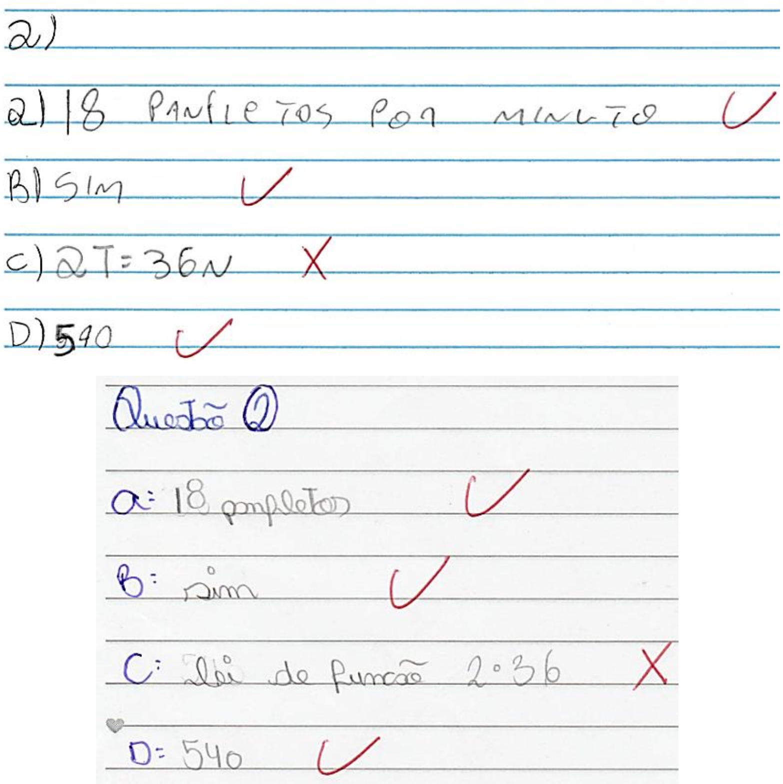
Fonte: Arquivo do autor.

Figura 55 - Resolução parcialmente correta da questão 2 de estudantes do Grupo A


2-a. ela imprime 18 por minuto.
B. Sim
C- V= 18·minuto / V=N·T
d- 540

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 56 - Resolução parcialmente correta da questão 2 de estudantes do Grupo B



Fonte: Arquivo do autor.

Percebemos que poucos estudantes do Grupo A (Figura 54) compreendem a questão e utilizam a linguagem matemática adequadamente. No entanto, uma dupla identifica corretamente como montar a lei de formação, mas não compreende como utilizar as variáveis apresentadas (*n* e *t*), levando-os a um acerto parcial da questão como observamos na Figura 55.

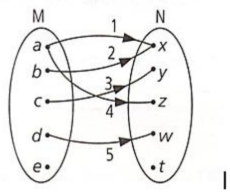
Nenhum estudante do Grupo B acertou todos os itens das questões 1 e 2 (Figura 56), apresentando expressivamente fragilidade em compreender a expressão matemática (lei de formação) que representa especificamente a situação problema apresentada.

Na questão 3 (Figura 57) os alunos tinham que assinalar uma alternativa que possibilitasse que o diagrama apresentado fosse uma função de M em N. Ao questionarem o professor, dizendo que “não sabiam” o que era um diagrama de função, o professor fez uma intervenção, escrevendo uma “dica” na lousa, e que tentassem usar aquela informação para responderem o restante da atividade.

Uma parcela de estudantes demonstrou uma motivação para tentar compreender o significado da dica apresentada pelo professor, um grupo de alunos reforçou a incompreensão mesmo diante da dica. Diversos estudantes destacaram, em momentos distintos, que ainda não tinham aprendido função, “nenhum professor ensinou”, indicando uma concepção de educação como um processo em que o professor transmite o saber e eles recebem esse conhecimento, no caso função, para eles, se "não sabem" o tema discutido é porque não foi ensinado por nenhum professor.

Figura 57 - Proposta da questão 3 disponibilizada aos alunos

Considere o diagrama abaixo:



Para que seja uma função de M em N, basta:

a) apagar a seta **1** e retirar o elemento *t*.

b) apagar as setas **1** e **4** e retirar o elemento *e*.

c) retirar os elementos *e* e *t*.

d) apagar a seta **4** e retirar o elemento *e*.

e) apagar a seta **2** e retirar o elemento *e*.

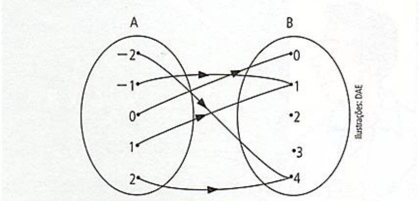
Fonte: Livro Didático.[19]

O grupo A apresentou apenas uma dupla, dos 21 respondentes, que acertou esta questão. Já no Grupo B, ocorreu um acerto unânime nesta pergunta.

Para encerrar a atividade a questão 4 (Figura 58) apresentava um outro diagrama, questionava aspectos específicos sobre o diagrama de funções, pedia aos estudantes que expressassem uma lei de formação e apresentassem os pares ordenados extraídos do diagrama. O item b) acabava sendo respondido pela própria questão, no item d). Com isso, ambos os grupos apresentaram um alto índice de acertos, sendo de 81% do Grupo A e 100% do grupo B neste item da questão.

Figura 58 - Proposta da questão 4 disponibilizada aos alunos

Observe o diagrama e responda às questões no caderno.



a) A todo número *x* tomado em A corresponde um único número *y* em B?

b) Esse diagrama ilustra uma função de A em B?

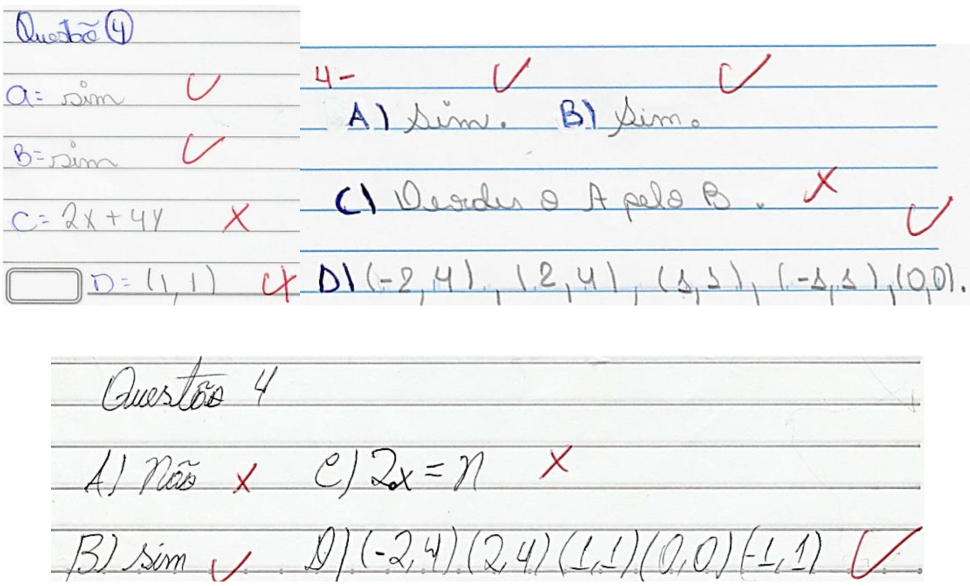
c) Escreva a expressão algébrica que liga as variáveis *x* e *y*.

d) Escreva os pares ordenados (*x*; *y*) dessa função.

Fonte: Livro Didático.[19]

Apenas duas duplas do grupo A não responderam a questão 4 e um aluno no Grupo B não completou as respostas. Verificamos que no item a) houve uma unanimidade de acertos no Grupo B, enquanto no Grupo A apenas uma dupla acertou, não houve nenhum estudante de ambos os grupos, que acertou o item c), em que se buscava uma lei de formação que associasse os elementos do diagrama e no item d) que solicitava os pares ordenados, os discentes do Grupo A apresentaram um alto índice de acertos, enquanto os alunos do Grupo B apresentaram acertos parciais, pois não mostraram todos os pares ordenados possíveis.

Figura 59 - Resolução parcialmente correta da questão 4, de estudantes dos Grupos A e B



Fonte: Arquivo do autor.

Observando as respostas constantes na Figura 59, notamos que os estudantes ainda não possuem uma clareza quanto ao conceito de função, possuem dificuldade em expressar, por meio de sentenças matemáticas, situações problemas e não compreendem as relações entre os elementos de um diagrama de uma função. Porém, a representação dos pares ordenados mostrou-se correta, ou seja, após a discussão da atividade 3, ressaltando a convenção matemática que estabeleceu a forma correta de apresentação de um par ordenado, eles compreenderam e expressaram corretamente.

No que se refere às discussões da tarefa nos trinta minutos finais da aula, percebemos que estes momentos de interação entre o professor e os alunos evidenciam o que Vygotsky chama de interações assimétricas, que desempenham um papel construtivo no conhecimento dos alunos, desenvolvendo algumas funções mentais superiores, que emergem justamente desse movimento de interação entre os membros da cultura, neste caso, da cultura escolar.

5.6.1 Conhecimentos prévios e os subsunçores

Com este conjunto de atividades buscávamos elementos que pudessem subsidiar o mapeamento da estrutura cognitiva dos aprendizes, bem como possibilitasse compreendê-la e mapeá-la.

Consideramos que com os resultados apresentados pelos estudantes é possível inferir que a maioria dos aprendizes possui um repertório adequado de conhecimentos prévios para alicerçar a aprendizagem de funções polinomiais de 1º e 2º graus. No entanto, há uma pequena parcela destes estudantes que apresenta fragilidades em diversos subsunçores investigados o que levaria ao comprometimento de sua aprendizagem, caso não seja oportunizado organizadores prévios que supram essa ausência ou fortaleçam esses conhecimentos prévios necessários para ancorar os novos conhecimentos.

As discussões feitas em sala de aula das questões, na sequência da aplicação das atividades, foram importantes para esclarecer dúvidas remanescentes das tarefas e fazê-los se atentarem para alguns detalhes e procedimentos matemáticos que impactam no resultado final. Identificamos em alguns momentos a assimilação obliteradora, segundo Moreira (2011) como a perda progressiva de dissociabilidade dos novos conhecimentos em relação aos conhecimentos que lhe deram significado, que serviram de ancoradouro cognitivo. Nos momentos em que os estudantes demonstravam ter esquecido determinado tema, se tratava de um esquecimento residual, isto é, o conhecimento esquecido está “dentro” do subsunçor.

Acreditamos que, as atividades matemáticas propostas nesta etapa da THA está dentro da ZDP da maioria dos estudantes, ou seja, a maneira com que se davam as interações (estudante-estudante ou estudante-professor) possibilitaram que construíssem conhecimentos sobre os temas que, talvez, não fossem capazes de construir por conta própria.

Todos os alunos se mostraram empenhados em realizar as tarefas, buscando seguir ao máximo as orientações dadas. Houve uma percepção, pelo professor/pesquisador de uma grande necessidade de validar, em diversos momentos, os procedimentos e as respostas que encontravam, e quando isso não acontecia, os alunos sentiam-se inseguros quanto ao resultado apresentado, indicando resquícios de uma concepção de educação fundamentada no empirismo.

Em uma análise preliminar, o professor/pesquisador considera que os grupos investigados, em sua maioria, possuiriam os elementos fundamentais para prosseguirem para a próxima atividade, o experimento. Na perspectiva da UEPS, trata-se de introduzir o conteúdo de ensino em um nível maior de complexidade considerando a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

A *Atividade 4 – Ideias de Funções* também cumpriu sua função secundária de apresentar o tópico de ensino em um nível introdutório, pois no momento de discussão das suas questões possibilitou trabalhar conceitos relacionados à ideia de função, sem definir sistematicamente o tema.

5.7 Experimento 1 – Esticando a Mola

Os estudantes foram orientados a formarem grupos de até cinco integrantes, e a cada um deles foi disponibilizado um roteiro experimental juntamente com uma calculadora e tranquilizados que era uma tarefa que seria desenvolvida durante toda a semana (6 aulas). Foi solicitado que três grupos se voluntariassem para vir à frente, e iniciar a coleta dos dados experimentais, com os kits experimentais disponíveis nas carteiras dispostas na frente da sala de aula conforme Figura 60.

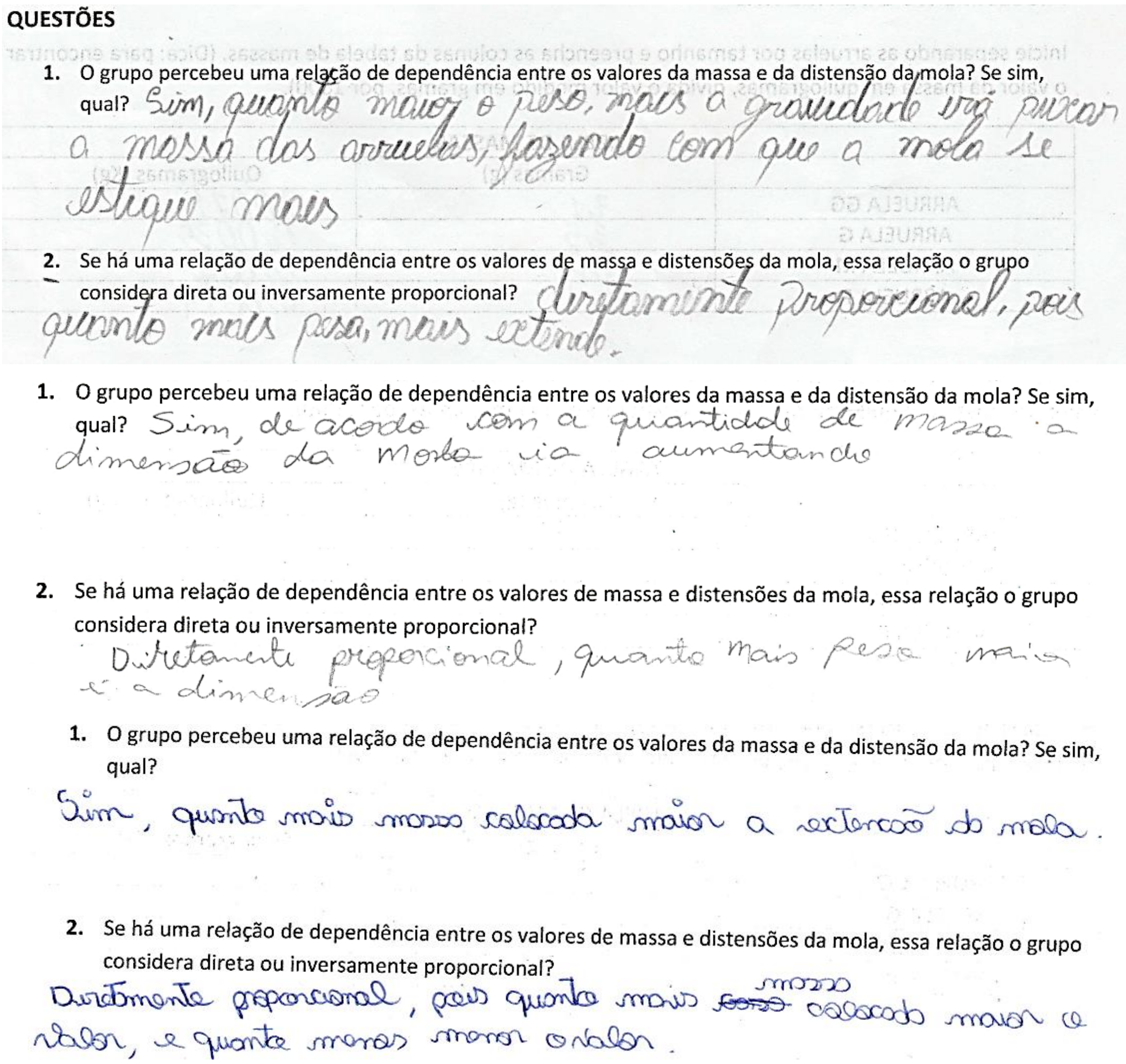
Figura 60 -Momento da coleta de dados dos grupos

Fonte: Arquivo do autor.

Após a fase de coleta de dados, os estudantes tinham que fazer as devidas conversões das unidades de medida (grama e centímetros) para as unidades do Sistema Internacional de Medidas (quilograma e metro) e responder às questões 1 e 2 do roteiro experimental.

Após a análise das respostas dos alunos, no que se refere às questões 1 e 2, de maneira unânime consideraram que a o experimento estabelecia uma relação entre as grandezas massa e distensão da mola como sendo diretamente proporcional e dos oito grupos analisados, apenas um disse não perceber uma relação de dependência entre as grandezas envolvidas.

Figura 61 - Entendimento correto dos estudantes dos Grupos A e B analisados


QUESTÕES

1. O grupo percebeu uma relação de dependência entre os valores da massa e da distensão da mola? Se sim, qual? Sim, quanto maior o peso, mais a gravidade irá puxar a massa das arruelas, fazendo com que a mola se estique mais

2. Se há uma relação de dependência entre os valores de massa e distensões da mola, essa relação o grupo considera direta ou inversamente proporcional? diretamente proporcional, pois quanto mais pesa, mais estende.

1. O grupo percebeu uma relação de dependência entre os valores da massa e da distensão da mola? Se sim, qual? Sim, de acordo com a quantidade de massa a dimensão da Mola ia aumentando

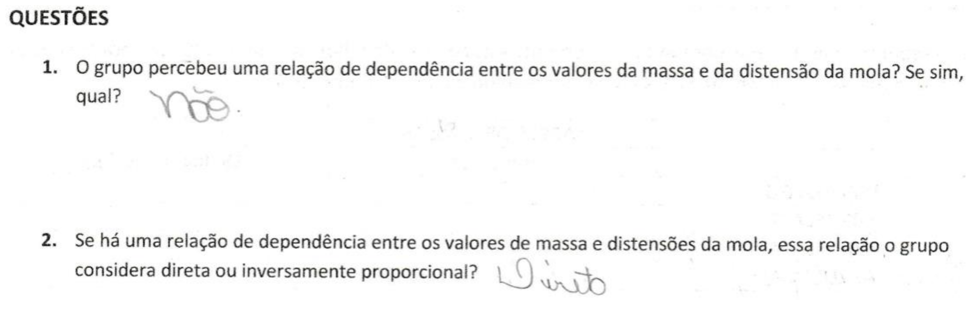
2. Se há uma relação de dependência entre os valores de massa e distensões da mola, essa relação o grupo considera direta ou inversamente proporcional? Diretamente proporcional, quanto mais pesa mais é a dimensão

1. O grupo percebeu uma relação de dependência entre os valores da massa e da distensão da mola? Se sim, qual?
Sim, quanto mais massa colocada maior a extensão da mola.

2. Se há uma relação de dependência entre os valores de massa e distensões da mola, essa relação o grupo considera direta ou inversamente proporcional?
Diretamente proporcional, pois quanto mais ~~peso~~ massa colocado maior o valor, e quanto menos menor o valor.

Fonte: Arquivo do autor

Figura 62 - Entendimento parcial de estudantes do Grupo B


QUESTÕES

1. O grupo percebeu uma relação de dependência entre os valores da massa e da distensão da mola? Se sim, qual? Não.

2. Se há uma relação de dependência entre os valores de massa e distensões da mola, essa relação o grupo considera direta ou inversamente proporcional? Direto

Fonte: Arquivo do autor.

Assim sendo, as unidades de registro relações entre grandezas e grandeza direta ou inversamente proporcionais são observáveis nas transcrições dos grupos nas questões 1 e 2 do roteiro experimental e demonstram que conseguiram, quase de forma unânime, compreender que há relação entre as grandezas massa e distensão da mola e que são diretamente proporcionais, ainda que, as justificativas necessitem de adequações nos termos que os estudantes utilizaram, observamos uma compreensão do que era solicitado.

Na sequência, nas 3ª e 4ª aulas para discussão experimental, os estudantes com ajuda e acompanhamento do professor/pesquisador, preencheram a tabela da questão 3, construíram e localizaram os pontos experimentais no plano cartesiano e finalizaram a tarefa das aulas, respondendo a questão 4 do respectivo roteiro experimental.

Com a retomada do experimento feito na aula passada, coletivamente iniciou-se uma discussão entre as equivalências entre força elástica e força peso. O docente explicou aspectos relacionados à 2ª Lei de Newton, exemplificou como deveriam proceder para calcular a força elástica que a questão 3 solicitava e já adiantou que deveriam colocar o valor escrito em uma potência de base 10, que entenderiam o motivo quando fossem para a fase de construção do plano cartesiano.

A unidade de registro associada a essas duas questões é a representação gráfica da situação experimental, articulada ao conhecimento de plano cartesiano. Diante disso, o professor/pesquisador passou as diretrizes para o cálculo da força elástica oralmente exemplificou o cálculo para as duas primeiras medidas e acompanhou o desenvolvimento dos estudantes nos demais cálculos.

Figura 63 - Tabela da questão 3, preenchida pelos estudantes dos Grupos A e B

3. Preencha a tabela abaixo e encontre o par ordenado, distensão da mola (x_0, x_1, x_2, x_3, ...) e força elástica ($m_0 \cdot g$, $m_1 \cdot g$, $m_2 \cdot g$, ...). Use $g \cong 9{,}8 m/s^2$

	Distensões da mola (x) (em metros)	Força Elástica (y) (em Newton)	Par Ordenado (x, y) (em notação científica)
MEDIDA 0 (SEM MASSA)	$2{,}3 \cdot 10^{-2}$	0	(2,3 ; 0)
MEDIDA 1 (Massa 1)	$2{,}4 \cdot 10^{-2}$	$7{,}1 \cdot 10^{-2}$	(2,4 ; 7,1)
MEDIDA 2 (Massas 1 e 2)	$3{,}1 \cdot 10^{-2}$	$10{,}8 \cdot 10^{-2}$	(3,1 ; 10,8)
MEDIDA 3 (Massas 1, 2 e 3)	$3{,}8 \cdot 10^{-2}$	$13{,}7 \cdot 10^{-2}$	(3,8 ; 13,7)
MEDIDA 4 (Massas 1, 2, 3 e 4)	$4 \cdot 10^{-2}$	$15{,}2 \cdot 10^{-2}$	(4 ; 15,2)

3. Preencha a tabela abaixo e encontre o par ordenado, distensão da mola (x_0, x_1, x_2, x_3, ...) e força elástica ($m_0 \cdot g$, $m_1 \cdot g$, $m_2 \cdot g$, ...). Use $g \cong 9{,}8 m/s^2$

	Distensões da mola (x) (em metros)	Força Elástica (y) (em Newton)	Par Ordenado (x, y) (em notação científica)	
MEDIDA 0 (SEM MASSA)	$2{,}1 \cdot 10^{-2}$	0	(2,1 ; 0)	A
MEDIDA 1 (Massa 1)	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	$7{,}2 \cdot 10^{-2}$	(2,5 ; 7,2)	B
MEDIDA 2 (Massas 1 e 2)	$3 \cdot 10^{-2}$	$10{,}9 \cdot 10^{-2}$	(3 ; 10,9)	C
MEDIDA 3 (Massas 1, 2 e 3)	$3{,}9 \cdot 10^{-2}$	$13{,}8 \cdot 10^{-2}$	(3,9 ; 13,8)	D
MEDIDA 4 (Massas 1, 2, 3 e 4)	$4{,}1 \cdot 10^{-2}$	$15{,}5 \cdot 10^{-2}$	(4,1 ; 15,5)	E

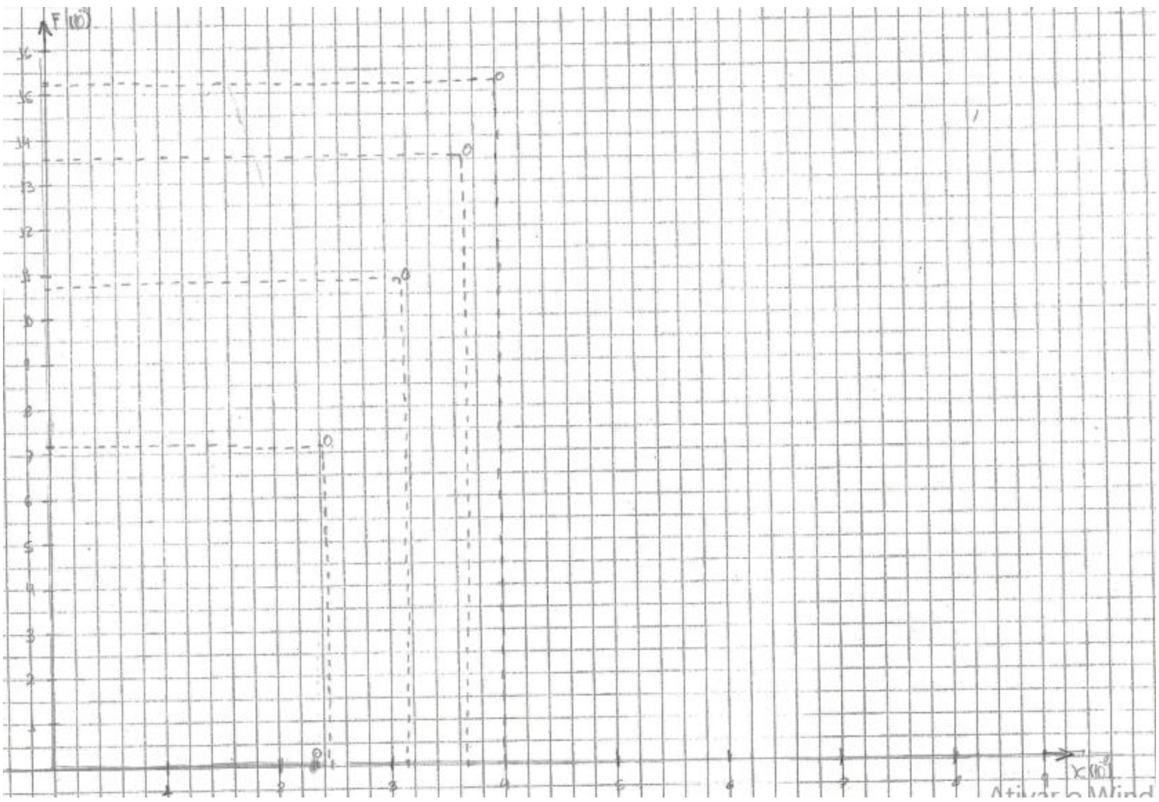
3. Preencha a tabela abaixo e encontre o par ordenado, distensão da mola (x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , ...) e força elástica ($m_0 \cdot g$, $m_1 \cdot g$, $m_2 \cdot g$, ...). Use $g \cong 9,8 m/s^2$

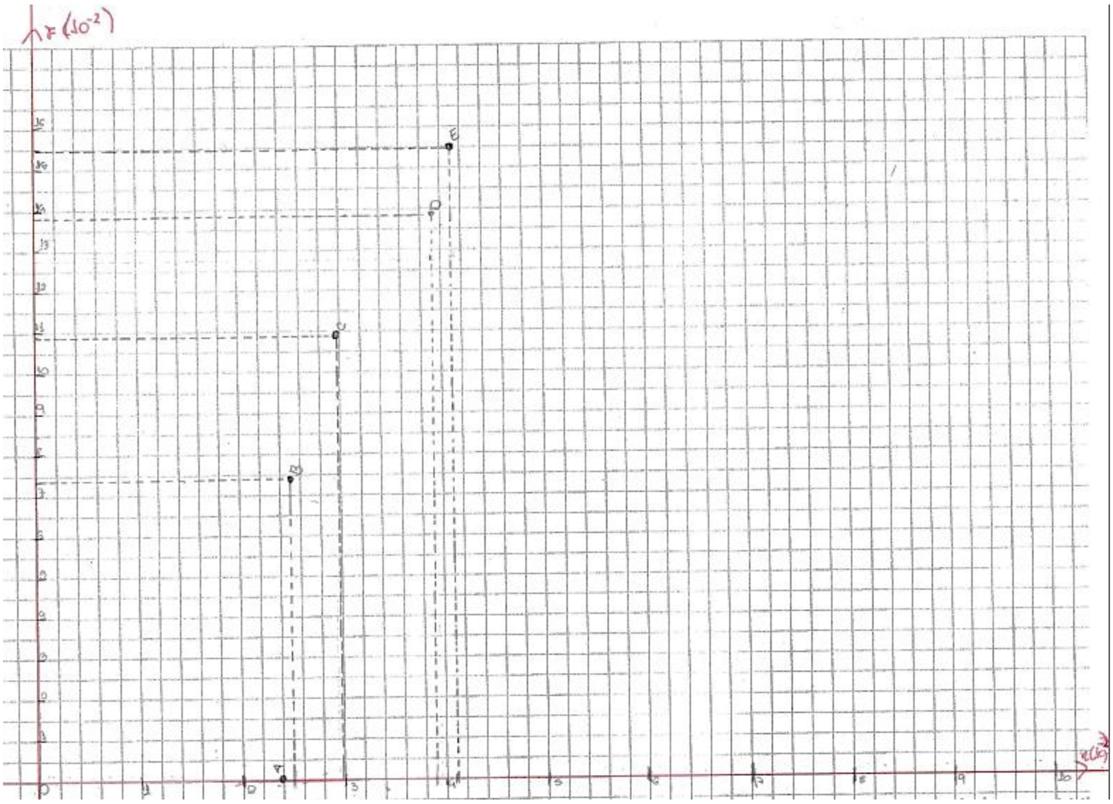
	Distensões da mola (x) (em metros)	Força Elástica (y) (em Newton)	Par Ordenado (x, y) (em notação científica)
MEDIDA 0 (SEM MASSA)	$2,9 \cdot 10^{-2}$	0	(2,3;0)
MEDIDA 1 (Massa 1)	$9,9 \cdot 10^{-2}$	$6,9 \cdot 10^{-2}$	(9,9;6,9)
MEDIDA 2 (Massas 1 e 2)	$14,1 \cdot 10^{-2}$	$10,4 \cdot 10^{-2}$	(14,1;10,4)
MEDIDA 3 (Massas 1, 2 e 3)	$16,6 \cdot 10^{-2}$	$12,3 \cdot 10^{-2}$	(16,6;12,3)
MEDIDA 4 (Massas 1, 2, 3 e 4)	$18,4 \cdot 10^{-2}$	$13,7 \cdot 10^{-2}$	(18,4;13,7)

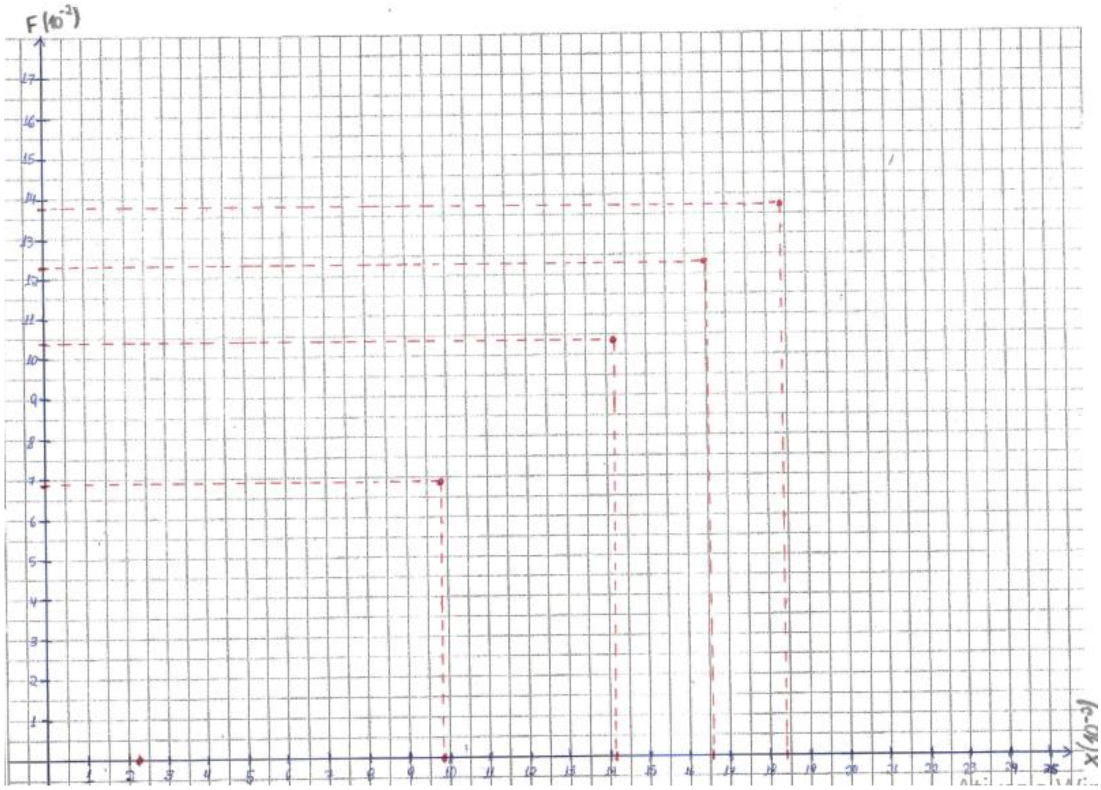
Fonte: Arquivo do autor.

Observaremos na Figura 64 a seguir, como os estudantes que produziram as tabelas acima, localizaram os pontos experimentais no plano cartesiano, em que a ordem dos planos apresentados é correspondente à ordem de apresentação das tabelas acima.

Figura 64 - Localização dos pontos experimentais no plano cartesiano dos estudantes analisados







Fonte: Arquivo do autor.

Em seguida, as imagens da Figura 65 mostram a compreensão do comportamento gráfico da situação experimental, na perspectiva dos grupos.

Figura 65 - Compreensão dos estudantes analisados referente ao comportamento gráfico dos pontos experimentais

4. Construam um plano cartesiano, com os eixos das abscissas e ordenadas, localize os pontos da tabela do item anterior, e responda:

a. É possível traçar uma reta por todos os pontos neste gráfico?

não, pois não traça todos os pontos.

b. A reta seria a melhor representação funcional destes pontos? Por quê?

Sim, se todos os pontos estivessem traçado ficaria melhor.

a. É possível traçar uma reta por todos os pontos neste gráfico?

Não.

b. A reta seria a melhor representação funcional destes pontos? Por quê?

Sim, porque não teríamos tanto trabalho de ficar fazendo linhas.

a. É possível traçar uma reta por todos os pontos neste gráfico?

Sim

b. A reta seria a melhor representação funcional destes pontos? Por quê?

sim, pois mostra um crescimento

Fonte: Arquivo do autor.

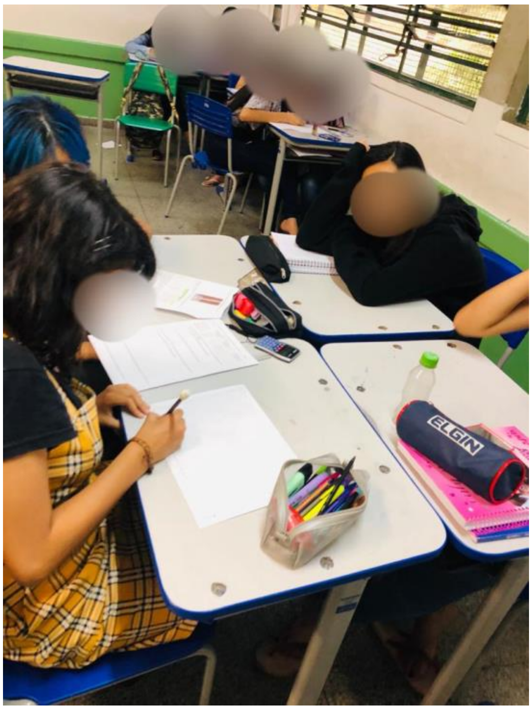
Notamos, com esses registros, que os alunos compreenderam a fase de cálculos da força elástica e de construção e localização dos pontos experimentais no plano cartesiano, ainda que tenham recorrido algumas vezes ao professor para uma orientação mais dirigida e validação dos valores que calculavam e também entenderam o processo de aproximação adotada nos eixos cartesianos.

No que se refere à compreensão do comportamento gráfico, esperava-se que respondessem que não era possível traçar uma reta por todos os pontos, no entanto, que a reta seria a melhor representação para o comportamento dos dados experimentais.

Percebemos que destes três grupos destacados, dois deles percebem que não é possível traçar uma reta utilizando todos os pontos experimentais, no entanto ressaltam que a reta seria a melhor representação, ainda que a justificativa não seja a mais adequada, compreendem que há uma tendência linear nos pontos que localizaram.

O grupo que considera ser possível traçar uma reta por todos os pontos, apresenta um plano cartesiano com os pontos bem alinhados, com exceção do ponto que representa a medida inicial, a qual não possuía massa na mola. Com isso, se os estudantes não se atentaram a essa medida, a consideração do grupo não está errada, e ainda acrescentam que a reta é a melhor representação para a situação experimental vivenciada, destacando que a mesma expressa um crescimento, ou seja, mesmo sem discutir uma função crescente ou decrescente, estes estudantes percebem essa tendência de crescimento entre as grandezas distensão da mola e força elástica por meio da análise dos pontos experimentais localizados no plano cartesiano.

Figura 66 – Estudantes construindo o plano cartesiano



Fonte: Arquivo do autor.

Os demais estudantes, que compunham o restante dos grupos analisados, apresentaram resultados semelhantes a esses três grupos destacados, e com esta fase concluída, nas duas aulas seguintes calculariam a constante elástica das molas e expressariam suas impressões sobre a proposta de experimentação para o ensino de matemática.

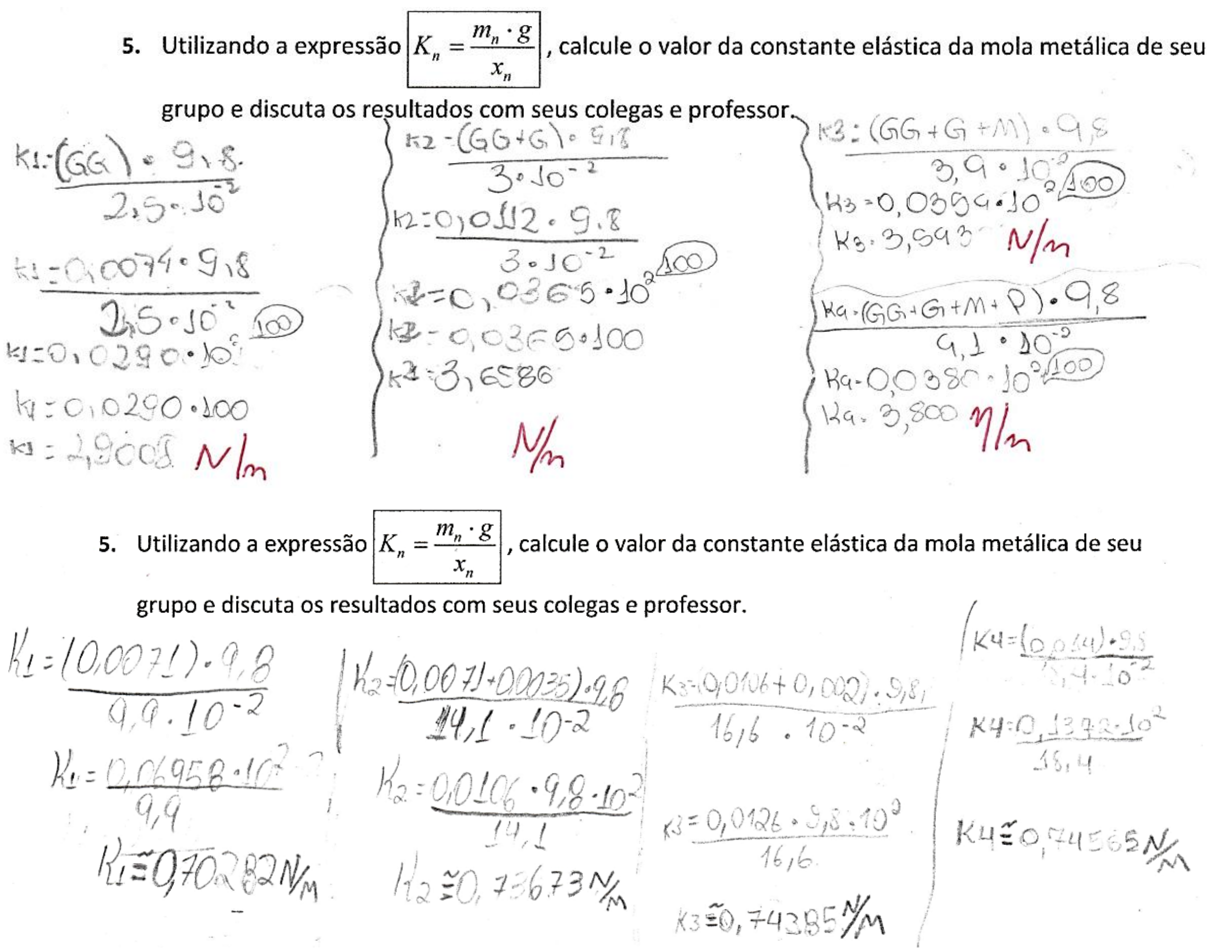
O professor/pesquisador iniciou as últimas aulas, que tinham como objetivo o cálculo da constante elástica das molas, entregando o roteiro experimental aos grupos e registrando a expressão algébrica destinada ao cálculo da constante na lousa, conforme era expressa no roteiro experimental.

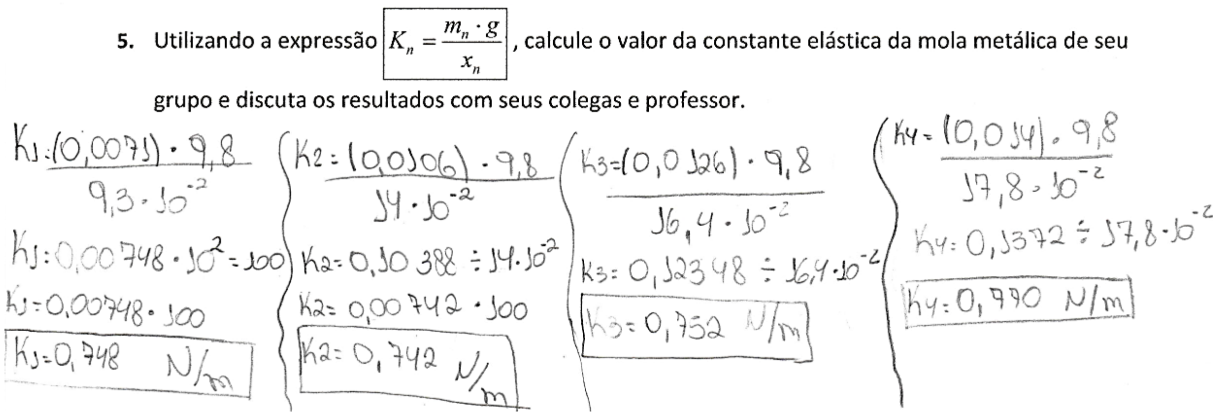
Nesta fase, os estudantes do Grupo A desenvolveram os procedimentos propostos com maior facilidade que os alunos do Grupo B, portanto analisaremos as produções dos grupos, neste momento, separadamente.

Os agrupamentos de estudantes do Grupo A dedicaram um momento de atenção à exemplificação dada pelo professor na lousa, sobre como utilizar a fórmula que determinaria o valor aproximado da constante elástica (*K*). Após este exemplo, foram orientados a calcular, utilizando as demais medidas experimentais, a constante (*K*) da mola que utilizaram.

Diante da solicitação, realizaram a tarefa buscando atendimento do professor/pesquisador pontualmente na realização dos cálculos. Limitaram-se, muitas vezes, a pedir apenas a verificação dos resultados. A Figura 67 abaixo apresenta os cálculos feitos pelos agrupamentos dos estudantes deste grupo.

Figura 67 - Cálculo da constante elástica (*K*) dos estudantes do Grupo A





5. Utilizando a expressão $K_n = \frac{m_n \cdot g}{x_n}$, calcule o valor da constante elástica da mola metálica de seu grupo e discuta os resultados com seus colegas e professor.

$K_1 = \frac{(0{,}0071) \cdot 9{,}8}{9{,}3 \cdot 10^{-2}}$

$K_1 = 0{,}00748 \cdot 10^{2} = 100$

$K_1 = 0{,}00748 \cdot 100$

$\boxed{K_1 = 0{,}748 \ N/m}$

$K_2 = \frac{(0{,}0106) \cdot 9{,}8}{14 \cdot 10^{-2}}$

$K_2 = 0{,}10388 \div 14 \cdot 10^{-2}$

$K_2 = 0{,}00742 \cdot 100$

$\boxed{K_2 = 0{,}742 \ N/m}$

$K_3 = \frac{(0{,}0126) \cdot 9{,}8}{16{,}4 \cdot 10^{-2}}$

$K_3 = 0{,}12348 \div 16{,}4 \cdot 10^{-2}$

$\boxed{K_3 = 0{,}752 \ N/m}$

$K_4 = \frac{(0{,}014) \cdot 9{,}8}{17{,}8 \cdot 10^{-2}}$

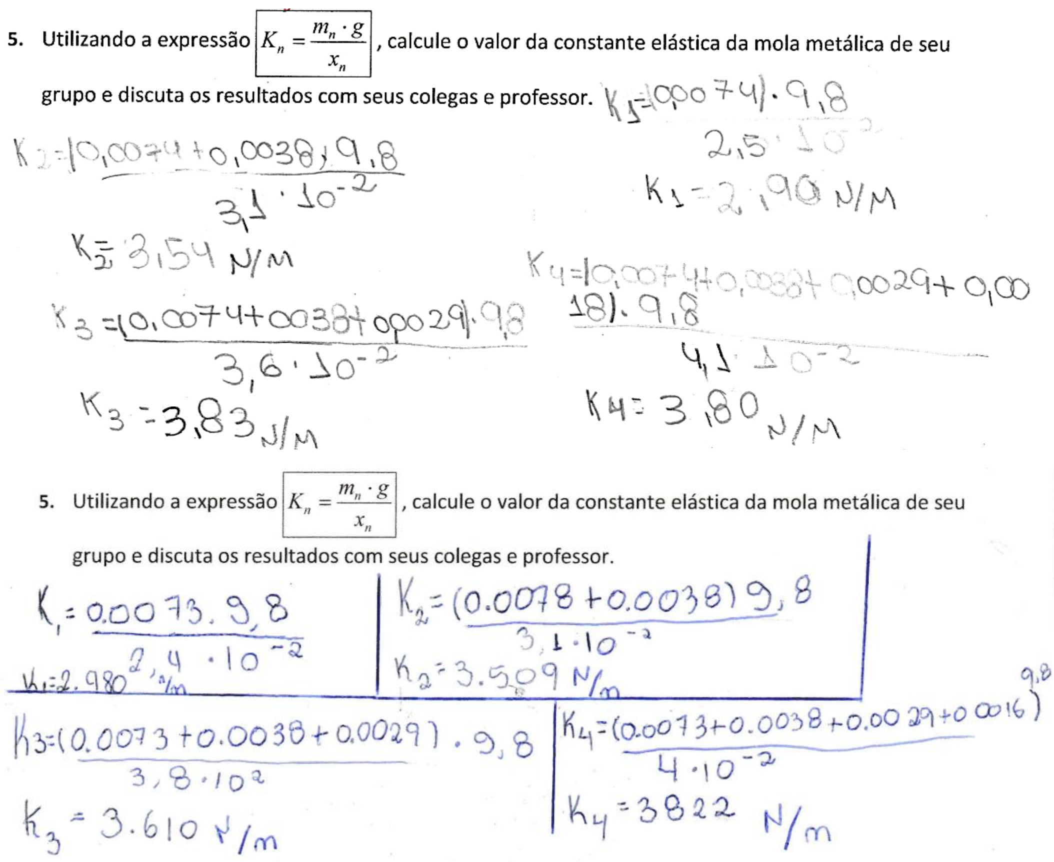
$K_4 = 0{,}1372 \div 17{,}8 \cdot 10^{-2}$

$\boxed{K_4 = 0{,}770 \ N/m}$

Fonte: Arquivo do autor.

Os estudantes que compunham os agrupamentos do Grupo B, não compreenderam com a mesma facilidade o exemplo feito pelo professor, exigindo que o professor/pesquisador realizasse, passo a passo as etapas com mais medidas experimentais. Das quatro medidas experimentais coletadas, apenas após o cálculo com a terceira, os estudantes compreenderam os procedimentos necessários e fizeram o cálculo com a última medida (K_4) por conta própria. Observaremos os resultados apresentados por esse grupo de alunos na Figura 68 a seguir.

Figura 68 - Cálculo da constante elástica (*K*) dos estudantes do Grupo B



5. Utilizando a expressão $K_n = \frac{m_n \cdot g}{x_n}$, calcule o valor da constante elástica da mola metálica de seu grupo e discuta os resultados com seus colegas e professor.

$K_1 = \frac{(0{,}0074) \cdot 9{,}8}{2{,}5 \cdot 10^{-2}}$

$K_1 = 2{,}90 \ N/M$

$K_2 = \frac{(0{,}0074 + 0{,}0038) \cdot 9{,}8}{3{,}1 \cdot 10^{-2}}$

$K_2 = 3{,}54 \ N/M$

$K_3 = \frac{(0{,}0074 + 0{,}0038 + 0{,}0029) \cdot 9{,}8}{3{,}6 \cdot 10^{-2}}$

$K_3 = 3{,}83 \ N/M$

$K_4 = \frac{(0{,}0074 + 0{,}0038 + 0{,}0029 + 0{,}0018) \cdot 9{,}8}{4{,}1 \cdot 10^{-2}}$

$K_4 = 3{,}80 \ N/M$

5. Utilizando a expressão $K_n = \frac{m_n \cdot g}{x_n}$, calcule o valor da constante elástica da mola metálica de seu grupo e discuta os resultados com seus colegas e professor.

$K_1 = \frac{0.0073 \cdot 9{,}8}{2{,}4 \cdot 10^{-2}}$

$K_1 = 2.980 \ N/m$

$K_2 = \frac{(0.0078 + 0.0038) \, 9{,}8}{3{,}1 \cdot 10^{-2}}$

$K_2 = 3.509 \ N/m$

$K_3 = \frac{(0.0073 + 0.0038 + 0.0029) \cdot 9{,}8}{3{,}8 \cdot 10^{2}}$

$K_3 = 3.610 \ N/m$

$K_4 = \frac{(0.0073 + 0.0038 + 0.0029 + 0.0016) \, 9{,}8}{4 \cdot 10^{-2}}$

$K_4 = 3822 \ N/m$

Fonte: Arquivo do autor.

Ao término desta etapa, o professor chamou a atenção dos estudantes para si, e discutiu brevemente que apesar de serem valores diferentes, eram muito próximos e que por se tratar de uma atividade experimental e atividades dessa natureza são imbuídas de erros, ainda que estivessem trabalhando com a mesma mola, essas variações representavam a influência desses diversos erros (observador, instrumento e arredondamento) que ao longo da proposta fizeram parte da atividade.

Sendo assim, finalizaram a tarefa respondendo a questão 6 que buscava as impressões sobre esse tipo de estratégia (atividade experimental) para auxiliar no ensino. Essa unidade de registro definida como atividade experimental como contexto para o ensino de funções, apresenta alguns resultados relevantes, advindo dos estudantes conforme ilustra a Figura 69 abaixo.

Figura 69 - Considerações dos alunos sobre o uso de uma atividade experimental no ensino

6. Deixem suas impressões sobre a atividade proposta, dificuldades, elogios e críticas são bem vindos.

achamos interessante, tivemos algumas dificuldades, mas foi um grande aprendizado.

6. Deixem suas impressões sobre a atividade proposta, dificuldades, elogios e críticas são bem vindos.

Nós aprendemos muitas coisas, nos divertimos bastante, e poderia ter mais atividades assim, em grupo.

6. Deixem suas impressões sobre a atividade proposta, dificuldades, elogios e críticas são bem vindos.

Muito legal, uma aula diferenciada com uso de materiais novos, e aprendendo fazer novos cálculos.

6. Deixem suas impressões sobre a atividade proposta, dificuldades, elogios e críticas são bem vindos.

A ATIVIDADE PROPOSTA FOI BEM DIFERENTE, TRAZENDO UMA NOVA EXPERIENCIA E NOS DESAFIANDO. FOI DIVERTIDO TER ATIVIDADES DIFERENTES, MAS SE MANTENDO NA PROPOSTA DA AULA

Fonte: Arquivo do autor.

Ao analisarmos estes registros, evidenciamos que os estudantes percebem a importância de propor estratégias para o ensino que se diferenciem das práticas rotineiramente adotadas nas aulas. Mostraram-se engajados em diversos momentos "*[...] nos divertimos bastante [...]*" e reconheceram que algumas etapas foram desafiadoras "*[...] tivemos algumas dificuldades [...]*".

Novamente a interação social, que necessita de no mínimo duas pessoas trocando significados entre si, fez-se presente e se mostrou como fundamental para que os estudantes pudessem favorecer seus desenvolvimentos cognitivos, e ainda, se apropriarem de alguns sistemas de conceitos científicos. Para Ivic (2010):

> A propriedade essencial dos conceitos científicos é a sua estrutura, o fato de serem organizados em sistemas hierarquizados [...]. Interiorizando essa estrutura, a criança amplia consideravelmente as possibilidades de seu pensamento, desde que tal estrutura coloque à sua disposição um conjunto de operações intelectuais. (IVIC, 2010, p.23)

Tanto a realização quanto a discussão do roteiro experimental permitiram lidar simultaneamente com dois processos necessários à construção cognitiva, a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

Ao atribuir novos significados a um dado conceito subsunçor recorremos a diferenciação progressiva, processo este que aconteceu, por exemplo, durante a discussão da constante elástica, uma vez que fizemos um processo de diferenciação entre o termo mais abrangente constante e mais específico constante elástica.

Quando discutimos a melhor representação gráfica para os pontos experimentais, e a relação de proporcionalidade direta entre as grandezas massa e distensão da mola, para eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências e integrar significados, utilizamos um processo característico da reconciliação integradora.

No que se refere à trajetória hipotética de aprendizagem, as atividades matemáticas disponibilizadas aos alunos, assim como os objetivos de aprendizagem estabelecidos pelo professor, corresponderam satisfatoriamente ao levantamento de hipóteses de como aconteceria a aprendizagem dos temas matemáticos explorados na etapa tanto de reconhecimento da estrutura cognitiva como da apresentação do tópico de ensino em níveis introdutório e de maior de complexidade.

Sendo assim, consideramos que a atividade experimental alcançou os objetivos previamente estabelecidos, em uma perspectiva que permitisse que os estudantes pudessem construir seus conhecimentos por meio das intervenções propostas.

Reconhecemos que o roteiro experimental se apresentou como uma atividade de ensino que discute o tema da área da matemática a ser ensinado (funções) em um nível maior de complexidade, utilizando-se da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora durante sua realização. Privilegiou as interações sociais entre os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem do conhecimento social, histórica e culturalmente construído de inter para intrapessoal. Identificamos que se mostrou também como um elemento que explora a aplicabilidade e o contexto daquele tópico de ensino, articulado à outra área do conhecimento, no caso a Física.

5.8 Atividades do processo de aprendizagem

Os estudantes, após finalizarem as atividades de reconhecimento da estrutura cognitiva e a atividade experimental *Esticando a Mola*, acompanharam uma sequência de aulas de matemática, em que o professor da turma discutiu sistematicamente: o conceito de função, o zeros da função polinomial de 1º e 2º graus, crescimento e decrescimento da função polinomial de 1º grau, vértice da parábola, discriminante (Δ) nas funções polinomiais de 2º grau e construções de tabelas e gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º graus.

O docente recorreu a uma estratégia de ensino subsidiada por uma reunião de aulas expositivas-dialogadas, em que se discutia a definição, possibilitava explicações e exemplificações do tema, disponibilizava aos estudantes acesso a exercícios de fixação e complementares de aprendizagens, privilegiando os momentos destinados as correções dialogadas, buscando nestes instantes esclarecer o maior número possível de dúvidas remanescentes.

Posto isto, as próximas duas intervenções se deram logo após a discussão de conceitos e explorações de diversos domínios do tópico de ensino em questão. Por uma organização da Seduc (Secretaria da Educação do Estado de São Paulo), tópicos de proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade foram também discutidos, devido à aplicação e discussão de uma avaliação (AAP – Avaliação da Aprendizagem em Processo) enviada regularmente pela Secretaria.

O propósito desta avaliação é oportunizar um acompanhamento da aprendizagem das turmas e estudantes individualmente e, possui uma natureza diagnóstica. Busca a partir da análise de seus resultados, auxiliar a escola e seus professores a elaborarem estratégias adequadas de ensino que contribuam para a melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, com foco no processo de recuperação contínua.

Com isso, as próximas atividades propostas por essa pesquisa, possuem um caráter de reconhecimento de como estão sendo consolidadas as aprendizagens de temas específicos para esse ano/série, e se os estudantes apresentam indícios de que ocorreram aprendizagens significativas.

A Quadro 4, a seguir, explicita quais unidades de registro foram definidas, a partir das análises dos objetivos e das questões propostas, para as atividades destinadas a identificar indícios de aprendizagem significativa, considerando que os subsunçores necessários para assimilação dos novos conhecimentos encontram-se disponíveis na estrutura cognitiva da maioria dos aprendizes analisados.

Quadro 4 - Unidades de registro: Atividades 5 e 6

TEMAS	DESCRIÇÃO
Relações de proporcionalidade direta, inversa ou não proporcionalidade entre grandezas.	Compreensão dos estudantes sobre a identificação correta e diferenças entre proporcionalidade direta e inversa e identificação de situações que não envolvem proporcionalidade.
Constante de proporcionalidade	Compreensão dos estudantes sobre grandeza direta ou inversamente proporcional envolvida na atividade experimental.
Expressões algébricas e leis de formação de funções em situações-problema diversas	Compreensão dos estudantes na montagem e representação de expressões matemáticas que traduzam as situações-problemas, tabelas ou gráficos apresentados.
Gráficos de funções	Compreensão dos estudantes em situações que envolvem gráfico de funções polinomiais de 1º e 2º graus.

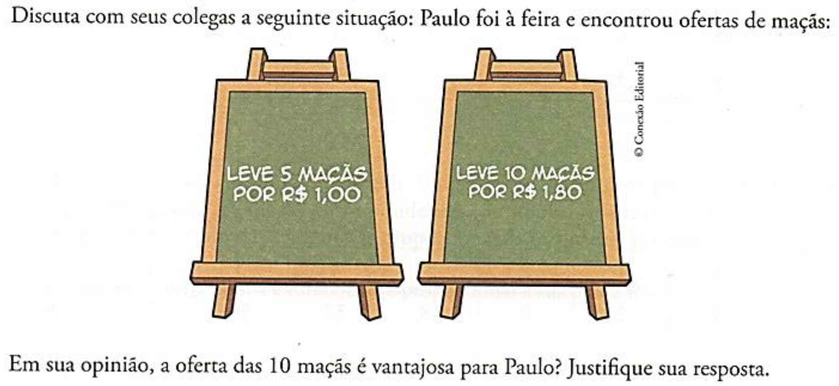
5.8.1 Atividade 5 – Relações de Proporcionalidade

Os estudantes foram orientados a se agruparem em duplas, pois teriam duas aulas para realização da atividade, sem consulta de aparelhos eletrônicos e nem uso de calculadora. Dispuseram de pouca interferência nos procedimentos que adotavam para solucionar as questões pelo professor/pesquisador, assim sendo era importante que buscassem discutir as resoluções entre si.

A primeira questão (Figura 70) buscava compreender se os estudantes reconheciam, em uma situação cotidiana, a vantagem em realizar uma compra, envolvendo o pensamento de proporcionalidade direta.

Esperava-se que os estudantes expressassem em suas resoluções que dobrando a quantidade de maçãs, o preço deveria dobrar, e no caso apresentado o preço associado ao dobro da quantidade de maçãs apresentava vinte centavos de diferença, caracterizando uma situação vantajosa para o cliente.

Figura 70 - Proposta da questão 1 disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B


Discuta com seus colegas a seguinte situação: Paulo foi à feira e encontrou ofertas de maçãs:

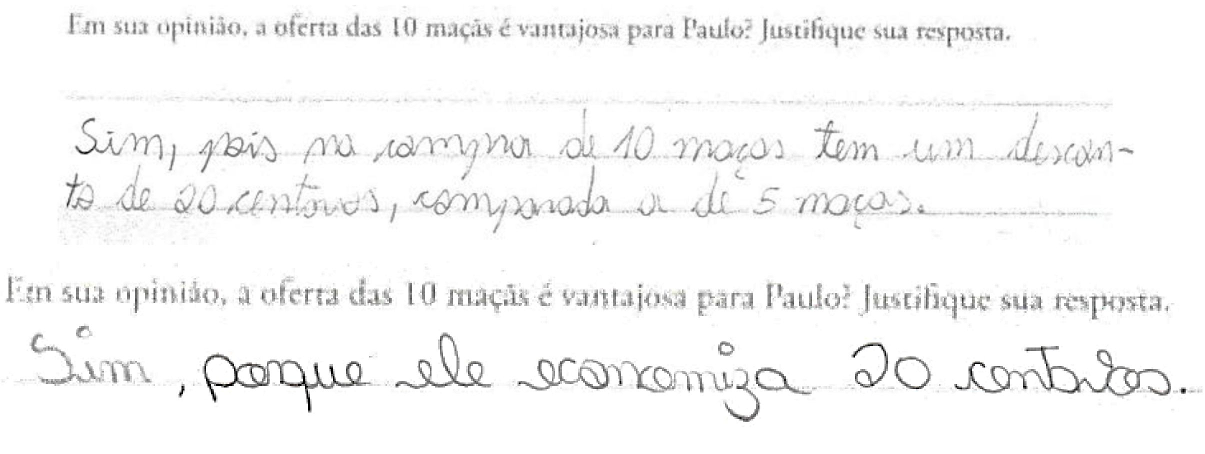
Em sua opinião, a oferta das 10 maçãs é vantajosa para Paulo? Justifique sua resposta.

Fonte: Material didático SEDUC.[21]

A maior parte das duplas considerou ser vantajoso para Paulo fazer a compra que envolvia um desconto e apenas uma dupla opinou que não, justificando em sua resposta que o desconto não era muito expressivo, recorrendo ao ponto de vista financeiro para fundamentar sua resposta e não ao de proporcionalidade direta como era esperado. Há uma sinalização positiva de que os conhecimentos de proporcionalidade direta associados às situações do cotidiano beneficiam a aquisição de aprendizagens significativas.

Percebemos diante dos registros dos alunos, que algumas duplas de estudantes conseguem identificar em algumas situações contextualizadas, a existência de uma relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas, como observamos anteriormente na atividade experimental. Neste caso, investigava implicitamente nas respostas dos estudantes, as noções de proporcionalidade direta entre as grandezas preço e quantidade de frutas.

Figura 71 - Resolução correta da questão 1, de estudantes dos Grupos A e B


Em sua opinião, a oferta das 10 maçãs é vantajosa para Paulo? Justifique sua resposta.

Sim, pois na compra de 10 maçãs tem um desconto de 20 centavos, comparada a de 5 maçãs.

Em sua opinião, a oferta das 10 maçãs é vantajosa para Paulo? Justifique sua resposta.

Sim, porque ele economiza 20 centavos.

[21]SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Caderno do aluno: matemática, Ensino Fundamental Anos Finais – 8ªSérie/9ºAno, volume 1**. São Paulo: SEE, 2014.

Em sua opinião, a oferta das 10 maçãs é vantajosa para Paulo? Justifique sua resposta.

Na minha opinião sim. Pois ele está levando mais 5 maçãs por apenas 0,80 centavos, se não estivesse na promoção ele iria pagar R$ 2,00.

Em sua opinião, a oferta das 10 maçãs é vantajosa para Paulo? Justifique sua resposta.

SIM, É VANTAJOSO, POIS ELE VAI ECONOMIZAR 20 CENTAVOS COM A OFERTA.

Fonte: Arquivo do autor.

Com exceção de apenas uma das duplas analisadas, os agrupamentos pertencentes aos Grupos A e B, reconhecem a proporcionalidade direta entre as grandezas expressas no problema, como vimos na Figura 71, e admitem ser uma oferta vantajosa para Paulo.

A questão 2 da atividade proposta (Figura 72) possui quatro itens (*a*,*b*,*c* e *d*) que apresentam algumas tabelas, solicitando aos estudantes que verifiquem se há uma relação de proporcionalidade direta ou inversa entre as grandezas, ou até mesmo se não há relação de proporcionalidade. Na existência de uma relação de proporcionalidade, era pedido aos alunos que apresentassem a lei de formação que representasse a situação expressa na tabela.

Figura 72 - Proposta da questão 2 item a) disponibilizada aos estudantes

A tabela a seguir indica como varia a grandeza **y** em função da grandeza **x**. Analise-a e, levando em conta os valores apresentados, diga se as grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais, ou se não são nem direta nem inversamente proporcionais. Em cada caso, escreva a expressão algébrica que relaciona **x** e **y**.

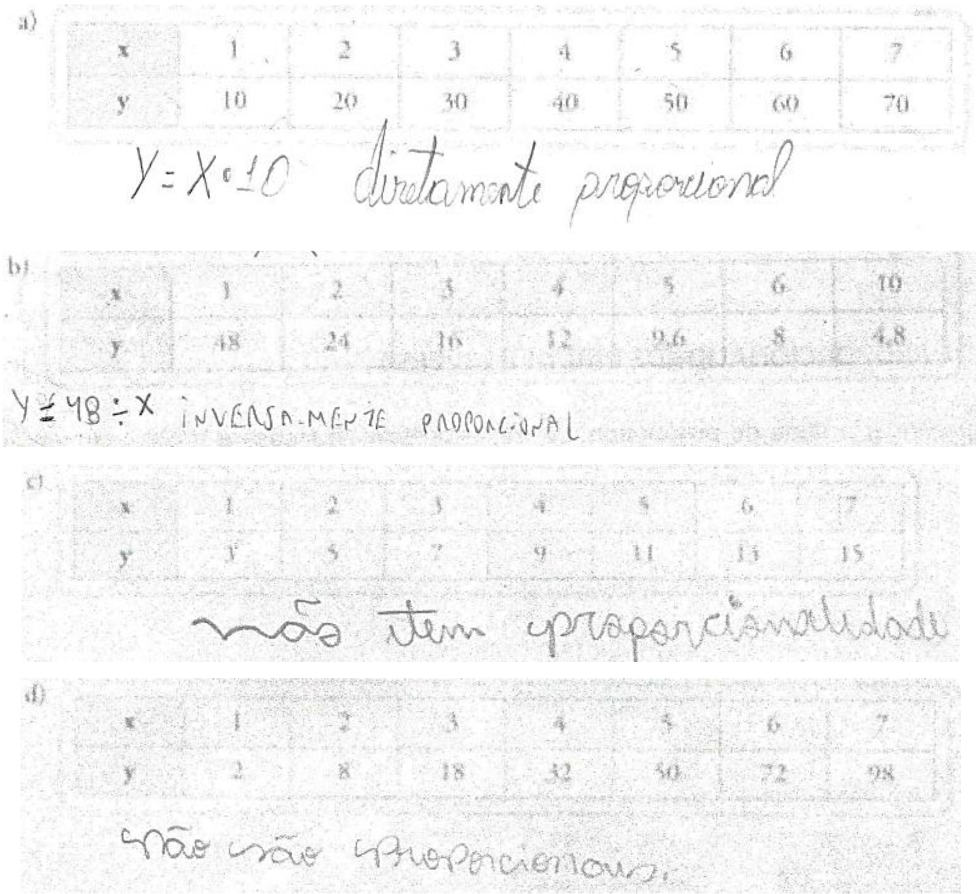
a)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	10	20	30	40	50	60	70

Fonte: Material didático SEDUC. [21]

Ao analisar as respostas dos estudantes, poucas duplas demonstraram clareza e compreensão total do que era solicitado, realizando corretamente a questão. A maior parcela dos alunos apresentou dificuldades em diferenciar as situações que envolviam ou não relações de proporcionalidade, por meio da análise das tabelas, assim como também demonstrou dificuldades em escrever uma lei de formação que traduzisse a relação entre as grandezas expostas. Não conseguiram expor também quais tabelas representavam grandezas direta ou inversamente proporcionais e quais não expressavam nenhuma relação de proporcionalidade.

Figura 73 - Resolução correta da questão 2, de estudantes dos Grupos A e B



a)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	10	20	30	40	50	60	70

y = x · 10 diretamente proporcional

b)

x	1	2	3	4	5	6	10
y	48	24	16	12	9,6	8	4,8

y = 48 ÷ x INVERSAMENTE PROPORCIONAL

c)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15

não tem proporcionalidade

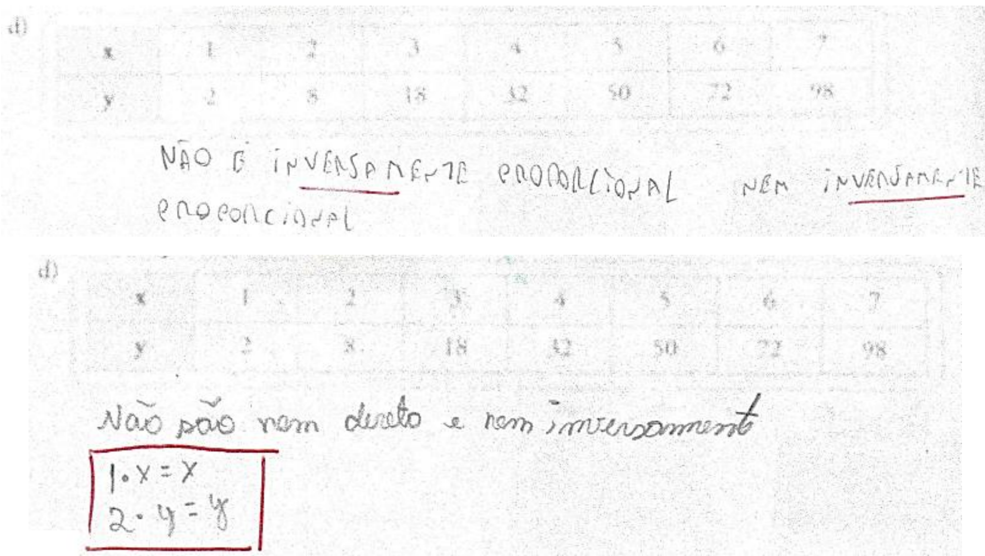
d)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	8	18	32	50	72	98

não são proporcionais.

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 74 - Resolução parcialmente correta da questão 2 item d), de estudantes dos Grupos A e B



d)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	8	18	32	50	72	98

NÃO É INVERSAMENTE PROPORCIONAL NEM INVERSAMENTE PROPORCIONAL

d)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	8	18	32	50	72	98

Não são nem direto e nem inversamente

1 · x = x
2 · y = y

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 75 - Resolução incorreta da questão 2 item c), de estudantes dos Grupos A e B

c)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15

$y = 2x + 1$ Diretamente proporcional

c)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15

DIRETAMENTE, POR QUE QUANDO O X AUMENTA, O Y AUMENTA TAMBEM

Fonte: Arquivo do autor.

Observamos na Figura 74 que há uma interpretação correta da tabela, no entanto uma dupla se expressa equivocadamente repetindo a palavra inversamente, e no outro caso busca por uma lei de formação que traduza a relação entre as grandezas da tabela, de forma equivocada.

Já na Figura 75, as duplas não atribuem corretamente a relação de proporcionalidade existente, porém um dos agrupamentos traduz a relação existente entre as grandezas *x* e *y* por meio de uma expressão algébrica correta, e a outra dupla se limita a dizer que, por perceber que ambas as grandezas crescem são diretamente proporcionais, sem se atentar a necessidade de haver uma constante de proporcionalidade envolvida.

Em seguida, nas questões 3 e 4 (Figura 76) são exploradas as mesmas habilidades da questão 2, com o diferencial de que os estudantes deveriam preencher uma das linhas da tabela, para depois comparar as grandezas.

Figura 76 - Proposta das questões 3 e 4, disponibilizadas aos estudantes dos Grupos A e B

3. Refaça a tabela apresentada na atividade 2, item **c** da seção Você aprendeu?, e verifique se há proporcionalidade entre **x** e **y – 1**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15
y – 1							

4. Faça a mesma análise com o item d da atividade 2 apresentado na seção Você aprendeu?, verificando se há proporcionalidade entre os valores de **y** e os de **x²**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
x^2							
y	2	8	18	32	50	72	98

Fonte: Material didático SEDUC.[21]

Podemos observar nas Figuras 77 e 78 abaixo, algumas soluções corretas e parcialmente corretas apresentadas pelos agrupamentos de alunos nestas questões. Apenas uma dupla de cada um dos Grupos A e B, analisou e respondeu corretamente essas questões. As dificuldades já percebidas na questão anterior, também foram enxergadas nestas propostas, haja vista que são extensões da questão 2.

Figura 77 - Resolução correta das questões 3 e 4, de estudantes dos Grupos A e B

3. Refaça a tabela apresentada na atividade 2, item **c** da seção Você aprendeu?, e verifique se há proporcionalidade entre **x** e **y – 1**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15
y – 1	2	4	6	8	10	12	14

$y - 1 = 2 \cdot x$, diretamente proporcional

4. Faça a mesma análise com o item d da atividade 2 apresentado na seção Você aprendeu?, verificando se há proporcionalidade entre os valores de **y** e os de **x²**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
x^2	1	4	9	16	25	36	49
y	2	8	18	32	50	72	98

$y = 2x^2$

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 78 - Resolução parcialmente correta das questões 3 e 4 de alunos do Grupo A

3. Refaça a tabela apresentada na atividade 2, item **c** da seção Você aprendeu?, e verifique se há proporcionalidade entre **x** e **y – 1**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15
y – 1	2	4	6	8	10	12	14

4. Faça a mesma análise com o item d da atividade 2 apresentado na seção Você aprendeu?, verificando se há proporcionalidade entre os valores de y e os de x^2. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
x^2	1	4	9	16	25	36	49
y	2	8	18	32	50	72	98

diretamente proporcional, porque se multiplicarmos o valor de x por 2 vai dar o valor de y.

Fonte: Arquivo do autor.

Ao analisarmos as resoluções parcialmente corretas dos alunos, notamos que, em sua maioria, as tabelas são corretamente preenchidas, porém a interpretação entre as grandezas não é explicitada ou não justificam corretamente a pergunta.

A próxima questão (Figura 79) buscava identificar se os alunos reconheciam ou não, uma relação de proporcionalidade direta, em algumas situações cotidianas. Caso percebessem a existência de proporcionalidade direta, deveriam expressar a lei de formação e o valor da constante de proporcionalidade.

Figura 79 - Proposta da questão 5 itens (*a*,*b* e *c*) disponibilizada aos estudantes

Em cada um dos casos apresentados a seguir, verifique se há ou não proporcionalidade direta entre as medidas das grandezas correspondentes. Se houver, expresse tal fato algebricamente, indicando o valor da constante de proporcionalidade, quando possível.

a) A massa **m** de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade **t**?

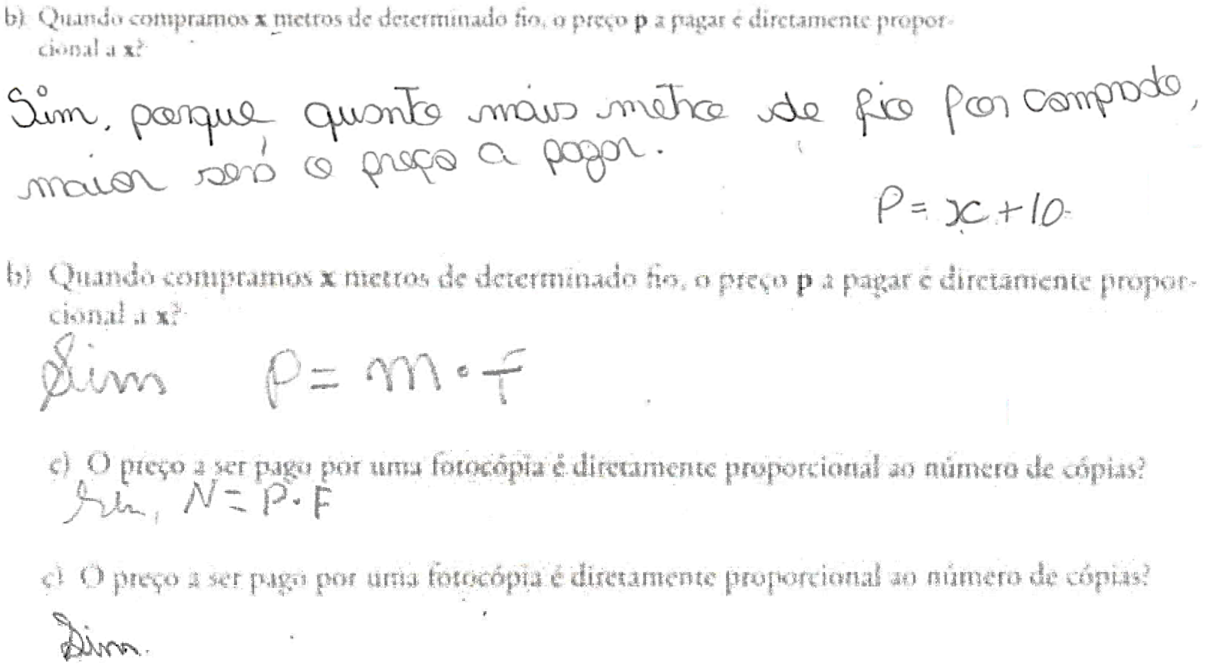
b) Quando compramos **x** metros de determinado fio, o preço **p** a pagar é diretamente proporcional a **x**?

c) O preço a ser pago por uma fotocópia é diretamente proporcional ao número de cópias?

Fonte: Material didático SEDUC.[21]

Todos os estudantes reconheceram corretamente as situações em que há relação de proporcionalidade direta entre as grandezas, no entanto não conseguem expressar as leis de formação e nem evidenciar a constante de proporcionalidade das situações em que as respostas são afirmativas. Claramente, demonstram grande dificuldade em associar uma sentença matemática a uma situação problema ou tabela de valores.

Figura 80 - Resolução parcialmente correta de itens da questão 5, de estudantes dos Grupos A e B



b) Quando compramos **x** metros de determinado fio, o preço **p** a pagar é diretamente proporcional a **x**?

Sim, porque quanto mais metro de fio for comprado, maior será o preço a pagar.

$P = x + 10$

b) Quando compramos **x** metros de determinado fio, o preço **p** a pagar é diretamente proporcional a **x**?

Sim $P = m \cdot f$

c) O preço a ser pago por uma fotocópia é diretamente proporcional ao número de cópias?

Sim, $N = P \cdot F$

c) O preço a ser pago por uma fotocópia é diretamente proporcional ao número de cópias?

Sim.

Fonte: Arquivo do autor.

Os estudantes reconheceram que as situações propostas nos itens b) e c) são diretamente proporcionais, mas não apresentaram expressões que traduzissem essas situações, assim como expuseram algumas expressões próximas do que era esperado, e outras que se distanciavam do que é previsto como solução.

Por conseguinte, as questões 6 e 7 ofertavam expressões algébricas que representavam suas respectivas situações-problema, tal como discutia os significados de suas variáveis nos contextos apresentados. Houve a necessidade de o professor/pesquisador mediar estas questões de forma mais diretiva aos estudantes, que relatavam não compreender o que era solicitado, consequentemente, impossibilitando-os de apresentarem as soluções.

Na lousa, o professor buscou resolver a questão 6, item (a), explicando a expressão algébrica da situação-problema, assim como o significado de suas variáveis. Este item solicitava que encontrassem o valor numérico da constante de proporcionalidade, conceito já incompreendido na questão anterior.

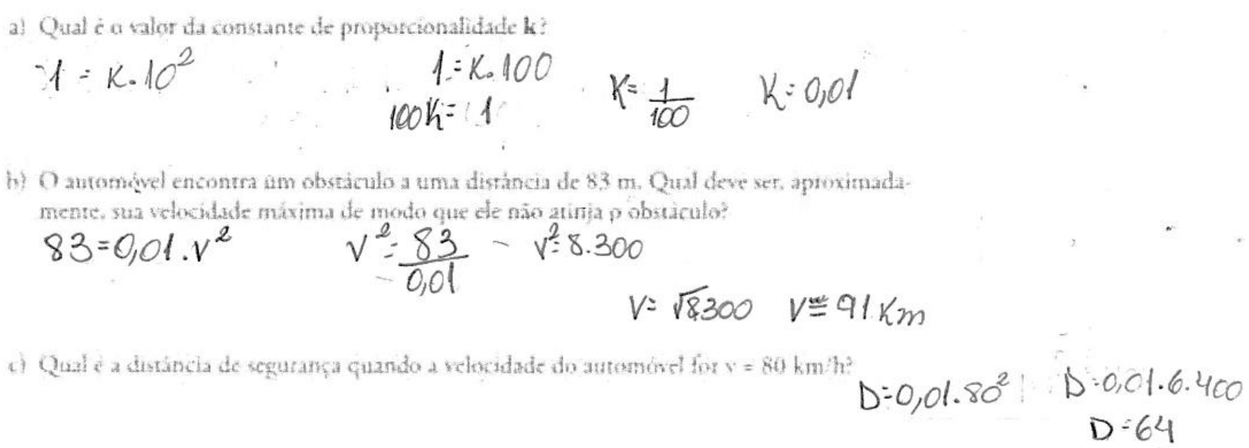
Após expor o procedimento para determinação da constante de proporcionalidade, o docente oralmente instruiu os alunos de que o valor encontrado deveria ser utilizado nos itens b) e c) substituindo-o na expressão algébrica, inicialmente, ofertada, e que com isso buscassem resolver a questão. Poucas duplas concluíram os demais itens, muitos continuavam afirmando não saber como resolver, portanto o professor/pesquisador aconselhou aos demais alunos que deixassem em branco o que não conseguiam solucionar e se dirigissem para a compreensão e solução das próximas questões.

Identificamos nesta etapa da análise, observando os registros dos alunos (Figuras 81 e 82), de que uma grande parte dos agrupamentos nesta atividade demonstrou algumas fragilidades em alguns subsunçores considerados essenciais, que possibilitariam ancorar aprendizagens novas.

Ainda que, a finalidade da mediação adotada pelo professor buscasse resgatar possíveis conhecimentos prévios esquecidos, pois para Moreira (2011) a aprendizagem significativa não é aquela que o aprendiz nunca esquece, pois na aprendizagem significativa o esquecimento é residual, ou seja, há resquícios do conhecimento no subsunçor.

Observamos que alguns estudantes ainda permaneciam com algumas barreiras para solucionarem as questões, o que indica que não possuíam os subsunçores bem coesos para cumprirem com suas funções, como era esperado, não possibilitando a aquisição de uma aprendizagem significativa.

Figura 81 - Resolução correta da questão 6, de estudantes dos Grupos A e B



a) Qual é o valor da constante de proporcionalidade **k**?

$1 = K.10^2$ $1 = K.100$ $100K = 1$ $K = \frac{1}{100}$ $K = 0,01$

b) O automóvel encontra um obstáculo a uma distância de 83 m. Qual deve ser, aproximadamente, sua velocidade máxima de modo que ele não atinja o obstáculo?

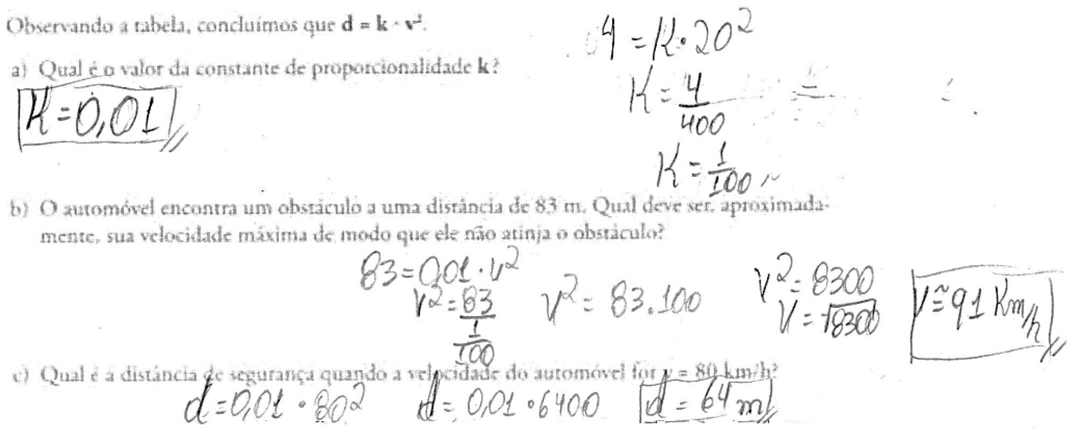
$83 = 0,01.v^2$ $v^2 = \frac{83}{0,01}$ – $v^2 = 8.300$

$V = \sqrt{8300}$ $V \cong 91$ Km

c) Qual é a distância de segurança quando a velocidade do automóvel for v = 80 km/h?

$D = 0,01.80^2$ $D = 0,01.6.400$

$D = 64$



Observando a tabela, concluímos que $\mathbf{d} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^2$.

a) Qual é o valor da constante de proporcionalidade **k**?

$\boxed{K=0{,}01}$ $4 = K \cdot 20^2$ $K = \frac{4}{400}$ $K = \frac{1}{100}$

b) O automóvel encontra um obstáculo a uma distância de 83 m. Qual deve ser, aproximadamente, sua velocidade máxima de modo que ele não atinja o obstáculo?

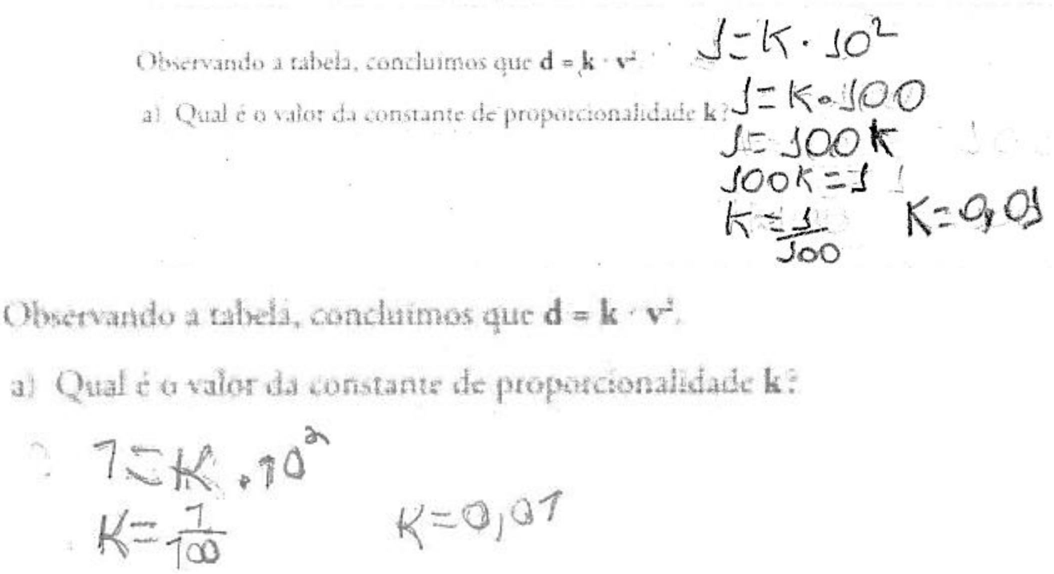
$83 = 0{,}01 \cdot v^2$ $v^2 = \frac{83}{\frac{1}{100}}$ $v^2 = 83.100$ $v^2 = 8300$ $V = \sqrt{8300}$ $\boxed{V \cong 91\ Km/h}$

c) Qual é a distância de segurança quando a velocidade do automóvel for $v = 80$ km/h?

$d = 0{,}01 \cdot 80^2$ $d = 0{,}01 \cdot 6400$ $\boxed{d = 64m}$

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 82 - Resolução parcialmente correta da questão 6, de estudantes do Grupo A



Observando a tabela, concluímos que $\mathbf{d} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^2$.

a) Qual é o valor da constante de proporcionalidade **k**?

$1 = K \cdot 10^2$ $1 = K \cdot 100$ $1 = 100K$ $100K = 1$ $K = \frac{1}{100}$ $K = 0{,}01$

Observando a tabela, concluímos que $\mathbf{d} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^2$.

a) Qual é o valor da constante de proporcionalidade **k**?

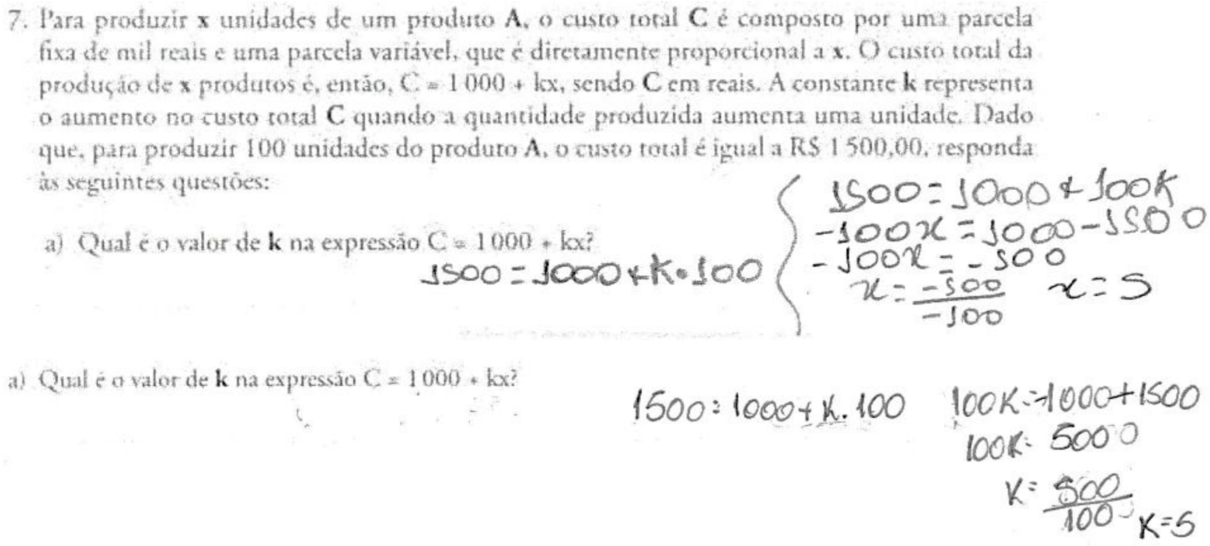
$1 = K \cdot 10^2$ $K = \frac{1}{100}$ $K = 0{,}01$

Fonte: Arquivo do autor.

No que se refere à questão 7, a única mediação feita pelo professor/pesquisador foi a leitura coletiva da pergunta e explicação do seu objetivo, encerrando com algumas perguntas direcionadas aos estudantes, por exemplo, qual das variáveis da expressão algébrica poderiam associar ao custo total, qual podiam relacionar aos produtos em unidades, e qual letra representava a constante de proporcionalidade. Os estudantes que responderam corretamente tiveram sua fala validada pelo professor, que completou que bastava substituir pelos valores apresentados no problema descrito e deste modo encontrariam a solução.

Uma parcela maior de estudantes disse compreender e resolveram corretamente a questão, como mostra a Figuras 83 a seguir, porém ainda havia um grupo de alunos que claramente não relacionava as informações do problema com a expressão algébrica e o conceito de constante de proporcionalidade. Sendo assim, o professor/pesquisador reforçou a orientação para que prosseguissem com a tarefa e deixassem a questão em branco. Claramente uma parcela dos estudantes, de ambos os grupos, não detinha conceitos subsunçores capazes de ancorar as aprendizagens que estavam sendo propostas no momento.

Figura 83 - Resolução correta da questão 7, de estudantes dos Grupos A e B


7. Para produzir **x** unidades de um produto **A**, o custo total **C** é composto por uma parcela fixa de mil reais e uma parcela variável, que é diretamente proporcional a **x**. O custo total da produção de **x** produtos é, então, C = 1 000 + kx, sendo **C** em reais. A constante **k** representa o aumento no custo total **C** quando a quantidade produzida aumenta uma unidade. Dado que, para produzir 100 unidades do produto **A**, o custo total é igual a R$ 1 500,00, responda às seguintes questões:

a) Qual é o valor de **k** na expressão C = 1 000 + kx?

1500 = 1000 + k · 100

1500 = 1000 + 100k
−100x = 1000 − 1500
−100x = −500
$x = \frac{-500}{-100}$ x = 5

a) Qual é o valor de **k** na expressão C = 1 000 + kx?

1500 = 1000 + k . 100

100K = −1000 + 1500
100K = 500
$K = \frac{500}{100}$ K = 5

Fonte: Arquivo do autor.

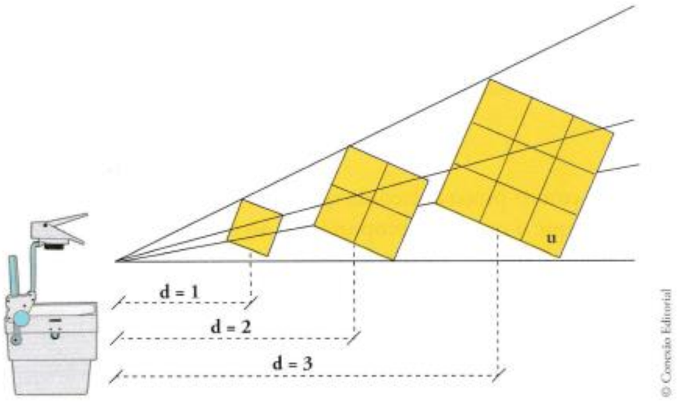
Desse modo, de maneira bem acentuada ficou evidente a dificuldade das duplas de alunos em compreender e articular as linguagens (língua portuguesa e matemática). Aliado a isso, temos o fato de que não entendiam o significado da constante de proporcionalidade nas situações propostas.

As interações entre professor-aluno e aluno-aluno não foram suficientemente capazes de garantir um ganho nas aprendizagens, talvez as hipóteses levantadas durante a elaboração desta atividade da THA não estivesse dentro da ZDP da maioria dos estudantes naquele momento, necessitando em uma reformulação que se adequasse melhor ao contexto das turmas.

Por fim, a questão 8 (Figura 84) composta por quatro itens (*a, b, c* e *d*) expõe algumas particularidades que necessitam ser observadas. A primeira delas é no que se refere aos itens a) e b), os estudantes não demonstraram grande dificuldade em entender e resolver a tabela apresentada, nem em assinalar a expressão que relacionava a área de projeção à distância do equipamento até a tela de projeção.

Figura 84 - Proposta da questão 8 itens (*a*,*b*, *c* e *d*) disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B

A área **A** de uma imagem projetada é dada em função da distância **d** entre o projetor e a tela.



a) Observe a figura e complete a tabela a seguir, que relaciona a área **A** da imagem com a distância **d** do projetor:

Distância (d)	1	2	3	4	5	6	7
Área (A) (u)	1						

b) Qual das expressões a seguir representa a relação entre **A** e **d**?

$A = 2d$ ( ) $A = d + 4$ ( ) $A = d^2$ ( ) $A = d + 1$ ( )

c) A área **A** da imagem é diretamente proporcional à distância **d** do projetor? Se sim, quanto vale a razão de proporcionalidade?

d) A área **A** da imagem é diretamente proporcional ao quadrado da distância **d** ao projetor? Se sim, quanto vale a razão de proporcionalidade?

Fonte: Material didático SEDUC.[21]

Uma segunda consideração importante é ponderar que alguns agrupamentos que deixaram essa questão em branco, não necessariamente obtiveram esse comportamento porque não compreenderam o que era pedido, e sim porque o tempo de aula foi insuficiente para que concluíssem devido ao excessivo período que dedicaram à compreensão e resolução das questões anteriores.

Finalmente, consideramos que não foi uma boa decisão, no que se refere à escolha dos itens (c) e (d) da questão 8. Apesar de serem perguntas pertinentes ao tema de estudo, consideramos que não foram relevantes para os grupos de alunos analisados, visto que já estavam bastante exaustos com os desafios encontrados nas questões anteriores e o fato da mudança nas perguntas destes itens serem tão sutis, induziram os estudantes a contradições, não atendendo ao propósito de quando a atividade foi concebida e planejada.

Figura 85 - Resolução correta da questão 8, de estudantes do Grupo A

a) Observe a figura e complete a tabela a seguir, que relaciona a área **A** da imagem com a distância **d** do projetor:

Distância (d)	1	2	3	4	5	6	7
Área (A) (u)	1	4	9	16	25	36	49

b) Qual das expressões a seguir representa a relação entre **A** e **d**?

A = 2d ( )   A = d + 4 ( ) $A = d^2$ (X)   A = d + 1 ( )

c) A área **A** da imagem é diretamente proporcional à distância **d** do projetor? Se sim, quanto vale a razão de proporcionalidade?

não, porque não é diretamente proporcional.

d) A área **A** da imagem é diretamente proporcional ao quadrado da distância **d** ao projetor? Se sim, quanto vale a razão de proporcionalidade?

Sim, se multiplicar o d por ele mesmo vai dar o resultado de A

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 86 - Resolução parcialmente correta da questão 8, de estudantes dos Grupos A e B

a) Observe a figura e complete a tabela a seguir, que relaciona a área **A** da imagem com a distância **d** do projetor:

Distância (d)	1	2	3	4	5	6	7
Área (A) (u)	1	4	9	16	25	36	49

b) Qual das expressões a seguir representa a relação entre **A** e **d**?

A = 2d ( )   A = d + 4 ( ) $A = d^2$ (X)   A = d + 1 ( )

c) A área **A** da imagem é diretamente proporcional à distância **d** do projetor? Se sim, quanto vale a razão de proporcionalidade?

R: diretamente proporcional, $A = D^2$

d) A área **A** da imagem é diretamente proporcional ao quadrado da distância **d** ao projetor? Se sim, quanto vale a razão de proporcionalidade?

R: Sim, $A = D^2$

a) Observe a figura e complete a tabela a seguir, que relaciona a área **A** da imagem com a distância **d** do projetor:

Distância (d)	1	2	3	4	5	6	7
Área (A) (u)	1	4	9	16	25	36	49

b) Qual das expressões a seguir representa a relação entre **A** e **d**?

$A = 2d$ ( ) $A = d + 4$ ( ) $A = d^2$ (X) $A = d + 1$ ( )

c) A área **A** da imagem é diretamente proporcional à distância **d** do projetor? Se sim, quanto vale a razão de proporcionalidade?

Sim, $d^2=A$, então a raiz quadrada

d) A área **A** da imagem é diretamente proporcional ao quadrado da distância **d** ao projetor? Se sim, quanto vale a razão de proporcionalidade?

Sim, $A=d^2$, o quadrado da distância

Fonte: Arquivo do autor.

As unidades de registro desta atividade (relações e constante de proporcionalidade e expressões algébricas em situações-problema) foram parcialmente atendidas, haja vista que um número considerável de grupos finalizaram a atividade 5 com fragilidades na compreensão e definição da lei de formação em situações-problema, na ideia e determinação da constante de proporcionalidade e na diferenciação entre relações de proporcionalidade direta e inversa e nas situações que não envolviam proporcionalidade.

A discussão feita com os alunos da atividade nas duas aulas subsequentes à sua aplicação, demostrou ser muito rica e possibilitadora de aprendizagens significativas, como veremos na seção seguinte. Estudantes que anteriormente a sua correção não compreendiam claramente a ideia de constante de proporcionalidade e a relação entre uma situação-problema e uma expressão algébrica que a traduzisse, na atividade 6 demonstraram assimilar tais conhecimentos expressando-os corretamente aos contextos explorados.

Um outro aspecto relevante a ser destacado é o fato dessa intervenção ter sugerido uma necessidade de readequação da Atividade 6 inicialmente planejada. A THA possibilita ao professor ajustar a trajetória em um ou mais domínios (objetivos, atividades matemática) que a constituem, buscando refletir melhor seu aumento de conhecimento sobre as aprendizagens dos estudantes.

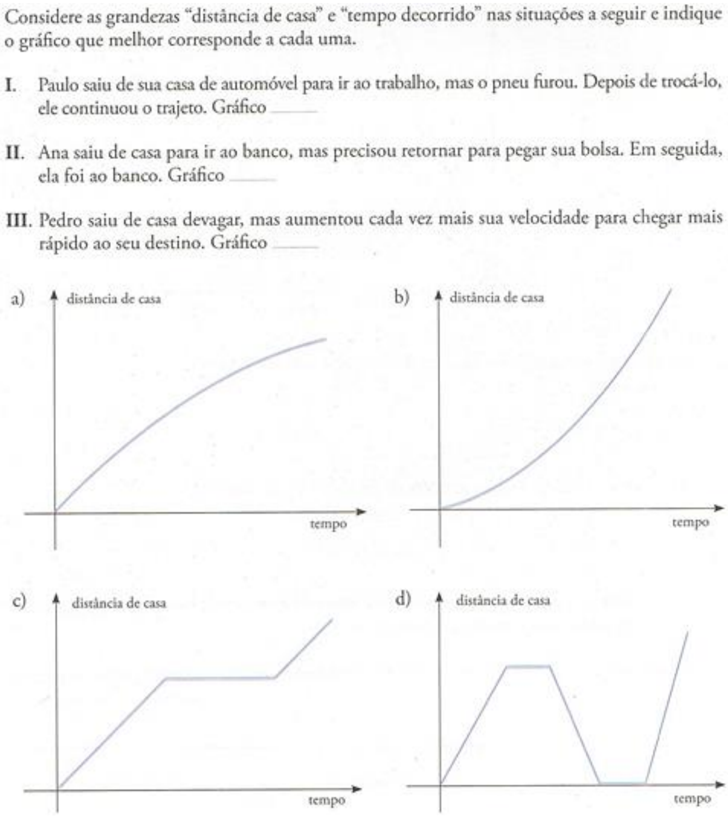
5.8.2 Atividade 6 – Gráfico de Funções

O professor/pesquisador direcionou os estudantes pedindo para que se agrupassem em duplas, no entanto, autorizou a formação de dois trios no Grupo A, que fariam a atividade sem consulta de aparelhos eletrônicos e de calculadoras. O docente entregou aos agrupamentos uma cópia da atividade 6 – Gráficos de Funções que objetivava aproximar o conhecimento associado aos gráficos de funções polinomiais, constante de proporcionalidade e lei de formação com situações-problema específicas.

Assim como na proposta da atividade experimental *Esticando a Mola*, que associava o experimento de Física: a uma relação de proporcionalidade direta, a um gráfico que contém uma reta como representação mais adequada de seus pontos e a uma expressão algébrica que possibilitava o cálculo da constante elástica da mola metálica. Esta tarefa tinha como objetivo fazer com que os estudantes compreendessem as diversas relações existentes entre as situações-problema apresentadas e as suas respectivas representações gráfica e a algébrica.

A primeira questão (Figura 87) buscava compreender se os estudantes articulavam uma representação gráfica a uma situação do dia-a-dia, onde as variáveis eram “distância de casa” e “tempo”.

Figura 87 - Proposta da questão 1, disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B



Considere as grandezas “distância de casa” e “tempo decorrido” nas situações a seguir e indique o gráfico que melhor corresponde a cada uma.

I. Paulo saiu de sua casa de automóvel para ir ao trabalho, mas o pneu furou. Depois de trocá-lo, ele continuou o trajeto. Gráfico ______

II. Ana saiu de casa para ir ao banco, mas precisou retornar para pegar sua bolsa. Em seguida, ela foi ao banco. Gráfico ______

III. Pedro saiu de casa devagar, mas aumentou cada vez mais sua velocidade para chegar mais rápido ao seu destino. Gráfico ______

Fonte: Material didático SEDUC.[21]

Os alunos analisados, em sua maioria, demonstraram compreender o que era solicitado e associaram corretamente a situação apresentada ao gráfico correspondente. Dentre os 27 estudantes analisados, apenas um não relacionou corretamente nenhum dos gráficos às situações-problema. Cerca de 22% dos estudantes demonstraram, pelo menos uma associação assertiva entre gráfico e situação-problema, conforme observamos nas Figuras 88 e 89 a seguir.

Figura 88 - Resolução correta da questão 1, de estudantes dos Grupos A e B

1. Considere as grandezas "distância de casa" e "tempo decorrido" nas situações a seguir e indique o gráfico que melhor corresponde a cada uma.

   I. Paulo saiu de sua casa de automóvel para ir ao trabalho, mas o pneu furou. Depois de trocá-lo, ele continuou o trajeto. Gráfico c

   II. Ana saiu de casa para ir ao banco, mas precisou retornar para pegar sua bolsa. Em seguida, ela foi ao banco. Gráfico d

   III. Pedro saiu de casa devagar, mas aumentou cada vez mais sua velocidade para chegar mais rápido ao seu destino. Gráfico b

1. Considere as grandezas "distância de casa" e "tempo decorrido" nas situações a seguir e indique o gráfico que melhor corresponde a cada uma.

   I. Paulo saiu de sua casa de automóvel para ir ao trabalho, mas o pneu furou. Depois de trocá-lo, ele continuou o trajeto. Gráfico C

   II. Ana saiu de casa para ir ao banco, mas precisou retornar para pegar sua bolsa. Em seguida, ela foi ao banco. Gráfico D

   III. Pedro saiu de casa devagar, mas aumentou cada vez mais sua velocidade para chegar mais rápido ao seu destino. Gráfico B

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 89 - Resolução parcialmente correta da questão1, de estudantes dos Grupos A e B

1. Considere as grandezas "distância de casa" e "tempo decorrido" nas situações a seguir e indique o gráfico que melhor corresponde a cada uma.

   I. Paulo saiu de sua casa de automóvel para ir ao trabalho, mas o pneu furou. Depois de trocá-lo, ele continuou o trajeto. Gráfico C

   II. Ana saiu de casa para ir ao banco, mas precisou retornar para pegar sua bolsa. Em seguida, ela foi ao banco. Gráfico d

   III. Pedro saiu de casa devagar, mas aumentou cada vez mais sua velocidade para chegar mais rápido ao seu destino. Gráfico a X

1. Considere as grandezas "distância de casa" e "tempo decorrido" nas situações a seguir e indique o gráfico que melhor corresponde a cada uma.

   I. Paulo saiu de sua casa de automóvel para ir ao trabalho, mas o pneu furou. Depois de trocá-lo, ele continuou o trajeto. Gráfico b

   II. Ana saiu de casa para ir ao banco, mas precisou retornar para pegar sua bolsa. Em seguida, ela foi ao banco. Gráfico d

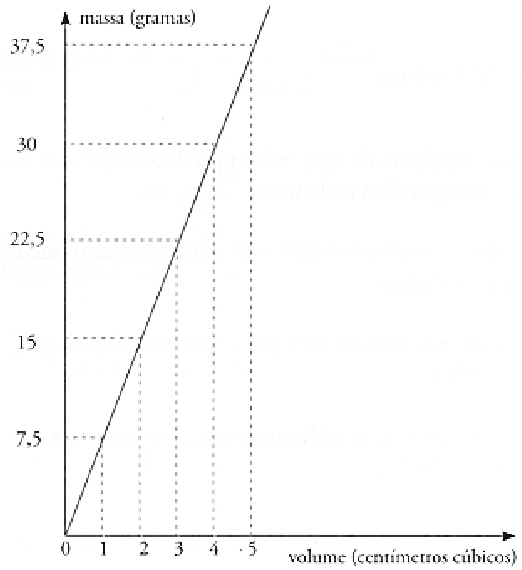
   III. Pedro saiu de casa devagar, mas aumentou cada vez mais sua velocidade para chegar mais rápido ao seu destino. Gráfico C

Fonte: Arquivo do autor.

A questão 2 (Figura 90) apresentava um gráfico e os itens (a), (b) e (c) pretendiam verificar se os estudantes conseguiam extrair informações por meio da análise do gráfico e também se conseguiam explicar porque se tratavam de grandezas diretamente proporcionais

Figura 90 - Proposta da questão 2, disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B

Mediram-se as massas de pequenas amostras de ferro de diversos volumes. A unidade de medida de massa foi o grama (g) e a de volume foi expressa em centímetros cúbicos (cm^3). Com os dados encontrados, construiu-se o gráfico a seguir:



a) Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é 4 cm^3?

b) Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15 g de massa?

c) Explique por que as grandezas volume e massa de amostras de ferro representadas no gráfico são grandezas diretamente proporcionais.

d) Qual é a constante de proporcionalidade?

e) Escreva a relação entre a massa, **m**, e o volume, **V**, por meio de uma expressão.

Fonte: Material didático SEDUC.[21]

Todos os estudantes analisados acertaram os itens (a) e (b), e no que se refere ao item (c) ainda que os agrupamentos expressassem uma explicação sobre grandeza diretamente proporcional, eventualmente com definições imprecisas, os termos utilizados pelos alunos indicam que compreendem o significado, conforme observamos nas figuras 91 e 92 abaixo, porém não conseguem expressá-lo de maneira adequada, isto é, quando consideramos a definição matemática comumente utilizada.

Figura 91 - Resolução correta da questão 2 item a), b) e c), de estudantes dos Grupos A e B

a) Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é 4 cm^3?

30g

b) Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15 g de massa?

2cm³

c) Explique por que as grandezas volume e massa de amostras de ferro representadas no gráfico são grandezas diretamente proporcionais.

Pois, se nós aumentamos o volume a massa aumenta, já que ocupamos mais espaço, e nisso teremos mais massa.

a) Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é 4 cm^3?

30

b) Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15 g de massa?

2 cm³

c) Explique por que as grandezas volume e massa de amostras de ferro representadas no gráfico são grandezas diretamente proporcionais.

porque à medida que a massa aumenta o volume também aumenta.

a) Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é 4 cm^3?

30

b) Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15 g de massa?

2

c) Explique por que as grandezas volume e massa de amostras de ferro representadas no gráfico são grandezas diretamente proporcionais.

Pq os números crescem na mesma proporção.

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 92 - Resolução parcialmente correta da questão 2 item a) b) e c), dos estudantes analisados

a) Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é 4 cm³?

30 g

b) Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15 g de massa?

2 cm³

c) Explique por que as grandezas volume e massa de amostras de ferro representadas no gráfico são grandezas diretamente proporcionais.

Porque conforme o volume aumenta, a massa também aumenta, para preencher proporcionalmente

a) Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é 4 cm³?

A massa é de 30 gramas.

b) Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15 g de massa?

O volume é 2.

c) Explique por que as grandezas volume e massa de amostras de ferro representadas no gráfico são grandezas diretamente proporcionais.

Quanto mais volume, mais a massa cresce.

a) Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é 4 cm³?

30 GRAMAS

b) Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15 g de massa?

2 CENTÍMETROS CÚBICOS

c) Explique por que as grandezas volume e massa de amostras de ferro representadas no gráfico são grandezas diretamente proporcionais.

PORQUE, QUANDO UMA AUMENTA, A OUTRA AUMENTA JUNTO

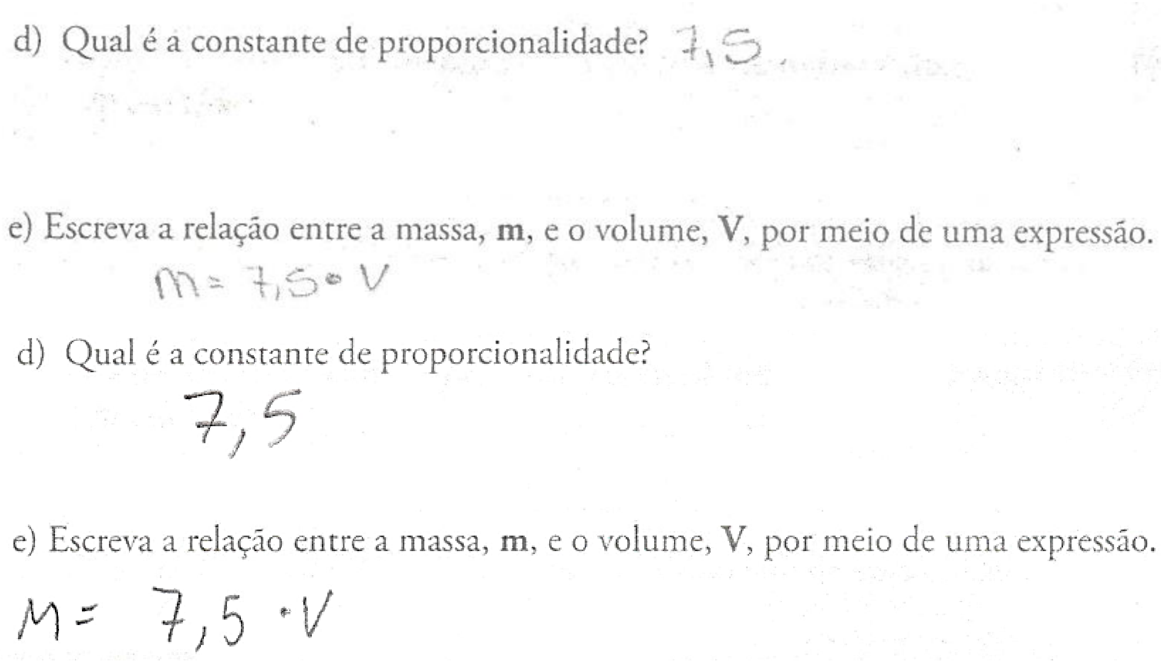
Fonte: Arquivo do autor.

Ao analisarmos as 13 atividades entregues pelos agrupamentos de alunos com resoluções dos itens (d) e (e) da referida questão, consideramos que os grupos A e B apresentaram comportamentos distintos.

Os estudantes do Grupo A, em sua maioria, revelaram uma compreensão correta da constante de proporcionalidade, indicando seu valor sem erros, com isso grande parte dos alunos representaram acertadamente a lei de formação da função dada. Os alunos que apresentaram parcialmente certo a expressão algébrica solicitada, utilizaram as variáveis indicadas na pergunta, no entanto as operações e o uso da constante de proporcionalidade encontravam-se equivocadas.

Reparamos que os alunos tiveram um avanço significativo na compreensão de alguns tópicos discutidos, pois quando comparada à atividade anterior em que não entendiam o significado das variáveis e nem esboçavam uma expressão algébrica de modo correto, na presente atividade melhoraram a qualidade de suas respostas significativamente.

Figura 93 - Resolução correta da questão 2 item d) e e), de estudantes do Grupo A


d) Qual é a constante de proporcionalidade? 7,5

e) Escreva a relação entre a massa, **m**, e o volume, **V**, por meio de uma expressão.

m = 7,5 • V

d) Qual é a constante de proporcionalidade?

7,5

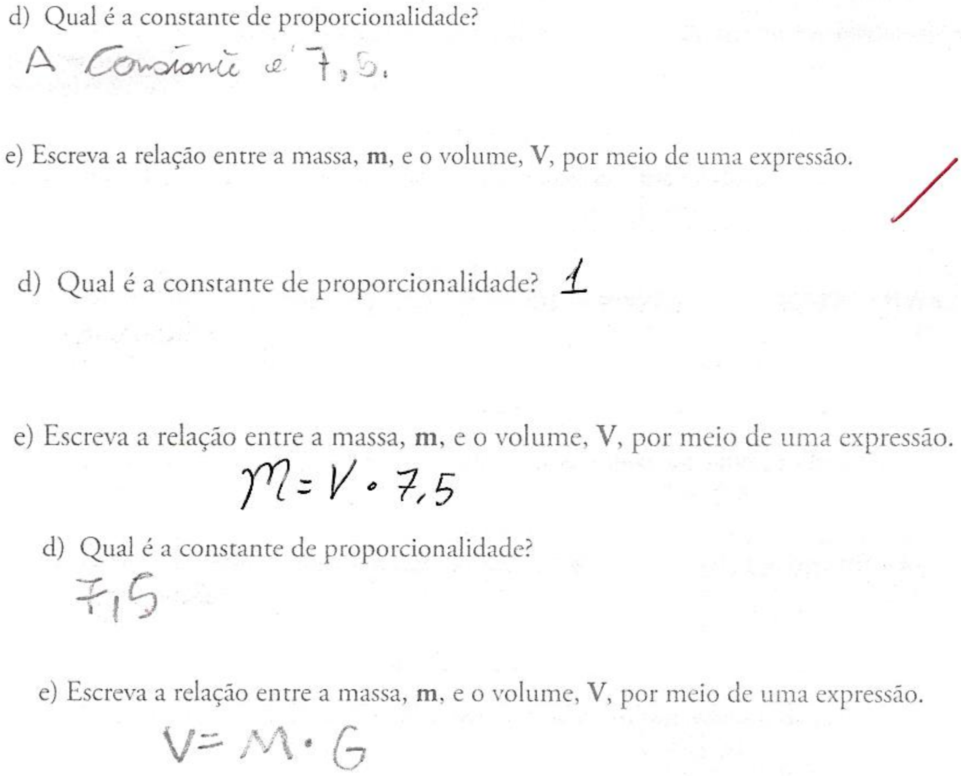
e) Escreva a relação entre a massa, **m**, e o volume, **V**, por meio de uma expressão.

M = 7,5 • V

Fonte: Arquivo do autor.

Referente aos alunos que pertenciam ao Grupo B, apenas uma dupla reconheceu a constante de proporcionalidade corretamente, porém nenhum agrupamento de estudantes representou sem erros a lei de formação, em alguns casos observamos, conforme Figura 94 abaixo, que o item ficou em branco, sem resposta.

Figura 94 - Resolução parcialmente correta da questão 2 item d) e e), de estudantes dos Grupos A e B


d) Qual é a constante de proporcionalidade?
A Constante é 7,5.

e) Escreva a relação entre a massa, **m**, e o volume, **V**, por meio de uma expressão.

d) Qual é a constante de proporcionalidade? 1

e) Escreva a relação entre a massa, **m**, e o volume, **V**, por meio de uma expressão.
m = V • 7,5

d) Qual é a constante de proporcionalidade?
7,5

e) Escreva a relação entre a massa, **m**, e o volume, **V**, por meio de uma expressão.
V = M • G

Fonte: Arquivo do autor

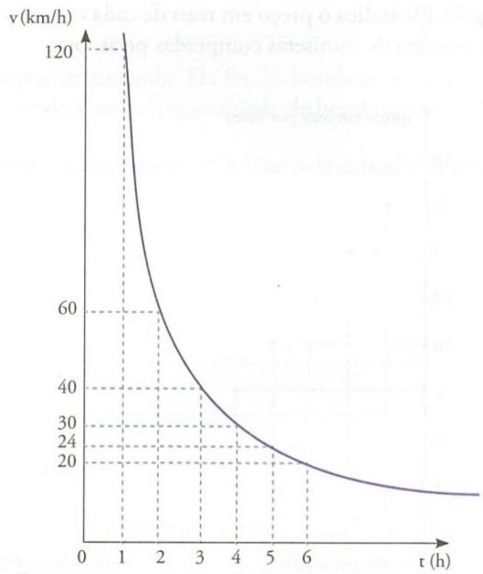
Os estudantes, de ambos os grupos, responsáveis por esses registros acima expostos, permitem que uma característica observada nas respostas deles possam ser extensíveis a mais alunos analisados. Os alunos compreendem o valor da constante de proporcionalidade, mas não expressam a lei de formação da função corretamente, e uma parcela não reconhece a constante de proporcionalidade isoladamente, mas expressa de modo correto a expressão algébrica que relaciona as grandezas massa e volume. Possívelmente, após as interações que aconteceram nas aulas que antecederam esta atividade, segundo Moreira (2011, p.20) por meio de "[...] sucessivas interações, um dado subsunçor vai, de forma progressiva, adquirindo novos significados, vai ficando mais rico, mais refinado, mais diferenciado e mais capaz de servir de ancoradouro para novas aprendizagens significativas".

A questão 3 (Figura 95) da respectiva atividade apresentava um gráfico e o item (a) uma tabela parcialmente preenchida. Os estudantes deveriam terminar de preenchê-la de acordo com as informações oriundas das observações e conclusões sobre o gráfico em questão.

Ao analisarmos as especificidades dos Grupos A e B, estes também revelaram entendimentos distintos no que se refere à essa questão. Em um dos grupos não houve acerto integral de todos os itens, já no outro, poucos alunos não expressaram a lei de formação para a função apresentada.

Figura 95 - Proposta da questão 3 disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B

O gráfico a seguir indica a velocidade que um automóvel precisa alcançar em função do tempo para percorrer uma distância de 120 km.



a) Com base no gráfico, complete a tabela a seguir:

t (h)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
v (km/h)	120		60						

b) Explique por que as grandezas "velocidade" e "tempo" representadas no gráfico são inversamente proporcionais.

c) Escreva a sentença que relaciona **v** e **t**.

Fonte: Material didático SEDUC[21]

Apenas duas duplas das treze analisadas do Grupo A não preencheram corretamente toda a tabela, até conseguiram realizar a correspondência correta dos valores explícitos do gráfico, mas aqueles que não eram evidenciados não conseguiram resolver corretamente. Nas Figuras 96 e 97 a seguir, observaremos imagens dos registros de estudantes deste grupo.

Figura 96 - Resolução correta da questão 3 item a) de estudantes do Grupo A

a) Com base no gráfico, complete a tabela a seguir:

t (h)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
v (km/h)	120	80	60	40	30	24	20	15	10

a) Com base no gráfico, complete a tabela a seguir:

t (h)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
v (km/h)	120	80	60	40	30	24	20	15	10

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 97 - Resolução parcialmente correta da questão 3 item a) de estudantes do Grupo A

a) Com base no gráfico, complete a tabela a seguir:

t (h)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
v (km/h)	120	125	60	40	30	24	20	10	5

a) Com base no gráfico, complete a tabela a seguir:

t (h)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
v (km/h)	120	~~90~~ 70	60	40	30	24	20	15	10

Fonte: Arquivo do autor.

Os alunos do Grupo B manifestaram soluções distintas das verificadas no Grupo A. Todos os estudantes analisados neste grupo, responderam parcialmente certo o item (a) da respectiva questão (Figura 98). Conseguiram extrair corretamente os dados do gráfico em que os valores expressos nele eram também solicitados na tabela. Os valores que necessitavam de uma estrapolação, recorrendo a um raciocínio especifico para sua determinação, não foram preenchidos como o esperado.

Figura 98 - Resolução parcialmente correta da questão 3 item a) de estudantes do Grupo B

a) Com base no gráfico, complete a tabela a seguir:

t (h)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
v (km/h)	120	70	60	40	30	24	20	10	5

a) Com base no gráfico, complete a tabela a seguir:

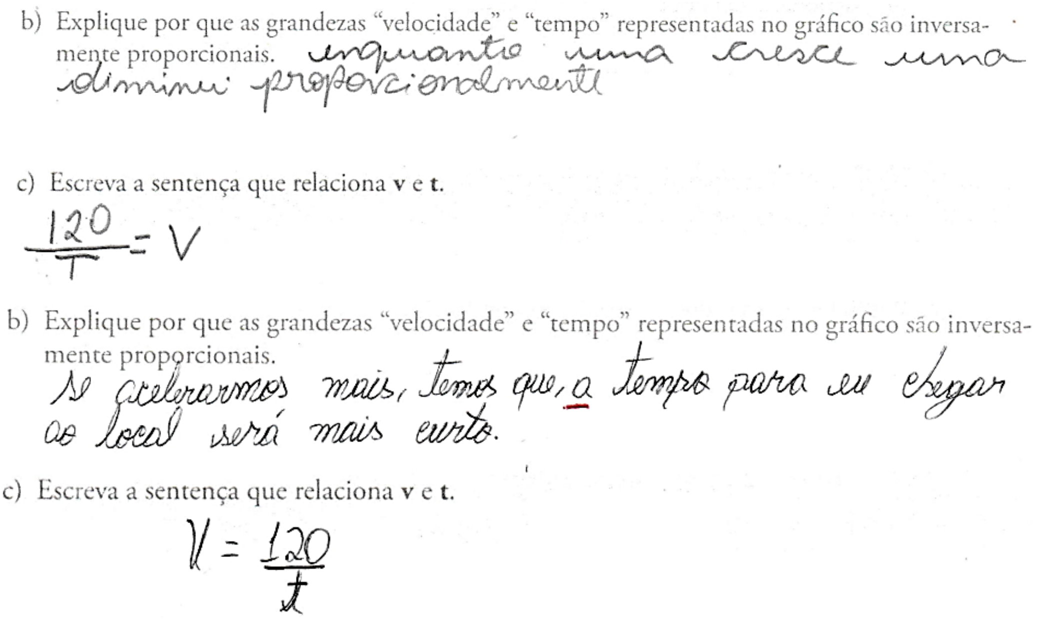
t (h)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
v (km/h)	120	90	60	40	30	24	20	16	10

Fonte: Arquivo do autor.

Consequentemente os itens (b) e (c) respondidos por esse grupo, refletiram essa dificuldade. Alguns estudantes explicaram de maneira parcialmente correta a relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas envolvidas, mas nenhum aluno representou satisfatoriamente uma lei de formação para a função apresentada.

Em contraponto, os agrupamentos formados pelos estudantes do Grupo A, apresentaram resultados positivos. Dos 20 estudantes analisados, todos responderam certo ou parcialmente certo o item (b), sendo necessário apenas uma adequação no vocabulário, porém a compreensão de proporcionalidade inversa, na situação dada, era satisfatória. No que se refere ao item (c) apenas quatro estudantes erraram a expressão algébrica solicitada e dois deixaram o item em branco, sem resposta.

Figura 99 - Resolução correta da questão 3 itens b) e c) de estudantes do Grupo A


b) Explique por que as grandezas "velocidade" e "tempo" representadas no gráfico são inversamente proporcionais. enquanto uma cresce uma diminui proporcionalmente

c) Escreva a sentença que relaciona **v** e **t**.

$$\frac{120}{T} = V$$

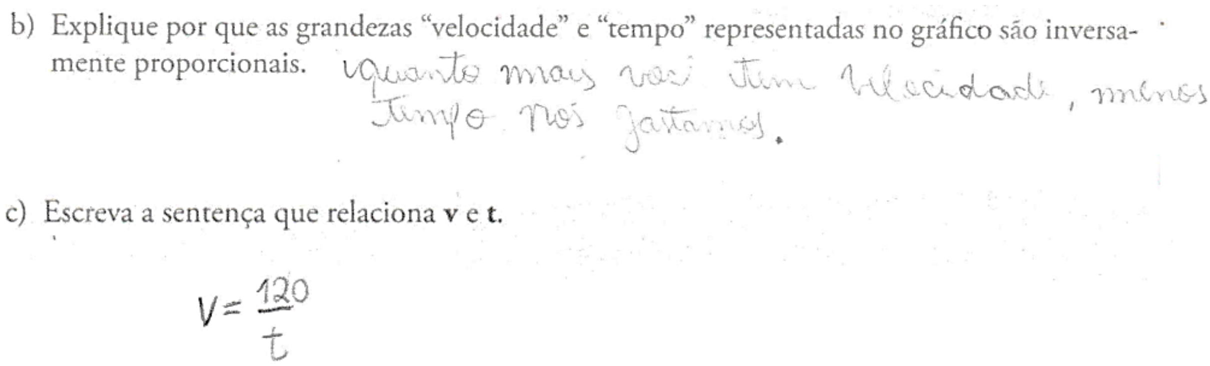
b) Explique por que as grandezas "velocidade" e "tempo" representadas no gráfico são inversamente proporcionais.
Se acelerarmos mais, temos que, o tempo para eu chegar ao local será mais curto.

c) Escreva a sentença que relaciona **v** e **t**.

$$V = \frac{120}{t}$$

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 100 -Resolução parcialmente correta da questão 3 itens b) e c) de estudantes dos Grupos A e B


b) Explique por que as grandezas "velocidade" e "tempo" representadas no gráfico são inversamente proporcionais. quanto mais você tem velocidade, menos tempo nós gastamos.

c) Escreva a sentença que relaciona **v** e **t**.

$$V = \frac{120}{t}$$

b) Explique por que as grandezas "velocidade" e "tempo" representadas no gráfico são inversamente proporcionais.

Quanto mais o tempo aumenta, mais a velocidade diminuiu.

c) Escreva a sentença que relaciona **v** e **t**.

b) Explique por que as grandezas "velocidade" e "tempo" representadas no gráfico são inversamente proporcionais.

Pq um Cresce e o outro Diminui.

c) Escreva a sentença que relaciona **v** e **t**.

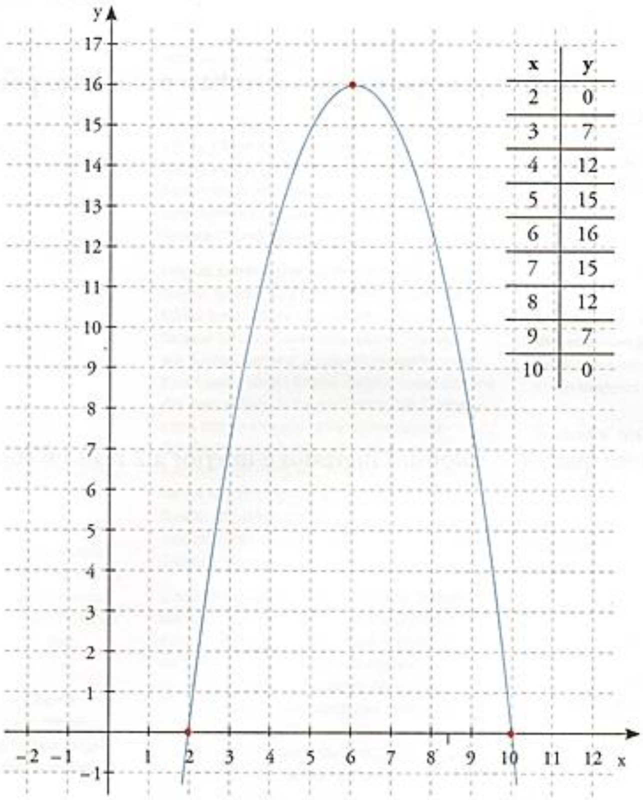
Fonte: Arquivo do autor.

Por fim, a última questão (Figura 101) composta por 6 perguntas, do item (a) ao (f), trazia uma situação-problema com uma respresentação gráfica de uma função polinomial de 2º grau com sua respectiva tabela. Todos os itens buscavam compreender se os alunos associavam corretamente as informações do gráfico e tabela, às interpretações do problema proposto.

Notamos uma convergência entre os Grupos A e B, no que diz respeito ao nível de dificuldade encontrada em relacionar as abordagens expostas. A articulação entre a representação gráfica, algébrica, tabela de valores e o problema em língua materna se mostraram desafiadores para os alunos de ambos os grupos, no entanto, possívelmente por um grupo apresentar subsunçores menos coesos que o outro, nos leva a considerar o motivo de terem resultados diferentes para uma mesma pergunta.

Figura 101 - Proposta da questão 4, disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B

Um grupo de alunos da 8ª série/9º ano formou uma banda e precisa determinar o preço **x**, em reais, do ingresso para um *show* de apresentação. Eles imaginaram que, se o valor do ingresso for muito alto, não conseguirão vendê-lo e, se for muito baixo, não obterão lucro, que seria investido na banda. Com base nos valores cobrados por outras bandas, os alunos concluíram que o lucro **L** de cada espetáculo, em reais, poderia ser dado pela expressão $L = -x^2 + 12x - 20$. (**Observação**: $L > 0$ significa lucro e $L < 0$, prejuízo).



x	y
2	0
3	7
4	12
5	15
6	16
7	15
8	12
9	7
10	0

Observe o gráfico e a tabela e, em seguida, responda:

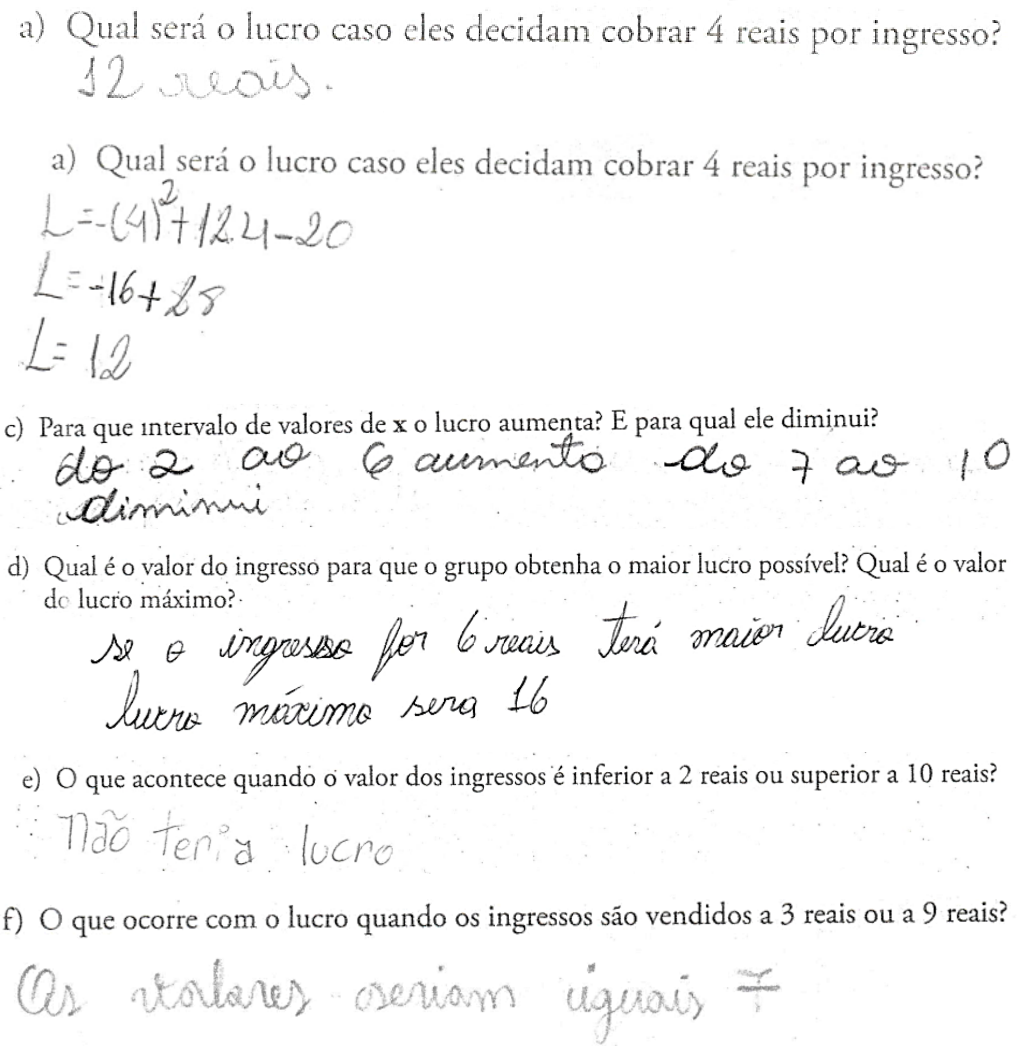
Fonte: Material didático SEDUC.[21]

Os alunos que pertenciam ao Grupo A mostraram uma concentração de erros e acertos parciais nos itens (b) e (c) que versavam sobre o intervalo em que a banda obteria lucros e prejuízos com a venda de seus ingressos. Os demais itens notamos uma compreensão satisfatória da maioria dos estudantes.

Associamos essa concentração de erros e acertos parciais ao fato de não estarem acostumados com interpretações de gráficos de funções polinomiais de 2º grau e também a falta de familiaridade com a terminologia “intervalo”, pois grande parte deles não compreendiam o significadodo termo intervalo, esclarecido durante vários momentos da aula como sendo “o trecho”, pelo professor/pesquisador.

Os estudantes do Grupo B apresentaram fragilidades em todos os itens da questão 4, claramente não entendiam a articulação existente entre o gráfico, a tabela e as perguntas presentes em cada item. Abaixo, apresentamos nas Figuras 102 e 103 as soluções para as perguntas propostas nesta questão de estudantes dos dois grupos observados.

Figura 102 - Resolução correta de itens da questão 4, de estudantes dos Grupos A e B



a) Qual será o lucro caso eles decidam cobrar 4 reais por ingresso?

12 reais.

a) Qual será o lucro caso eles decidam cobrar 4 reais por ingresso?

$L = -(4)^2 + 12 \cdot 4 - 20$

$L = -16 + 28$

$L = 12$

c) Para que intervalo de valores de **x** o lucro aumenta? E para qual ele diminui?

do 2 ao 6 aumenta do 7 ao 10 diminui

d) Qual é o valor do ingresso para que o grupo obtenha o maior lucro possível? Qual é o valor do lucro máximo?

se o ingresso for 6 reais terá maior lucro
lucro máximo sera 16

e) O que acontece quando o valor dos ingressos é inferior a 2 reais ou superior a 10 reais?

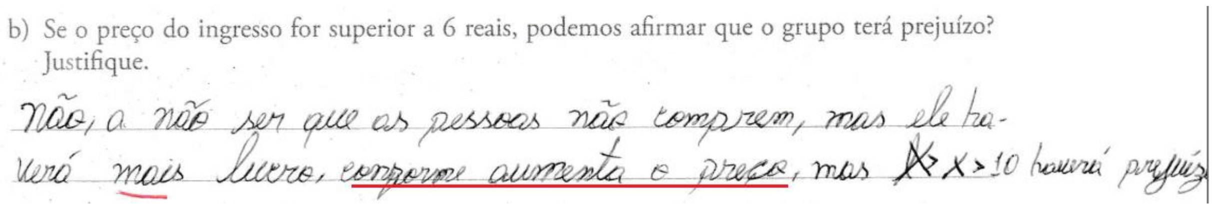
Não teria lucro

f) O que ocorre com o lucro quando os ingressos são vendidos a 3 reais ou a 9 reais?

Os valores seriam iguais 7

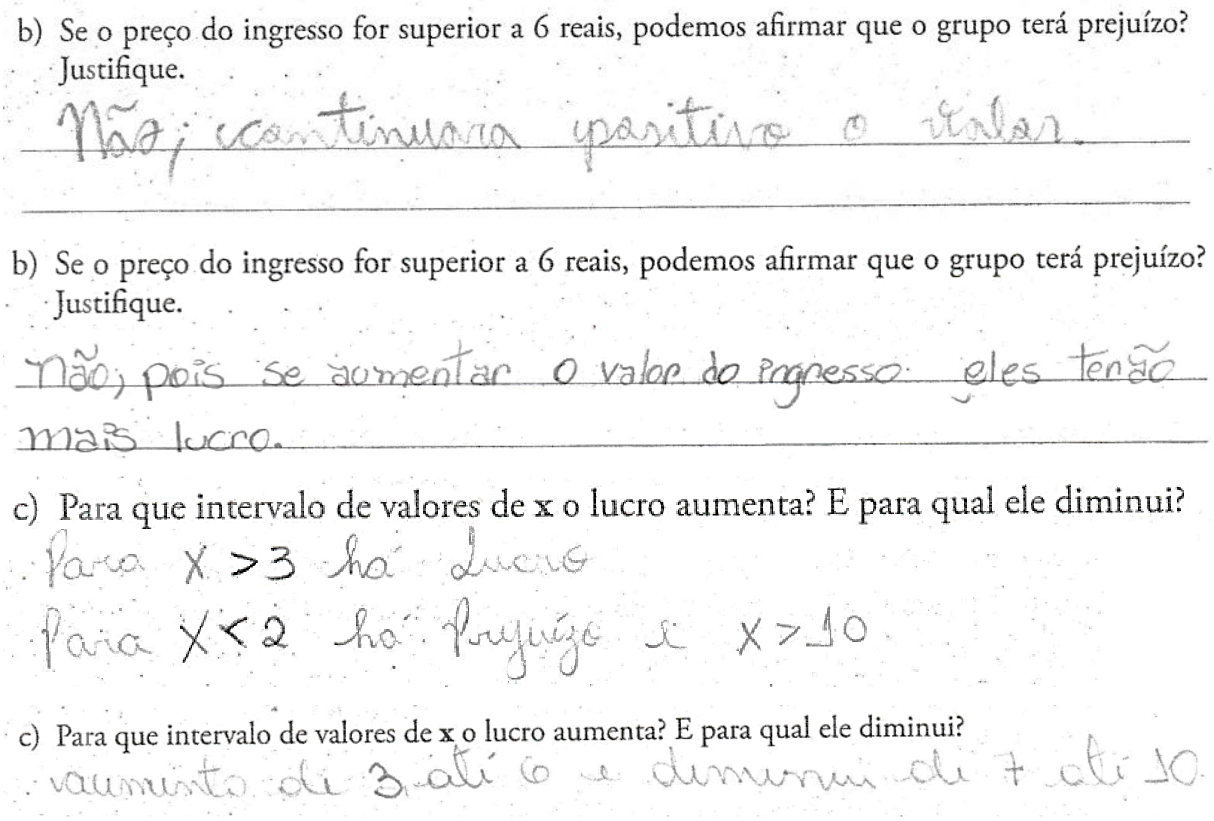
Fonte: Arquivo do autor.

Figura 103 - Resolução parcialmente correta de itens da questão 4, de estudantes dos Grupos A e B



b) Se o preço do ingresso for superior a 6 reais, podemos afirmar que o grupo terá prejuízo? Justifique.

Não, a não ser que as pessoas não comprem, mas ele ha-
verá mais lucro, conforme aumenta o preço, mas ~~X~~ $x > 10$ haverá prejuíz


b) Se o preço do ingresso for superior a 6 reais, podemos afirmar que o grupo terá prejuízo? Justifique.

Não; continuara positivo o valor.

b) Se o preço do ingresso for superior a 6 reais, podemos afirmar que o grupo terá prejuízo? Justifique.

Não, pois se aumentar o valor do ingresso eles terão mais lucro.

c) Para que intervalo de valores de **x** o lucro aumenta? E para qual ele diminui?

Para X >3 há lucro
Para X<2 há prejuízo e X>10

c) Para que intervalo de valores de **x** o lucro aumenta? E para qual ele diminui?

aumento de 3 até 6 e diminui de 7 até 10.

Fonte: Arquivo do autor.

Após a discussão de cada questão, ao término do período destinado aos estudantes para realização da atividade, em uma aula expositivo-dialogada, buscou-se discutir os objetivos de cada questão, a interpretação de cada pergunta e a interrelação existente entre as tabelas e os gráficos apresentados. Os alunos mantiveram-se em alguns momentos mais focados na fala do professor/pesquisador, no entanto interagiram em outros momentos esclarecendo as dúvidas que surgiram na tarefa quando os mesmos à realizavam.

Finalizaram apontando que não se tratava de uma atividade difícil, o que nos faz considerar que a alteração na tarefa durante a realização da THA foi benéfica, ainda que tivessem clareza que erraram algumas questões. Percebemos uma nítida diferença entre os estudantes de cada grupo analisado, apesar de terem apresentado semelhanças em alguns comportamentos e também no desenvolvimento da atividade proposta, as aprendizagens são distintas entre eles, ou seja, apesar de partilharem do mesmo contexo socio-histórico-cultural os conhecimentos prévios de cada estudante é único.

Os alunos do Grupo A, com todo o percurso ofertado até o momento, mostraram progresso em suas aprendizagens, principalmente quando comparamos as evoluções na qualidade das respostas apresentadas entre as atividades 5 e 6. Este grupo já apresentava menos dificuldades e pelas atividades de reconhecimento da estrutura cognitiva apresentavam subsunçores mais coesos, o que reitera a teoria da aprendizagem significativa em que esses subsunçores previamente conhecidos são importantes para ancorar aprendizagens novas, ressaltando a importância em se conhecer os conhecimentos prévios dos aprendizes.

Alunos pertencentes ao Grupo B apresentavam dificuldades desde a etapa do cálculo algébrico da constante elástica no primeiro experimento proposto. Nas atividades de reconhecimento da estrutura cognitiva, apresentavam maior fragilidade em algumas de suas respostas, quando comparados ao outro grupo, ou seja, seus subsunçores podem não ancorar, com a devida solidez, os novos conhecimentos propostos o que corrobora com Moreira (2011, p.24) que atenta para o fato de que " [...] dizer que o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem significativa de novos conhecimentos não significa dizer que é sempre uma variável facilitadora. Normalmente sim, mas pode, em alguns casos, ser bloqueadora."

Fica evidente que apesar dos grupos analisados apresentarem comportamentos semelhantes durante o desenvolvimento de suas atividades, os Grupos A e B possuem especificidades que impactam em sua compreensão final e a maneira pela qual a nova informação é assimilada em sua estrutura cognitiva.

Assim sendo, ao observar as produções dos estudantes do grupo B, seria interessante dispor de tempos distintos e abordagens complementares que pudessem favorecer a consolidação de aprendizagens significativas, pois notamos que os subsunçores, para a maioria dos estudantes deste grupo, ao que parece, não cumpriram com as suas funcionalidades de forma integral e as fragilidades foram se acentuando ao longo da trajetória ofertada.

No que se refere ao Grupo A, por possuírem subsunçores, ao que tudo indica, mais estáveis, constatamos que a maioria dos estudantes conseguiu ancorar as novas aprendizagens propostas em suas estruturas cognitivas, evidenciando principalmente na transição entre a atividade 5 e 6, em que representaram as situações-problema por meio de sua expressões algébricas corretas, apresentaram respostas sobre as relações de proporcionalidades mais assertivas para o intervalo de tempo de aprendizagem proposto e inter-relacionaram as informações presentes nas expressões algébricas nas tabelas e nos gráficos expostos.

As interações, principalmente professor-aluno, nesta etapa de realização da THA favoreceram o intercâmbio de significados possibilitando aos estudantes se apropriarem dos novos conhecimentos, tanto em termos qualitativos quanto quantitativo. De acordo com

Moreira (2011, p.92) para Vygotsky a interação é “fundamental para o desenvolvimento cognitivo e linguístico de qualquer indivíduo.”

5.9 Experimento 2 – Queda Livre

As discussões foram iniciadas na sala de leitura da escola, que foi previamente organizada pelo professor/pesquisador. Os alunos agruparam-se nas mesas redondas do ambiente e aguardaram as instruções que seriam dadas.

A aula iniciou com um vídeo que relembrava o primeiro experimento proposto sobre a Lei de Hooke, em que o professor fazia pausas em alguns momentos no vídeo e associava à situação vivenciada por eles durante a coleta de dados. Após o término do vídeo, relembrou como os pontos experimentais se comportaram e que a função polinomial de 1º grau e sua representação gráfica (reta) era o modelo matemático que melhor representava aquele experimento.

Ao indagar os alunos se haviam dúvidas remanescentes sobre o experimento, o que tinham realizado por meio do roteiro experimental e as interpretações algébrica e geométrica estudadas, responderam que não e então foi dado prosseguimento ao planejamento da aula.

A pergunta *“– O que é o experimento de queda livre?”,* feita pelo professor/pesquisador para iniciar a discussão sobre o experimento em questão, possibilitou reconhecer o quanto os estudantes contribuem com seus conhecimentos prévios sobre a temática investigada, ainda que muitas vezes pautados no conhecimento do senso comum. Ainda que algumas considerações dos estudantes tivessem raízes em suas experiências e percepções de como a natureza funciona, outras se fundamentavam no conhecimento científico vigente, como identificadas nas afirmações dos estudantes: *“– Pela gravidade.” ou “– A Terra puxa tudo para o centro dela.”*.

Os diálogos foram pontos de forte interação social entre alunos e o professor. Quando Moreira (2011, p.93) destaca “[...] a importância crucial da interação social, pois é através dela que a pessoa pode captar significados e certificar-se que os significados que está captando são aqueles compartilhados socialmente para os signos em questão”.

Os vídeos potencializaram as discussões e permitiram comentários amplos, sem uma delimitação de tema como ocorre habitualmente nas aulas regulares de matemática. Um dos vídeos apresentados foi sugestão de um estudante que considerou interessante compartilhar com os colegas de turma como as diferentes gravidades atuam sobre o corpo humano.

Após discutirmos alguns elementos relacionados à área de conhecimento da Física, como a definição de queda livre, gravidade e força peso, foi apresentado o *Software Tracker* aos estudantes e um vídeo do movimento de queda livre com duas bolas distintas. As funcionalidades do *software* utilizado, assim como a captura dos instantes da queda dos objetos, comportamento dos pontos que representavam esses instantes e ajuste da curva a esses pontos foram explorado com os estudantes.

Os estudantes se mostraram curiosos com o experimento de queda livre e como foi discutido o tratamento dos dados pelo *software Tracker*, se limitaram a interagir somente quando eram feitas perguntas e apontamentos como: Qual das bolas possuía maior massa? Qual a diferença entre massa e peso? Qual é o comportamento gráfico de uma função polinomial do 2º grau? Quem são os coeficientes *a, b* e *c* na função polinomial de 2º grau?

As interações continuaram transitando entre as áreas da Matemática e Física. Foi pedido a um aluno voluntário de cada grupo, que dobrasse o valor do coeficiente *a*, obtido por meio do tratamento de dados no *software Tracker*, discutindo com as turmas que o resultado deste cálculo se aproximava do valor atualmente conhecido da gravidade local na Terra. Foi utilizada a mesma estratégia de discussão, desta vez utilizando um vídeo caseiro produzido pelo professor em que o cálculo solicitado (dobro do coeficiente *a*) não se aproximava do valor conhecido para a gravidade terrestre, permitindo ampliar a discussão evidenciando as variáveis que interferem na atividade experimental e, consequentemente, em seus resultados.

Por fim, apresentou um vídeo de um movimento harmônico simples (pêndulo simples), e com o auxílio do *software Tracker*, expôs sua representação gráfica (senóide) aos estudantes, finalizando a aula discutindo as diversas representações matemáticas que podem estar associados à movimentos conhecidos.

Esta discussão sobre o experimento de *Queda Livre*, possibilitou mais um movimento de aproximação entre as diversas áreas do conhecimento e também uma contextualização de um tópico de ensino da área da Matemática a um movimento conhecido e de familiaridade dos estudantes discutido sob o olhar do campo da Física.

Mostrou-se valioso do ponto de vista do ensino porque ofertou elementos durante sua realização, que pudessem modificar, enriquecer e reelaborar os conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva dos alunos, dando novos significados a estes. Momentos destinados a esclarecimentos dos conceitos como, por exemplo, diferenciar peso e massa e no caso em que foi necessário definir queda livre, gravidade e vácuo para a situação específica em análise, o recurso utilizado mais uma vez foi a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

As últimas discussões sobre os modelos matemáticos que poderiam representar alguns movimentos (queda livre e pêndulo simples) possibilitaram indicar os estudantes sobre o inacabamento do conhecimento e ressaltar aspectos da natureza da ciência, já destacados na primeira atividade experimental. Aparentemente, a discussão proposta estava na ZDP das turmas, e os momentos de baixa interação que o Grupo A apresentou, talvez indique que aquelas asserções debatidas estavam dentro do desempenho que poderiam fazer por conta própria, portanto, sendo dispensável a interação com o professor e colegas.

No que se refere à readequação da THA durante seu período de realização, não sendo necessário ocorrer apenas ao seu término o no intervalo entre aulas (intervenções) destacaremos dois momentos significativos. O primeiro instante é quando o aluno sugere que seja exibido um vídeo que discute a percepção de gravidades distintas no corpo humano, este momento não era previsto inicialmente na discussão do experimento de queda livre e passou a compor esta atividade, tanto que foi disponibilizado ao outro grupo também. E o segundo, se refere à pesquisa não planejada da quantidade de satélites que o planeta Júpiter possui, assim como a discussão dos aspectos que estão relacionados às grandes gravidades e como ela se relaciona com o movimento de astros em sua proximidade.

Estas duas situações ilustram uma reorganização em um aspecto da THA (atividades de ensino) que foram alteradas de acordo com o conhecimento do professor sobre as melhores suposições de como poderia potencializar as aprendizagens para aquela situação específica.

5.10 Avaliação Final

Com a finalização da segunda atividade experimental, nas duas aulas subsequentes, os estudantes foram organizados individualmente na sala de aula habitual dispostos em fileiras (Figura 104). Os alunos não possuíam autorização para utilizar calculadora e nem aparelhos eletrônicos, contudo podiam destacar uma folha em branco do caderno para uma eventual necessidade de realização de rascunhos de seus cálculos.

Figura 104 – Organização da turma na realização da avaliação final

Fonte: Arquivo do autor

Com o surgimento de dúvidas durante a realização da avaliação final que reunia os conhecimentos de funções polinomiais de 1º e 2º graus, o professor buscou explicar cuidadosamente as questões, ajudando-os a interpretar o que era solicitado na pergunta, para não direcionar o raciocínio ou cálculo que deveriam recorrer para solucionar o problema. Em alguns momentos, percebeu que os alunos buscavam esse direcionamento, mas se manteve vigilante para não influenciar nas resoluções dos estudantes.

Os estudantes do Grupo A apresentaram soluções mais assertivas e parcialmente corretas, do que os estudantes do Grupo B, evidenciando as fragilidades em seus subsunçores e também que o método tradicionalmente empregado, constituído de um momento avaliativo formal, são aspectos relativamente significativos quando se trata do processo de avaliação do conteúdo discutido, e alguns estudantes se sentem pressionados e tensos nesta situação.

A avaliação era constituída de nove questões, de naturezas objetiva e dissertativa e perpassavam por muitos tópicos de funções discutidos ao longo da trajetória. Lei de formação da função, gráfico (reta), crescimento, decrescimento e zero da função polinomial de 1º grau, relações de proporcionalidade e constante de proporcionalidade, discriminante (Δ) e parâmetro a da função polinomial de 2º grau, vértice da parábola, gráfico (parábola) e zeros da função quadrática.

A primeira questão apresentava aos estudantes uma situação-problema em que solicitava a lei de formação representativa do problema. A segunda pergunta disponibilizava uma lei de formação adequada à situação-problema e solicitava que os alunos determinassem alguns valores de distância para determinados intervalos de tempo. A Figura 105, abaixo ilustra as situações-problema discutidas nestas duas perguntas.

Figura 105 – Proposta das questões 1 e 2 disponibilizadas aos alunos dos Grupos A e B

Questão 1
Os professores de uma academia recebem a quantia de 15 reais por aula, mais uma quantia fixa de 200 reais como abono mensal. Então a quantia y que o professor recebe por mês é dada em função do número x de aulas que ele dá durante esse mês. Qual é a lei de formação da função que relaciona essas duas grandezas?

Questão 2
Um motorista, saindo de um ponto A, viaja por uma estrada e verifica que a distância percorrida, desde o ponto inicial, pode ser calculada por $y = 51x + 17$, em que y é dado em quilômetros, e x é dado em horas. Nessas condições, determine as distâncias percorridas, de hora em hora, desde $x = 1$ até $x = 4$.

Fonte: Arquivo do autor.

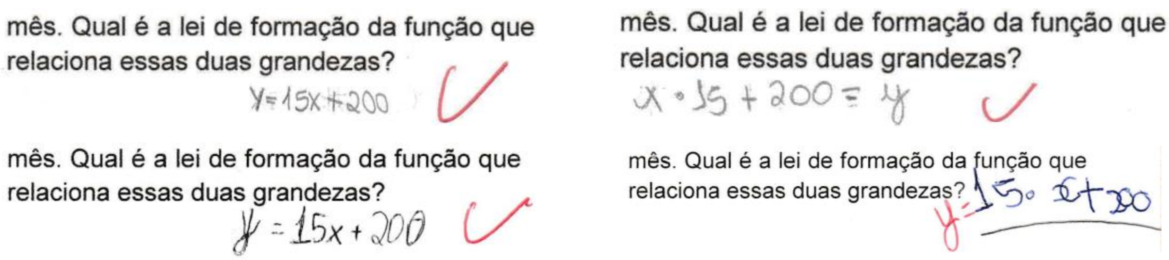
Os estudantes do Grupo A conseguiram expressar um entendimento mais adequado ao que foi proposto nas duas questões. Não demonstraram surpresa com a terminologia lei de formação, em sua maioria compreenderam a relação de dependência existente entre as variáveis distância e tempo, culminando em respostas aos exercícios mais próximas do que era esperado, indicando que o processo simultâneo da diferenciação progressiva e reconciliação integradora ofertado ao longo da trajetória foi positivo para esse grupo.

Dois estudantes deste grupo superaram as expectativas quando apresentaram a resolução da questão 2, pois construíram um gráfico desta situação-problema, recorrendo à um espaçamento fixo de 50 unidades no eixo das ordenadas e localizando os pontos determinados pela expressão algébrica de forma estimada no eixo, muito semelhante ao processo feito no primeiro experimento Esticando a Mola.

Os alunos do Grupo B demonstraram maior imprecisão em suas resoluções, quando observamos as soluções apresentadas nas questões 1 e 2. Houve imprecisão na lei de formação e muitos não relacionaram as variáveis distância e tempo corretamente, impossibilitando-os de determinarem as distâncias solicitadas no problema. A Figura 106 apresenta as resoluções corretas destes dois grupos.

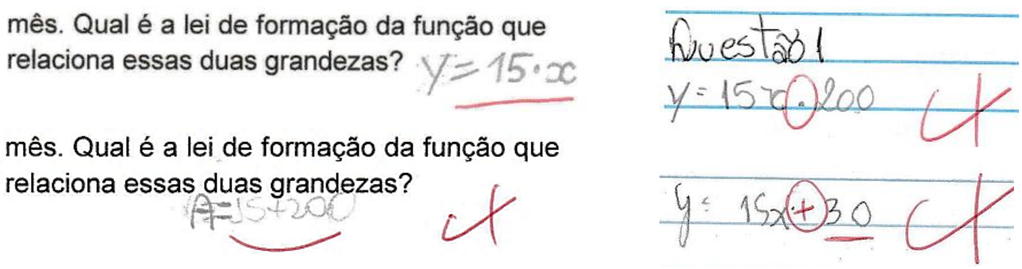
As resoluções parcialmente corretas (Figura 107) foram encontradas nos dois grupos, mas com uma frequência muito superior no Grupo B, o que nos evidencia que era interessante ter dedicado uma atenção maior aos conceitos subsunçores dos estudantes deste grupo. Apenas um estudante, dos dez analisados, resolveu dentro das expectativas do professor a questão 2.

Figura 106 – Resolução correta da questão 1 dos estudantes dos Grupos A e B



Fonte: Arquivo do autor.

Figura 107 – Resolução parcialmente correta da questão 1 dos estudantes dos Grupos A e B

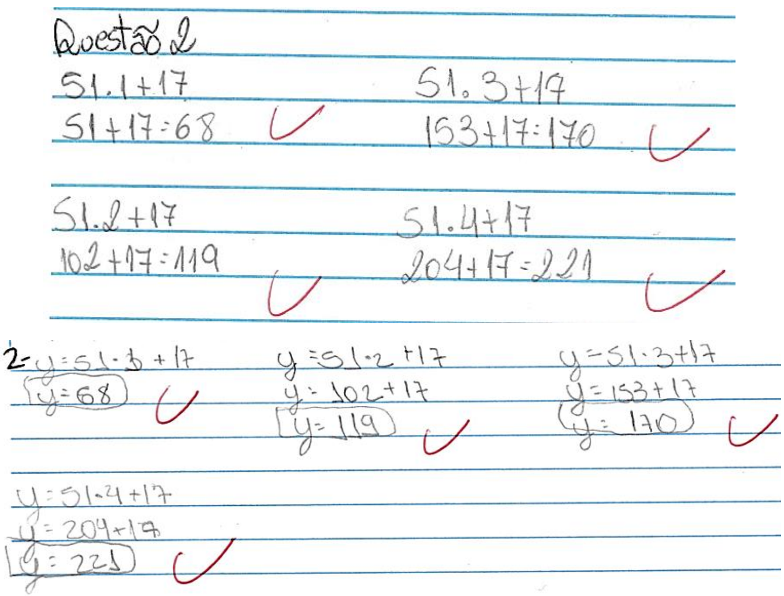


Fonte: Arquivo do autor.

Percebemos nestas resoluções parcialmente corretas apresentadas pela Figura 107 que os estudantes reconhecem a estrutura de uma lei de formação representativa para a situação-problema, porém as inconsistências observadas se associam à compreensão das variáveis x e y, à operação que deve estar associada à quantia fixa; e a própria quantia fixa que é desconsiderada ou assume outro valor.

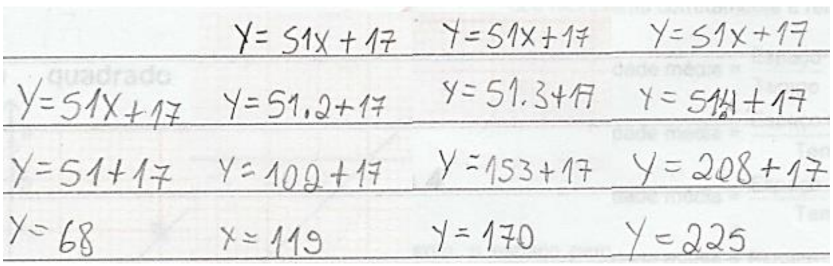
A prevalência dos acertos na questão 2 foi novamente dos alunos do Grupo A. Notamos que os estudantes deste grupo entenderam os significados das variáveis *x* e *y* expostas nos problemas e utilizaram assertivamente as estratégias de resolução. Os acertos parciais observados nesta questão se dão no valor final da distância pedida, muito associados a erros no cálculo da expressão, pois uma parcela dos alunos que possivelmente se sentiram inseguros quanto ao procedimento a ser adotado, preferiu deixar a questão em branco. As Figuras 108 e 109 ilustrarão as respostas corretas dos estudantes dos dois grupos e as resoluções que excederam as expectativas do professor e da pergunta em si.

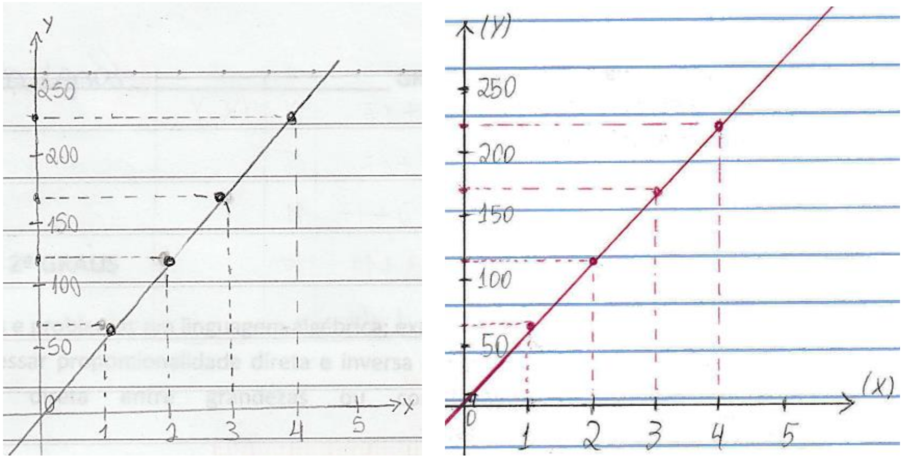
Figura 108 – Resolução correta da questão 2 dos estudantes dos Grupos A e B



Fonte: Arquivo do autor.

Figura 109 – Resolução da questão 2 que superou as expectativas da situação-problema e do docente.





Fonte: Arquivo do autor.

A questão 3 buscava o entendimento dos estudantes no que diz respeito à função polinomial de 1º grau, sondando os conhecimentos pertinentes ao zero da função polinomial, construção de uma tabela conveniente e de seu gráfico correspondente, assim como classificação da função em questão em crescente ou decrescente pela análise do gráfico construído, conforme observamos na Figura 110 abaixo.

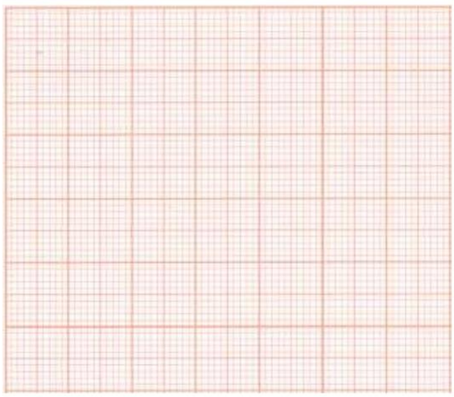
Figura 110 – Proposta da questão 3 disponibilizada aos alunos dos Grupos A e B

Questão 3

Construa o gráfico da função polinomial do 1º grau, preenchendo convenientemente a tabela de valores dos pares ordenados, indique se elas são **crescentes** ou **decrescentes** e qual é o ponto correspondente ao **zero da função**.

a. $y = x + 1$

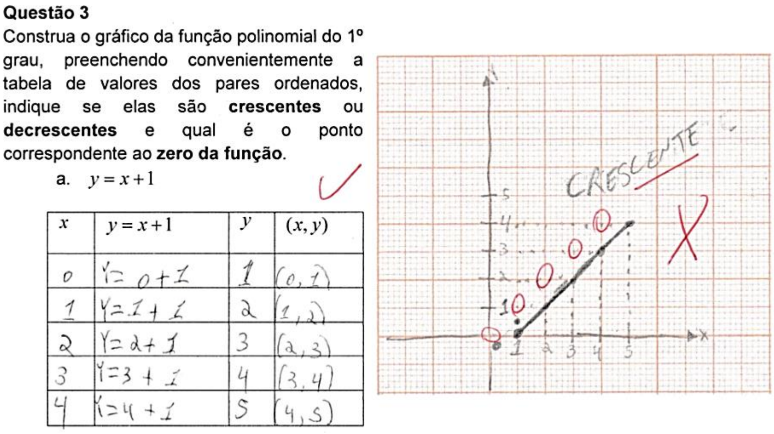
x	$y = x + 1$	y	(x, y)

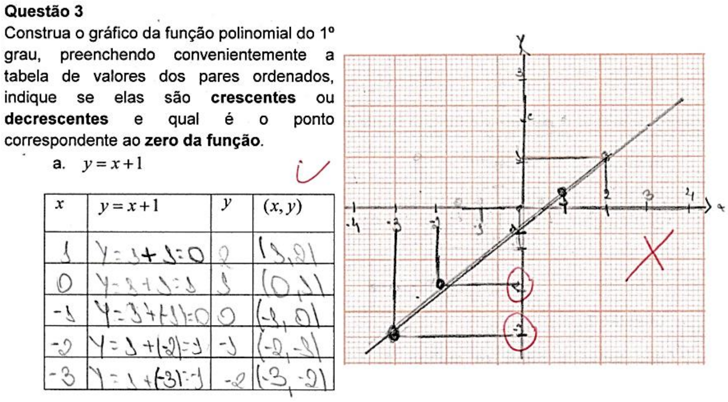


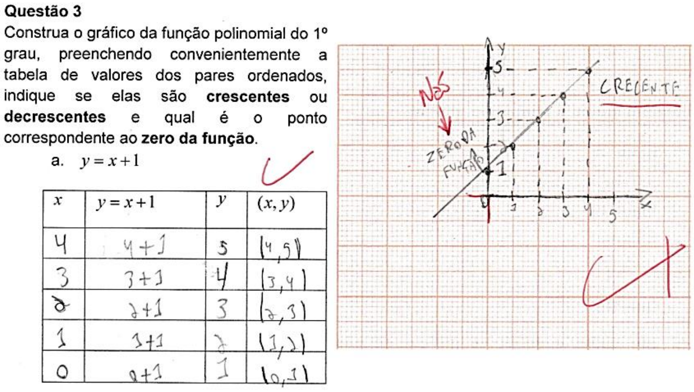
Fonte: Arquivo do autor.

Poucos estudantes, de ambos os grupos, apresentaram soluções em branco ou totalmente incorretas. Uma parcela dos alunos preencheu corretamente a tabela, porém não construiu o gráfico da função polinomial, o que impossibilitou algumas análises solicitadas na questão. No entanto, uma parte dos estudantes dos Grupos A e B, realizaram e apresentaram **r**esoluções que atendiam a todos os requisitos solicitados na pergunta. A seguir, na Figura 111 e 112, observaremos estes casos.

Figura 111 – Resolução parcialmente correta da questão 3 dos alunos dos Grupos A e B

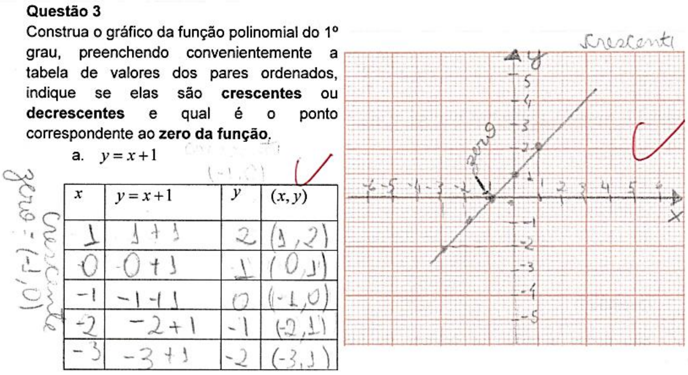


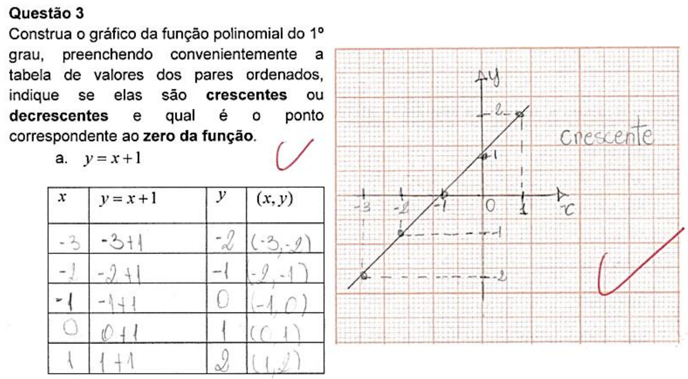




Fonte: Arquivo do autor.

Figura 112 – Resolução correta da questão 3 dos estudantes dos Grupos A e B





Questão 3
Construa o gráfico da função polinomial do 1º grau, preenchendo convenientemente a tabela de valores dos pares ordenados, indique se elas são **crescentes** ou **decrescentes** e qual é o ponto correspondente ao **zero da função**.
a. $y = x + 1$

x	$y = x + 1$	y	(x, y)
-3	-3+1	-2	(-3,-2)
-2	-2+1	-1	(-2,-1)
-1	-1+1	0	(-1,0)
0	0+1	1	(0,1)
1	1+1	2	(1,2)

Fonte: Arquivo do autor.

Analisando a Figura 111 percebemos que os estudantes preenchem corretamente a tabela de valores da função dada. Em alguns casos, apresentam dificuldades em construir o gráfico, porém permite inferir que compreendem que o comportamento dessa função polinomial é linear e crescente. Muitos alunos não destacaram qual ponto do gráfico correspondia ao zero da função, com exceção de um registro que identifica o ponto que intercepta o eixo *y*, como sendo o ponto associado ao zero da função apresentada, mesmo não estando correto apresenta indícios que o aluno sabia que o ponto em que o eixo cartesiano é interceptado pela reta representa a coordenada do zero da função polinomial de 1º grau, apenas não identificou o eixo correto.

Nas soluções corretas destacadas na Figura 112, reparamos que os estudantes possuem clareza de todos os itens solicitados. Ainda que em um dos casos, o aluno não tenha feito referência ao zero da função polinomial, pode ser que tenha conhecimento deste conceito, pois nas aulas ministradas sobre o tema, o valor de *x* escolhido e previamente calculado (o zero da função), era preferencialmente alocado no centro da tabela de valores, assim sendo notamos que nas duas resoluções apresentadas o valor que representam o zero da função polinomial está no centro das tabelas.

Há indicadores de que, no que concerne à aprendizagem da função polinomial de 1º grau, uma parcela dos estudantes analisados conseguiu adquirir os conhecimentos mais relevantes relacionados a esse tema. Provavelmente as intervenções que de maneira recorrente disponibilizava aproximações sucessivas com esse tema, tenham ajudado.

Investigar e mapear a estrutura cognitiva dos estudantes buscando subsunçores que pudessem ancorar as aprendizagens de funções polinomiais de 1º grau, como por exemplo, resolução de equações do 1º grau explorados na Atividade 1, permitiu discussões significativas e maiores esclarecimentos nos procedimentos a serem adotados para resolução das mesmas e, consequentemente, pode ter contribuído para que compreendessem melhor esse tema apresentando compreensões corretas e próximas do correto em alguns casos.

O experimento Esticando a Mola, possivelmente, ajudou na aquisição dos conhecimentos associados à função polinomial de 1º grau. Ele possibilitou uma discussão ampla sobre o comportamento gráfico (reta) dos pontos experimentais, assim como a relação de proporcionalidade direta envolvida (crescimento proporcional de uma grandeza em relação à outra). Talvez a contextualização com a Física para esta aprendizagem possa ter proporcionado interações assimétricas positivas, refletindo nas aprendizagens desse tema.

Conforme podemos observar na Figura 113 a seguir, a questão 4 (objetiva) proposta na avaliação final foi inserida de forma a proporcionar mais uma aproximação entre as áreas da Física e da Matemática. Ainda que os alunos não conhecessem a expressão da velocidade média, este tema foi discutido na Atividade 6 e talvez ao perceberem que a unidade de medida comumente utilizada é o (km/h) pudessem fazer uma associação a resposta correta.

Figura 113 – Proposta da questão 4 disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B

Num movimento, o espaço percorrido é diretamente proporcional ao tempo, mantendo-se constante a velocidade. O professor Demóstenes deslocou-se no seu automóvel durante 4 horas, a uma velocidade média de 90 km/h. A função que representa corretamente a relação de proporcionalidade direta é

(A) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço}}{\text{Tempo}}$

(B) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço}+\text{Tempo}}{\text{Tempo}}$

(C) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço}-\text{Tempo}}{\text{Tempo}}$

(D) "Velocidade média = $\text{Espaço}\cdot\text{Tempo}$

(E) "Velocidade média = $\frac{\text{Tempo}}{\text{Espaço}}$

Fonte: Arquivo do autor.

Os estudantes do Grupo A alcançaram um percentual de acerto de aproximadamente 54%, enquanto os alunos do Grupo B um percentual de 20%. Um estudante do Grupo A fez uma indicação na questão da expressão da velocidade média como sendo a variação do espaço pela variação do tempo $\left(V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}\right)$, indicando que possui alguns conhecimentos prévios que permitiram acertar a pergunta, conforme ilustrado na Figura 114 abaixo.

Cabe destacar que neste caso específico o conhecimento prévio deste estudante se comportou como uma variável facilitadora para a aprendizagem significativa. Demonstra que em algum momento se apropriou deste conceito e a compreensão da velocidade média como a razão entre espaço e tempo não é um obstáculo.

Ao que tudo indica, oposto a isso, é que para a maioria dos estudantes do Grupo B, esta questão não está condizente com as capacidades de desempenho dos alunos por conta própria, talvez sendo necessário, neste caso, da mediação do professor.

Figura 114 – Solução apresentada por um estudante do Grupo A que indica conhecimentos prévios

Questão 4

Num movimento, o espaço percorrido é diretamente proporcional ao tempo, mantendo-se constante a velocidade. O professor Demóstenes deslocou-se no seu automóvel durante 4 horas, a uma velocidade média de 90 km/h. A função que representa corretamente a relação de proporcionalidade direta é

(A) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço}}{\text{Tempo}}$

(B) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço} + \text{Tempo}}{\text{Tempo}}$

(C) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço} - \text{Tempo}}{\text{Tempo}}$

(D) "Velocidade média = Espaço · Tempo

(E) "Velocidade média = $\frac{\text{Tempo}}{\text{Espaço}}$

$V_M = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

Fonte: Seduc[22].

Observamos que na questão 5 (objetiva) curiosamente se manteve a proporção dos estudantes dos Grupos A e B que responderam corretamente, 54% e 20%, respectivamente, a pergunta. Não necessariamente foram os mesmos estudantes que acertaram ambas as questões, contudo o objetivo da pergunta residia em verificar a compreensão dos estudantes acerca da constante de proporcionalidade, com o uso do número irracional pi (π) na expressão proposta, como ilustrado na Figura 115.

Figura 115 – Proposta da questão 5 disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B

O comprimento **C** de uma circunferência é uma função do diâmetro **d**; no caso, **C** é diretamente proporcional a **d**, e temos **C = f(d) =** π **· d** . Então a constante de proporcionalidade (k) é:

(A) k = 2d

(B) k = π

(C) k = $\frac{2}{\pi}$

(D) k = 2π

(E) k = $\frac{\pi}{2}$

Fonte: Seduc [22]

[22] SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Gestão da Educação Básica. **Avaliação da Aprendizagem em Processo – Prova do Aluno – 2ºBim**. 16ªEdição. São Paulo: SEE, 2017.

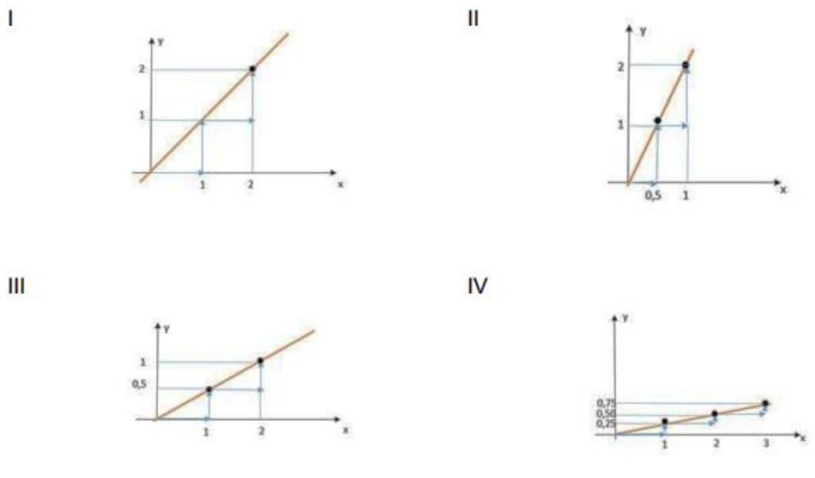
Considerando as dificuldades enfrentadas pelos estudantes dos dois grupos na Atividade 5, responsável por abordar esses temas, podemos destacar que são conceitos que ainda apresentam fragilidades, isto é, os estudantes não possuem clareza sobre o significado da constante de proporcionalidade e muitos não a reconhece na lei de formação da função, indicando que é um tema que poderia ser retomado considerando a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora, pois não apresenta indícios que foi aprendido de forma significativa.

Ainda compondo o conjunto de questões objetivas, a questão 6 (Figura 116) buscava a ordenação de constantes de proporcionalidade distintas, por meio da observação das inclinações das retas. Houve um contraponto dos estudantes do Grupo B em relação ao Grupo A, o Grupo B teve um maior número de acertos.

O que pode ter favorecido os estudantes do Grupo B em relação ao Grupo A é o fato da questão favorecer sua resolução por um processo de observação dos gráficos, atentando-se apenas para as inclinações e os valores quando a abscissa correspondia a um, isso pode ter sido uma aposta assertiva do grupo.

Figura 116 – Proposta da questão 6 disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B

Considere os gráficos a seguir:



Considerando as constantes de proporcionalidade encontradas em cada uma das funções e organizando-as em ordem crescente, obtemos a seguinte sequência:

(A) IV, III, I e II.

(B) II, I, III e IV.

(C) III, IV, I e II.

(D) I, II, III e IV.

(E) II, III, IV e I.

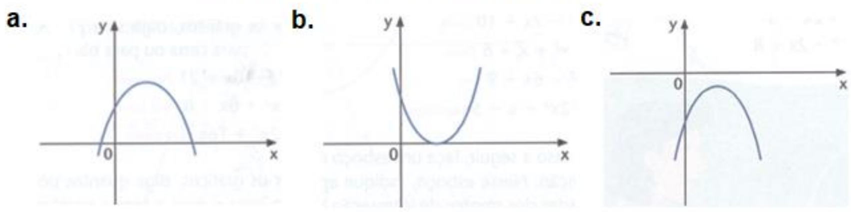
Fonte: Seduc [22] .

Iniciando as discussões das funções polinomiais de 2º grau, a questão 7 (Figura 117) buscava indicar se os alunos compreendiam as alterações que o discriminante (Δ) e o parâmetro *a* ocasionavam nos gráficos de funções quadráticas.

Figura 117 – Proposta da questão 7 disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B

Questão 7

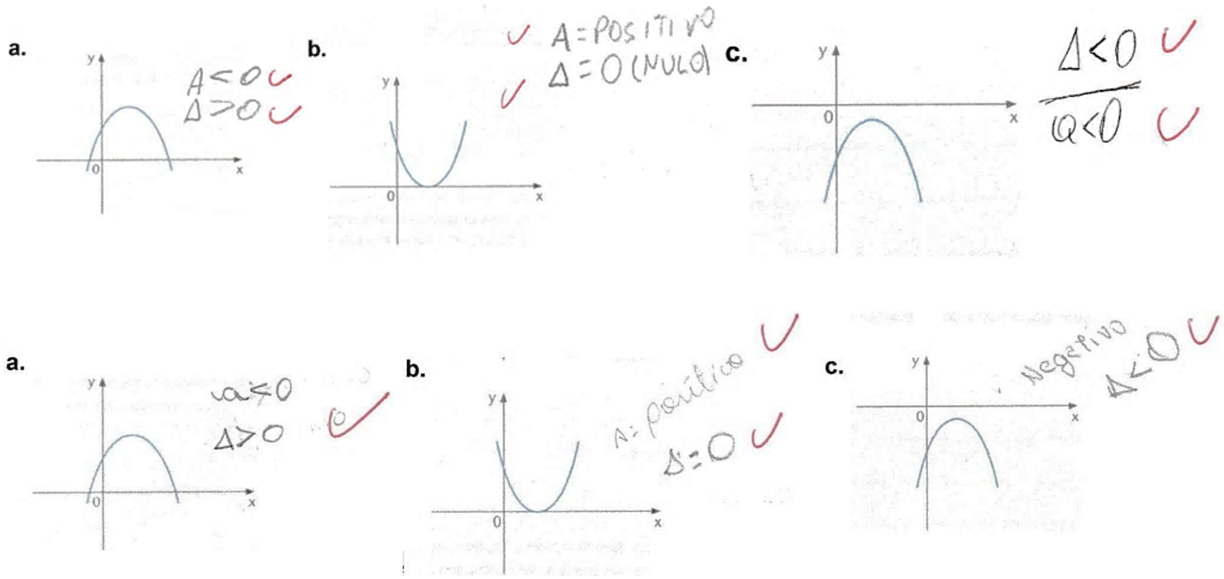
São dadas a seguir os gráficos de três funções de 2º grau, com $y = ax^2 + bx + c$ e $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Em cada caso, diga se a e Δ são positivos, nulos ou negativos.



Fonte: Arquivo do autor.

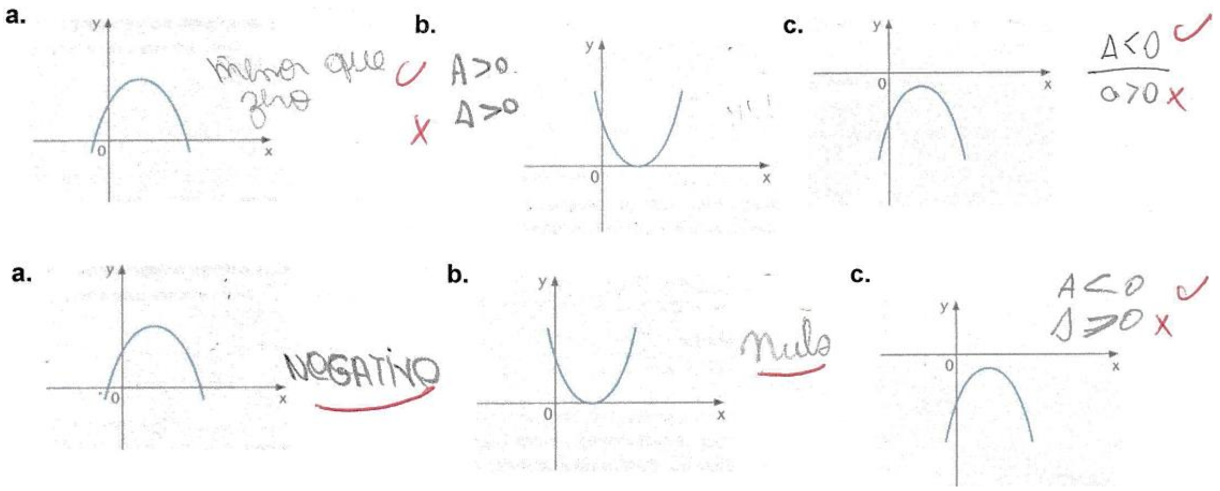
A maioria dos estudantes não entendeu que precisava indicar em qual situação o discriminante (Δ) assumia valor positivo, negativo ou nulo e também quando o parâmetro *a* era positivo ou negativo para cada parábola apresentada. Acreditamos que a redação do enunciado da questão não favorecia a compreensão e apesar de ter sido esclarecido oralmente pelo professor o que esperava que fizessem nesta questão, os alunos dos dois grupos apresentaram respostas imprecisas, conforme veremos na Figura 119 a seguir.

Figura 118 – Resolução correta da questão 7 de alunos dos Grupos A e B



Fonte: Arquivo do autor.

Figura 119 – Resolução parcialmente correta da questão 7 de alunos dos Grupos A e B



Fonte: Arquivo do autor.

Ainda que seja possível notar acertos associados às parábolas conforme ilustrado na Figura 118, acreditamos que a forma com a qual a questão foi elaborada leva a uma interpretação equivocada. Por exemplo, o valor do parâmetro *a* não pode ser nulo, pois caso seja, não temos a definição de uma função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2 + bx + c$, no entanto a questão deixa uma possibilidade do estudante atribuir o valor zero ao parâmetro *a*.

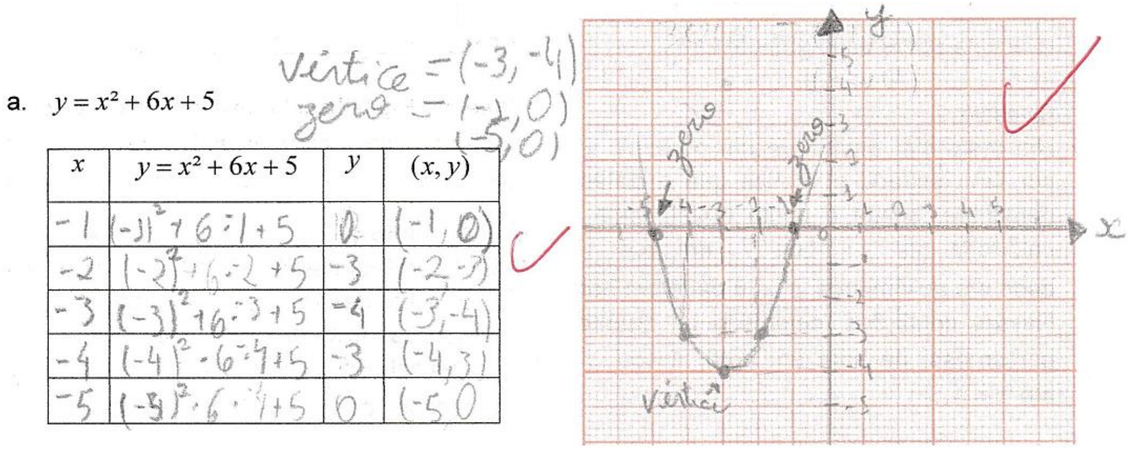
Em ambos os grupos, muitos estudantes responderam *"Menor que zero"*, *"Nulo"* e *"Negativo"*, como vemos na Figura 119, sem esclarecer devidamente sobre qual dos itens solicitados estavam se referindo, o que demonstra a confusão que o texto utilizado na questão pode ter possibilitado.

A questão 8 foi elaborada buscando contemplar o preenchimento de uma tabela de valores convenientes para construir um intervalo interessante de análise do gráfico da função polinomial de 2º grau. As aulas que se dedicaram a explicar e discutir esses temas solicitavam que os alunos calculassem a coordenada *x* (abscissa) do vértice, em seguida sugeria que colocassem esse valor no centro da tabela de valores e preenchessem com mais dois valores unitários nos campos da tabela acima e abaixo da abscissa do vértice e assim teriam um intervalo interessante para construir e observar o comportamento da curva.

Esta questão demonstrou ser desafiadora, sobretudo aos estudantes do Grupo B, em que nenhum estudante conseguiu responder corretamente à pergunta, possivelmente por envolver muitas etapas para sua solução. Esperava-se que os estudantes: calculassem a coordenada *x* do vértice, atribuíssem valores unitários próximos na tabela, substituíssem tais valores na lei de formação da função dada e calculassem as coordenadas em *y* resultando em um par ordenado (*x* ,*y*) correspondente, fizessem os eixos cartesianos em um intervalo conveniente e localizassem os pontos corretamente, finalizando com a curva representativa desses pontos e a indicação dos pontos que representavam o vértice e os zeros da função polinomial de 2º grau.

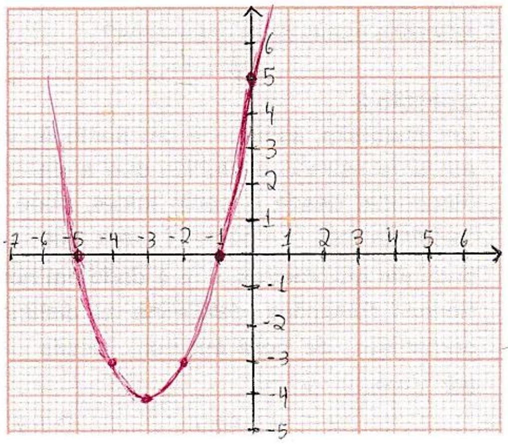
Como apenas estudantes do Grupo A acertaram esta questão, a Figura 120 ilustrará os métodos adotados pelos estudantes para solucionar a pergunta e que evidencia a compreensão e realização de todos os processos anteriormente relatados.

Figura 120 – Resolução correta da questão 8 de alunos do Grupo A



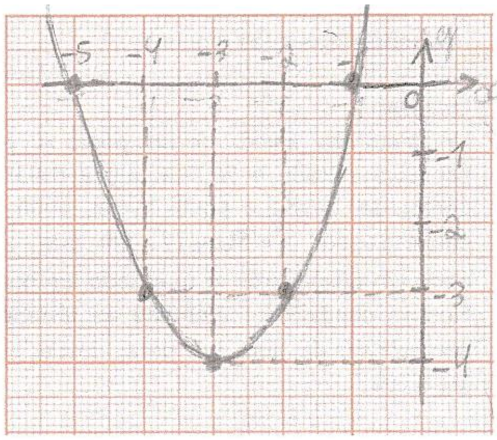
a. $y = x^2 + 6x + 5$ $X_V = \frac{-b}{2a}$ $X_V = \frac{-(6)}{2 \cdot 1}$ $X_V = -3$

x	$y = x^2 + 6x + 5$	y	(x, y)
-5	$(-5)^2 + 6 \cdot (-5) + 5$	0	(-5; 0)
-4	$(-4)^2 + 6 \cdot (-4) + 5$	-3	(-4; -3)
-3	$(-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 5$	-4	(-3; -4)
-2	$(-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 5$	-3	(-2; -3)
-1	$(-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 5$	0	(-1; 0)



a. $y = x^2 + 6x + 5$

x	$y = x^2 + 6x + 5$	y	(x, y)
-5	$y = (-5)^2 + 6 \cdot (-5) + 5$	0	(-5, 0)
-4	$y = (-4)^2 + 6 \cdot (-4) + 5$	-3	(-4, -3)
-3	$y = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 5$	-4	(-3, -4)
-2	$y = (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 5$	-3	(-2, -3)
-1	$y = (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 5$	0	(-1, 0)



Fonte: Arquivo do autor.

O primeiro estudante que observamos na Figura 120 conseguiu claramente expor o que era solicitado, ao contrário do segundo que registrou o cálculo do vértice, mas não explicitou no gráfico os pontos solicitados. Já o terceiro estudante demonstra domínio de todas as etapas que envolvem as questões, assim como os dois alunos anteriores, porém assim como o segundo aluno, não deixa claro no gráfico os pontos que representam o vértice e os zeros da função quadrática.

Pouco mais metade dos estudantes analisados do Grupo A apresentou resoluções corretas ou parcialmente corretas, os demais optaram por deixar a questão em branco. Há pelo menos duas hipóteses para essa decisão: o tempo que seria necessário dispor para resolver toda a questão e ter que administrar com o tempo de resolução da atividade, ou talvez pelas diversas etapas para chegar à solução e não ter clareza se era possível realizar todas elas.

Percebemos indícios da ocorrência de aprendizagens significativas, principalmente porque os estudantes precisavam recorrer aos conhecimentos prévios discutidos no processo de reconhecimento da estrutura cognitiva dos alunos, para realizar todas as etapas anteriormente citadas e concluir com êxito esta questão.

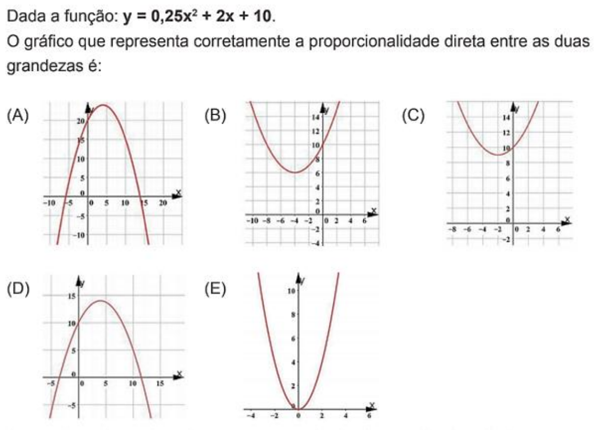
Os estudantes que demonstraram possuir os conceitos subsunçores suficientemente capazes de ancorar as aprendizagens propostas, claramente finalizaram a questão de maneira correta. Já os que apresentavam maiores fragilidades nas tarefas de reconhecimento da estrutura cognitiva, assim como nas tarefas do processo de aprendizagem, acabaram demonstrando mais acertos parciais e respostas em branco.

Diante disso, evidenciamos a importância de o professor mapear a estrutura cognitiva dos estudantes, ter conhecimento dos conceitos subsunçores necessários para servirem de ancoradouro para as aprendizagens novas que serão propostas e, ainda, na falta dos subsunçores capazes de ancorar as aprendizagens futuras, oportunizar organizadores prévios que busquem suprir essa ausência.

Sobre os processos relacionados à assimilação Moreira (2001, p.27) destaca que descrevê-lo sob a perspectiva de “[...] uma única interação *A ’a’* é uma simplificação, pois, em menor escala, uma nova informação interage também com outros subsunçores e o grau de assimilação em cada caso, depende da relevância do subsunçor”. O que é observável nos casos em que alguns estudantes apresentam subsunçores mais amplos, bem estabelecidos e diferenciados em relação a outros estudantes, permitindo assim que consigam assimilar os novos conhecimentos disponibilizados.

A última questão (objetiva) proposta na avaliação final (Figura 121) possuía, conscientemente, um nível considerável de dificuldade para as turmas. Tinha como objetivo principal perceber quais estudantes manifestariam uma compreensão mais ampla de funções quadráticas. Para responder adequadamente um dos raciocínios possíveis era, novamente, calcular as coordenadas (x, y) do vértice da parábola, aliado ao entendimento da influência do parâmetro a no gráfico da função polinomial de 2º grau.

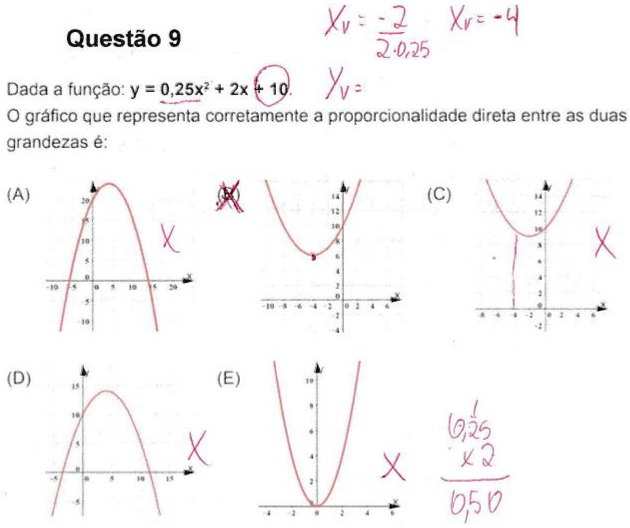
Figura 121 – Proposta da questão 9 disponibilizada aos estudantes dos Grupos A e B



Fonte: Seduc [22]

Um número reduzido de estudantes pertencentes ao Grupo A conseguiu expressar a resolução correta. A Figura 122 apresentará uma estratégia de resolução interessante apresentada por um estudante para solucionar a questão.

Figura 122 – Solução da questão 9 apresentada por um estudante do Grupo A



Fonte: Arquivo do autor.

O aluno que apresentou essa resolução demonstra um entendimento completo de todos os temas discutidos ao longo da trajetória. Ao destacar os parâmetros *a* (0,25) e *c* (10) ele descarta as alternativas (a) e (d) por possuírem concavidade para baixo, o que não corresponde ao comportamento esperado para um valor de $a > 0$, e elimina também a alternativa (e), pois o parâmetro *c* indica o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas.

Diante das duas alternativas restantes e possíveis, recorre ao cálculo do vértice da parábola, e ao concluí-lo percebe que a única resposta que se adequa aos seus resultados é a alternativa correta, o item (b).

Este momento da avaliação final se mostrou importante e rico em informações sobre as aprendizagens dos estudantes, permitindo ao professor reavaliar o percurso utilizado e as dúvidas remanescentes dos alunos sobre o tema. Consideramos interessante, após análise feita da avaliação, que as questões fossem novamente disponibilizadas aos estudantes e que em grupos de alunos com diferentes compreensões do tema, pudessem compartilhar as experiências e as estratégias que adotaram, em um ambiente dialógico entre os pares e com a supervisão do professor.

Neste momento de diálogo das estratégias, caso seja interessante ao professor, apresentar sistematizar alguns procedimentos que poderiam ter sido adotados pelos estudantes, reescrever a questão com enunciado mal redigido e utilizar a reconciliação integradora e a diferenciação progressiva para fortalecimento dos conceitos poderia ser um caminho interessante para adotar.

Os estudantes foram submetidos a uma única avaliação contendo muitos tópicos de ensino discutido ao longo de semanas, talvez a fragmentação da avaliação final, ainda que contemplem repetidamente os temas, possa ser um instrumento que permite uma avaliação melhor das aprendizagens. A concentração de muitos tópicos a serem avaliados, sob a pressão e tensão de fazer sem consulta, de maneira individualizada e com pouca interação com o professor são aspectos que podem ter impactado no desempenho de alguns estudantes, que percebem esse ambiente de uma forma mais intimidadora.

Moreira (2001) chama a atenção para o fato de que

> [...] a assimilação é um processo que ocorre quando um conceito ou proposição *a*, potencialmente significativo, é assimilado sob uma ideia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, [...], não só a informação *a*, mas também o conceito subsunçor *A*, com o qual ela se relaciona, são modificados pela interação. (MOREIRA, 2001, p.25)

Durante a análise da avaliação final dos estudantes, em diversos momentos pudemos reconhecer o princípio da assimilação proposto por Ausubel. Estudantes de ambos os grupos mostraram modificações na compreensão que tinham sobre alguns tópicos discutidos ao longo da trajetória. A lei de formação de funções e a aprendizagem de conceitos relacionados à função polinomial de 1º grau (comportamento gráfico, zero da função polinomial e crescimento e decrescimento da função polinomial de 1ºgrau) foram conceitos que ganharam expressivos significados ao longo da trajetória e reconhecimento da consolidação de tais aprendizagens com a avaliação final.

Quando Ausubel, de acordo com Moreira (2006), considera de suma importância averiguar a estrutura cognitiva preexistente nos estudantes, os conhecimentos prévios que possuem para pautar o ensino naquilo que o aluno já sabe de forma a garantir uma aprendizagem significativa, é por compreender que identificar os conceitos subsunçores, é essencial para que a relação entre as ideias-âncoras e as assimiladas permaneçam na estrutura cognitiva, mesmo após o surgimento de novos significados.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa buscou compreender a promoção de aprendizagem significativa de temas de ensino da área da Matemática (Funções), destinada aos estudantes matriculados no 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública da rede estadual de ensino de São Paulo. Utilizamos como referenciais teóricos centrais: a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, apresentada por (Moreira, 2001); e a Trajetória Hipotética de Aprendizagem na perspectiva de Simon (1993).

Apropriando-se dos princípios da THA, como ferramenta de investigação e planejamento das atividades matemáticas, fundamentadas no construtivismo, elaboramos um plano de ensino pautado nas melhores hipóteses de como se consolida a aprendizagem de funções polinomiais nos alunos observados.

O Ciclo de Ensino de Matemática proposto por Simon (1993) considera que os objetivos de aprendizagem planejados pelo professor (ensino de funções polinomiais), planos do professor para as atividades matemáticas de acordo com as UEPS, bem como as hipóteses do docente sobre o processo de aprendizagem segundo a TAS são partes fundamentais e constituintes da THA. Estas anteriormente expostas, articuladas com o conhecimento do professor sobre ensino e aprendizagem de Matemática, advindo de leituras, da sua formação inicial e continuada e da própria experiência profissional, em conjunto com a avaliação da aprendizagem dos estudantes, oportunizada pela reflexão sobre a constituição interativa das atividades em sala de aula, caracterizam o ciclo de ensino de matemática, pelo autor defendido.

A proposição de Simon (1993), em seu peculiar movimento cíclico, permite ao docente que, durante a realização da THA, faça modificações em um ou mais domínios (objetivo de aprendizagem, atividades de ensino e processamento hipotético da aprendizagem) no instante em que considerar necessário, podendo ser alterado durante a constituição interativa das atividades em sala de aula, no planejamento entre aulas, ou até mesmo ao término da execução da THA. O conhecimento do professor é constantemente modificado neste processo, permitindo que o mesmo faça intervenções, reavalie a trajetória proposta e realizada a todo momento e avalie como se deu (ou não) a aprendizagem dos estudantes.

Assim sendo, percebemos após análise das atividades realizadas pelos estudantes e pelo conhecimento modificado do professor ao término da realização da THA aqui proposta, que alguns pontos necessitam atenção, como por exemplo: o tempo destinado à discussão e reconhecimento dos conceitos subsunçores, adequações das atividades do processo de aprendizagem do tema proposto, assim como revisão da avaliação final.

Notamos um certo grau de autonomia do professor ao construir e realizar uma THA, pois Simon (1993) destaca que apesar da aprendizagem dos estudantes ser idiossincrática, muitas vezes acontece por caminhos semelhantes e complementa que o professor utiliza uma atividade em sala de maneira que possa beneficiar e atingir o maior número de alunos com a tarefa proposta.

Com o grau de liberdade e autonomia que a THA concede ao professor, os pontos de atenção destacados poderiam ser superados pelo professor: dedicando mais algumas aulas para retomada dos conceitos subsunçores para aqueles estudantes que ainda não os apresentem de forma ampla, bem estabelecida e diferenciada; reavaliar a intencionalidade e pertinência das questões propostas nas atividades do processo de aprendizagem; e por fim reavaliar a estratégia a ser adotada na avaliação final das aprendizagens dos estudantes de forma a garantir ainda mais precisão no diagnóstico sobre a aquisição de aprendizagens significativas.

Considerando também, que os estudantes aprendem segundo os princípios da TAS, as atividades de ensino de Matemática, planejadas para compor a THA, buscam correspondência com uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) na perspectiva de Moreira (2011). Uma vez que as duas condições para ocorrência de uma aprendizagem significativa são: a disposição para aprender dos alunos e a utilização de um material potencialmente significativo, julgamos necessário que as tarefas matemáticas que compõem a THA deveriam atender aos elementos estruturantes de um material de ensino potencialmente significativo.

Frente a este desafio, procuramos estabelecer uma conexão entre áreas distintas do conhecimento, como elucidado nos documentos oficiais orientadores do currículo das redes de ensino públicas. A articulação escolhida foi com a área da Física, até então desconhecida pela maioria dos estudantes do ensino fundamental, que lidam com os conceitos por ela discutidos, na disciplina de Ciências, muitas vezes apenas como aplicação de suas equações teóricas, esvaziadas de significados. Buscamos utilizar duas situações que recorriam à experimentação (Lei de Hooke e Queda Livre) para contextualizar o tópico de ensino e apresentar uma das aplicações do conhecimento matemático em estudo, assim como possibilitar situações que potencializassem a aquisição de uma aprendizagem significativa.

Pretendíamos com a experimentação inferir quão importante é uma discussão que articule áreas próximas, porém distintas do conhecimento e como esse diálogo poderia favorecer as aprendizagens de algumas habilidades prescritas nos currículos de Matemática, especificamente no Currículo Paulista. Apesar da preocupação principal da pesquisa ser a avaliação das aprendizagens dos estudantes e indícios de consolidação de aprendizagens significativas, a Física contribuiu em muitas discussões ao longo da trajetória, viabilizou debater aspectos da natureza da ciência (erro experimental, imprecisão, processo experimental de uma teoria), discussões sobre grandezas e medidas, de conceitos como gravidade, força, peso e massa, oportunizados principalmente pelas atividades experimentais.

Muitas vezes a atividade docente se mostra solitária e individualista e há uma dificuldade em realizar atividades interdisciplinares na escola. A elaboração e desenvolvimento da THA pode possibilitar uma parceria entre os professores de Ciências (ensino fundamental) e/ou de Física (ensino médio) com os docentes de Matemática. Pode propiciar discussões pertinentes e importantes para cada área de conhecimento e também enriquecer as aproximações destacadas na THA proposta neste trabalho, assim como tem potencial para agregar outras hipóteses sobre as aprendizagens dos estudantes acerca do tema de estudo proposto.

A análise de dados do presente estudo pautou-se na metodologia de análise do conteúdo na visão de Bardin (1977). Considerou as três fases da análise de conteúdo (Pré-análise, Exploração do material e Tratamento dos resultados, inferência e interpretação) para as asserções a seguir. A primeira delas é a necessidade de se conhecer a estrutura cognitiva do estudante, seus conhecimentos prévios, ou seja, os subsunçores que são importantes para ancorar a nova aprendizagem.

Outro aspecto relevante é pautar o material instrucional às necessidades dos estudantes, ofertando organizadores prévios, se possível, para consolidarem suas aprendizagens significativamente. Percebemos que o Grupo B já apresentava fragilidades ao longo das atividades de reconhecimento da estrutura cognitiva, e também uma maior dificuldade de compreensão de algumas etapas do roteiro do experimento *Esticando a Mola*. O Grupo A apresentava maior facilidade de entendimento nas tarefas, e os equívocos apresentados pelo grupo eram esclarecidos após a discussão da tarefa. É possível que dedicação maior de tempo para retomar aspectos relevantes e fortalecer os subsunçores necessários para ancorar as aprendizagens novas, pudessem ser uma mudança que favorecesse as aprendizagens seguintes do grupo de alunos que apresentou maiores dificuldades.

Uma antiga pauta dos professores é a quantidade excessiva de alunos na sala de aula e, à vista disso, cabe ressaltar que foi desafiador o atendimento dos grupos durante a primeira atividade experimental, pois os kits eram limitados e os grupos em determinado momento da aula, encontravam-se em etapas totalmente diferentes. Apesar de considerar satisfatório o atendimento prestado pelo professor/pesquisador aos agrupamentos de alunos naquele momento, acreditamos que o fato do Grupo B já ter uma dificuldade conhecida pelo seu histórico de atividades, essa falta de exclusividade em tirar suas dúvidas com maior atenção aos detalhes que necessitavam, possa ter causado maiores dificuldades de compreensão do que era solicitado.

Destacamos positivamente a iniciativa de articulação entre as áreas de conhecimento Física e Matemática, assim como os estudantes avaliaram e responderam bem à forma como foi proposta essa integração de áreas. Não temos a pretensão de considerar que tal articulação é trivial, pelo contrário, exige um tempo de dedicação e pesquisa sobre a prática docente, e também do conhecimento dos estudantes público-alvo dessas propostas, assim como um entendimento de que maneira ambas as áreas escolhidas podem ser articuladas, aprofundando a formalização e a conceituação. Estas preocupações do professor, no contexto escolar, acabam por vezes secundarizadas e pouco se discute processos formativos tanto de alunos quanto de professores.

Acreditamos que as atividades de ensino e experimentais seguiram os critérios anunciados por Simon (1993) para planejamento e investigação na perspectiva da THA e de seu Ciclo de Ensino de Matemática. Identificamos em diversos momentos da trajetória os momentos de reformulação das propostas, tanto no planejamento entre as aulas (Atividade 5 e 6), como no transcorrer das mesmas, quando, por exemplo, se fez necessário buscar informações sobre a gravidade e as luas de Júpiter tal como a necessidade de exibição do vídeo proposto por um estudante sobre a percepção das diferentes gravidades no corpo humano.

Reconhecemos que houve uma alteração no conhecimento do professor decorrente da realização, análise do Ciclo de Ensino de Matemática e avaliação da THA, percebendo também uma confluência entre as hipóteses levantadas sobre a aprendizagem dos estudantes (TAS) e os indícios da importância dos conhecimentos prévios, da interação social e do entendimento de práticas construtivistas por parte do professor, que possibilitaram garantir a alguns alunos dos grupos analisados uma aprendizagem significativa dos temas propostos.

Os principais parâmetros para aferir a aprendizagem significativa dos estudantes, se resguardaram nos conceitos de interação social, zona de desenvolvimento proximal (ZDP), pautado nas práticas sócio-construtivistas de Vygotsky, e também no reconhecimento de conceitos subsunçores, na identificação do processo simultâneo existente entre a diferenciação progressiva e reconciliação integradora, no esquecimento como consequência natural da aprendizagem significativa no período de retenção e nos processos de assimilação e assimilação obliteradora sob o ponto de vista da TAS de Ausubel, na compreensão de Marco Antônio Moreira.

Quando Becker (2001) discute a pedagogia diretiva, não-diretiva e relacional aponta que o pressuposto epistemológico empirista subsidia a pedagogia diretiva em que entende que, o conhecimento se dá por transmissão do conhecimento e o aluno é compreendido como tábula rasa. Para o autor, percebe-se uma reprodução do autoritarismo, da coação, da heteronomia, da subserviência, do silêncio, da morte da crítica, da criatividade, da curiosidade. Esta tradição escolar está com raízes tão profundas na educação brasileira, que ainda hoje o professor encontra dificuldades quando propõe uma tarefa e ela não tem um conceito avaliativo associado assim como quando aborda um tema que não foi formalmente apresentado aos alunos, como identificado na proposição da Atividade 4 – Ideia de Função.

A THA proposta, analisada e avaliada por essa pesquisa apresenta uma estratégia de ensino adotada pelo professor/pesquisador de Matemática que não estava pautada em resolução de exercícios na lousa e solicitação de reprodução de exercícios semelhantes pelos alunos em seus cadernos, muito menos na centralidade de apresentação de algoritmos, fórmulas e definições. Foi explorado no decorrer de toda a THA o trabalho em grupo, momentos de discussão e retomada de conceitos, atividades experimentais dialógicas, rompendo com um modelo de ensino de temas matemáticos concebidos como tradicionais.

Nos chamou atenção alguns registros dos estudantes, em que era demonstrado corretamente um raciocínio lógico matemático para a questão, porém do ponto de vista do conhecimento escolar e da própria pergunta, haviam alguns equívocos. Isso sinaliza o tamanho da desigualdade educacional que impactam as aprendizagens dos diferentes estudantes brasileiros e até mesmo paulistas, pois mesmo em escolas próximas, em um mesmo bairro e contextos semelhantes evidenciam-se diferentes realidades sócio-histórica-social e de aprendizagem e nem sempre o que apresentam é o que se espera deles.

Freire (2016) argumenta que é preciso aprender com a nossa prática e que educar é um ato político, destacando que os métodos pedagógicos não são ferramentas independentes dos contextos, das pessoas e das intenções. Diante disso, nós, educadores, podemos refletir para assim indagar até que ponto devemos aceitar condições precárias de trabalho, e de infraestrutura das escolas? Por que em muitas situações nos apropriarmos de um discurso de utilização de materiais de baixo custo para desenvolvimento de nossas práticas pedagógicas, simplesmente porque o Estado se exime da responsabilidade de garantir insumos e equipamentos adequados para desenvolvimento da prática escolar? Quem é beneficiado neste contexto quando, por exemplo, alunos de escolas públicas possuem uma realidade e alunos de instituições privadas, outras, e bem distintas entre si? Realmente há uma preocupação com a formação cidadã e integral dos estudantes brasileiros como observamos nos documentos orientadores do currículo?

Muitas dessas perguntas, certamente possuem uma gama enorme de respostas, porém mais do que obter respostas, talvez coubesse a nós, professores, questionarmos a atual lógica mercantil pautada no neoliberalismo da educação contemporânea, buscar alternativas para denunciar as condições de trabalho, lutar para que a escola e seus profissionais sejam valorizados, frisar que o conhecimento científico não é um dado certo e acabado e entender que talvez a função social da escola atual seja a de promover uma aprendizagem significativa crítica para o pleno exercício da cidadania e entender que o conhecimento emancipa, liberta, conscientiza e denuncia práticas pedagógicas elitistas e discriminatórias.

De acordo com Freire (2016, p.204) ação e reflexão se dão simultaneamente e complementa que “crítico seremos, verdadeiros, se vivermos a plenitude da práxis”. Vázquez (2011), concebe que a práxis é uma atividade prática humana adequada a fins que exige certa atividade cognoscitiva, logo não podemos conceber que a atividade docente não requer uma constante articulação entre as atividades práticas e teóricas que possam contribuir para uma mudança intelectual e histórico-social.

Esta pesquisa possibilitou uma discussão da relevância de um trabalho colaborativo para a comunidade escolar, apresentando um olhar sobre a importância de uma atuação do professor de Matemática provocativo, que organiza grupos de discussão e faz experimentações em sua sala de aula e a capacidade que o ambiente escolar dispõe para viabilizar produção de conhecimento científico permitindo emergir objetos de investigação valiosos, os quais muitos professores reconhecem como valorosos do ponto de vista da pesquisa, porém com as enormes dificuldades de tempo e espaços que lidam cotidianamente, acabam por não aprofundar em investigações mais desafiadoras.

Admitimos que as redes de ensino, mais do que prescreverem um manual de habilidades, que devem ser alcançadas ao final de um processo de escolarização, devem oportunizar que os professores possam desenvolver e refletir sobre a práxis, e possam fazê-lo também em seu local de trabalho, em uma perspectiva de formação contínua em serviço, e que a filosofia da práxis possa direcionar as atividades do dia a dia, possibilitar ao professor novas reflexões sobre sua atuação e oportunizar novos caminhos que contribuam para uma prática educativa capaz de dialogar com as demandas atuais e com o seu contexto histórico.

Salientamos a importância em reconhecer o quão custoso é a atuação docente, pois mesmo recorrendo à mesma escola, turno, ano/série e tópico de ensino, cada grupo apresentou resultados que ora convergiam, ora divergiam entre si. Por mais que os momentos de retomada dos temas estudados durante algumas aulas da THA tenham sido importantes para uma compreensão sobre a qualidade das aprendizagens dos alunos, auxiliando em estratégias que pudessem melhorar ainda mais o caminho tomado para as atividades matemáticas, destacamos que projetos de reforço contínuos poderiam contribuir para uma leitura mais crítica das avaliações propostas.

Em suma, ressaltamos a necessidade de o professor trabalhar as particularidades e especificidades de cada grupo, ainda que as condições se assemelhem. Evidenciamos o desafio impostos aos docentes em que temos clareza que um método e estratégia únicos não são recursos suficientes quando se pensa a aprendizagem. Assim, o produto educacional proposto nesse Programa de Mestrado busca dialogar com os professores, apresentando o potencial da THA discutida neste trabalho, a intencionalidade na escolha e seleção das atividades realizadas, assim como pretende que este material sirva como uma referência para proposição de atividades que articulem as áreas da Matemática e Física e que valorizam a utilização de experimentos, propondo sugestões de adaptações que possam atender aos contextos específicos de cada comunidade escolar.

Esperamos que os professores se sintam fortalecidos tanto ao perceberem o envolvimento dos estudantes, quanto com a percepção de seu próprio processo formativo, desencadeado na e pela reflexão de sua prática. E que sejam, assim, autores de suas práticas, para além das prescrições dos documentos oficiais e/ou dos materiais indicados ou distribuídos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, M. A.; TATSCH, K. J. S. Epistemologia, história e ensino da matemática: reflexões sobre formação e aprendizagem significativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 8, n. 3, p. 78-93, 2017.

ANGELUCCI, C. B. et al. O estado da arte da pesquisa sobre o fracasso escolar (1991-2002): um estudo introdutório. **Educação e pesquisa,** v. 30, n. 1, p. 51-72, 2004.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional.** Trad. Eva Nick e outros. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Editora Edições 70, 1977.

BECKER, F. **Educação e Construção do Conhecimento**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.**Portugal: Porto editora, 1994.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base.** Brasília, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_ 19mar2018 _versaofinal.pdf >. Acesso em: 02 jun. 2019.

BRUM, W. P.; DA SILVA, S. D. C. R. Análise de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa no ensino de Matemática durante a apresentação do tema números reais. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática,** v. 6, n. 3, p. 1-22, 2015.

CARVALHO, S. M. G. de; PIO, P. M. A categoria da práxis em Pedagogia do Oprimido: sentidos e implicações para a educação libertadora. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos,** v. 98, n. 249, p. 428-445, 2017.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido.** 60ªed. – Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2016.

FREITAS, L. C. de. Os reformadores empresariais da educação: da desmoralização do magistério à destruição do sistema público de educação. **Educação & Sociedade**, v. 33, n. 119, p. 379-404, 2012.

GAUTHIER, C.; TARDIF, M. **A pedagogia: teorias e práticas da Antiguidade aos nossos dias.** Trad. Lucy Magalhães. 3ªed. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa.**Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4.ed. São Paulo: Atlas, 2002.

IVIC, I. **Lev Semionovich Vygotsky:** Coleção Educadores MEC. Recife: Massangana, 2010.

LEÃO, D. M. M. Paradigmas contemporâneos de educação: escola tradicional e escola construtivista. **Cadernos de Pesquisa**, v. 107, p. 187-206, 1999.

LIBÂNEO, J. C. O dualismo perverso da escola pública brasileira: escola do conhecimento para os ricos, escola do acolhimento social para os pobres. **Educação e Pesquisa,** v. 38, n. 1, p. 13-28, 2012.

LUCAS, J. G. **Unidade teoria-prática: construção dos saberes, fazeres e pensares. ____. A teoria na formação do educador:** análise dos "Grupos de Formação Permanente" de professores da Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação). São Paulo: PUC, 1992.

MARSIGLIA, A. C. G. et al. A Base Nacional Comum Curricular: um novo episódio de esvaziamento da escola no Brasil. **Germinal: marxismo e educação em debate,** v. 9, n. 1, p. 107-121, 2017.

MAYORAL, M. R. P. **La filosofia de la práxis según Adolfo Sanchez Vázquez.** Trad. Simone Rezende da Silva. Buenos Aires: CLACSO Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales,2007. Disponível em: <http://biblioteca.clacso.edu.ar/clacso/formacion-virtual/20100715081602/cap13.pdf >. Acesso em: 08 jun. 2020.

MENDES, R. M.; MISKULIN, R. G. S. A análise de conteúdo como uma metodologia. **Cadernos de Pesquisa**, v. 47, n. 165, p. 1044-1066, 2017.

MIRANDA, M. G. Sobre tempos e espaços da escola: do princípio do conhecimento ao princípio as sociedade. Educação e Sociedade, Campinas, v.26, n.91, p.639-651, mai./ago.2005.

MOREIRA, M.A. **Teorias de Aprendizagem.** São Paulo: EPU, 1999.

______. Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**.** São Paulo: Centauro, 2001.

______. A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula. Editora Universidade de Brasília, 2006.

______. Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

______. Potentially meaning fulteaching units-PMTU. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2011.

______. Ensino e aprendizagem significativa. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

MOZENA, E. R.; OSTERMANN, F. Sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Ensino de Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física,** v. 33, n. 2, p. 327-332, 2016.

NEVES, R. de A.; DAMIANI, M. F. Vygotsky e as teorias da aprendizagem. **UNI revista,** v. 1, n. 2, p. 1-10, 2006. Disponível em: <http://www.miniweb.com. br/educadores /Artigos/PDF/vygotsky.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2020**.**

OLIVEIRA, J. C. R.; FRIAS, R. T.; OMODEI, L. B. C. Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de função afim em um curso de formação continuada**.** 2014. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2014, Campo Mourão – PR. **Anais eletrônicos** XII EPREM. Paraná: UNESPAR, 2014. Disponível em: <http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/index.htm>. Acesso em: 19 abr. 2019.

ORNELLAS, J. F. de; SILVA, L. C. O ENSINO FUNDAMENTAL DA BNCC: proposta de um currículo na contramão do conhecimento. **Revista Espaço do Currículo,** v. 12, n. 2, 26 maio 2019.

ORRÚ, S. E. Base Nacional Comum Curricular: à Contramão dos Espaços de aprendizagem inovadores e inclusivos. **Revista Tempos E Espaços Em Educação,** v. 11, n. 25, p. 139-152, 2018.

PIO, P. M.; CARVALHO, S. M.G.; MENDES, J. E. Práxis e prática educativa em Paulo Freire: reflexões para a formação e a docência. **Anais do XVII Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino**, 2014. Disponível em: <http://uece.br/endipe2014/ebooks/livro2/PR%C3%81XIS%20E%20PR%C3%81TICA%20EDUCATIVA%20EM%20PAULO%20FREIRE%20REFLEX%C3%95ES%20PARA%20A%20FORMA%C3%87%C3%83O%20E%20A%20DOC%C3%8ANCIA.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2020.

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. Educação Matemática Pesquisa: **Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 11, n. 1, 2009.

PREFEITURA MUNICIPAL DE ITAQUAQUECETUBA. Plano Municipal de Resíduos Sólidos. s/d. Disponível em: <https://scholar.google.com.br/scholar?cluster=4881412291567999907&hl=pt-BR&as_sdt=0,5> Acesso em: 12 nov. 2020.

RODRIGUES, L. Z.; PEREIRA, B.; MOHR, A. O Documento "Proposta para Base Nacional Comum da Formação de Professores da Educação Básica"(BNCFP): Dez Razões para Temer e Contestar a BNCFP. **Revista Brasileira De Pesquisa Em Educação Em Ciências,** p. 1-39, 2020.

ROSENBAUM, L. S. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista.** 2010. 255 fls. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – PUC-SP, São Paulo 2010.

SACRISTÁN, G.; GÓMEZ, A. P. **Compreender e transformar o ensino** – 4ª ed. Artmed Editora, 2009.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo/UNDIME-SP. **Currículo Paulista.** São Paulo, 2019. 526 p.

SANTOS, F. M. dos. Análise de conteúdo:a visão de Laurence Bardin. Resenha de: [BARDIN, L. Análise de conteúdo. São Paulo: Edições 70, 2011, 229p.] **Revista Eletrônica de Educação.** São Carlos, SP: UFSCar, v.6, no. 1, p.383-387, mai. 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/291/156>. Acesso em: 08 jun. 2020.

SILVA, M. R. da. Impertinências entre trabalho, formação docente e o referencial de competências. **Retratos da Escola,** v. 13, n. 25, p. 123-135, 2019.

SIMON, M. A. *Reconstructing mathematics pedagogyfrom a constructivist perspective.* ***National Science Foundation,*** Washington, DC, 1993. 56p. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED364406.pdf>. Acesso em: 04 set. 2020

SOARES, M. V. Aquisição da linguagem segundo a Psicologia Interacionista: três abordagens. **Revista Gatilho**, v. 4, 2006.

SOARES, J. R.; JÚNIOR, J. N. A. P. Filosofia, Práxis e Educação. 2012. In: Fórum Internacional de Pedagogia, 2012, Parnaíba – PI. **Anais eletrônicos IV FIPED**. Piauí: Realize editora, 2012. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/78b9cab19959e4af8ff46156ee460c74.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2020.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação.** 18ª ed. São Paulo: Cortez, 2011.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VALADARES, J. A teoria da aprendizagem significativa como teoria construtivista. **Aprendizagem Significativa em Revista,** v. 1, n. 1, p. 36-57, 2011.

VÁZQUEZ, A. S. **Filosofia da Práxis.** São Paulo: Expressão Popular, 2011.

ZANELLA, L. C.H. **Metodologia da pesquisa.** SEAD/UFSC, 2006.

APÊNDICE

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

ENCiMA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
IFSP

Programa de Mestrado Profissional
em Ensino de Ciências e Matemática

PRODUTO EDUCACIONAL

Proposta de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem
que recorre a experimentos de Física para atividades de ensino
de funções polinomiais de 1º e 2º graus

Winderson Ribeiro Cavalcanti
Rebeca Vilas Boas Cardoso de Oliveira

São Paulo
2021

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

c376t Cavalcanti, Winderson Ribeiro
Tha: análise de uma proposta de ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus a partir de experimentos de física no ensino fundamental / Winderson Ribeiro Cavalcanti. São Paulo: [s.n.], 2021.
303 f.

Orientador: Rebeca Vilas Boas Cardoso de Oliveira

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2021.

1. Teoria da Aprendizagem Significativa. 2. Interdisciplinaridade. 3. Ensino de Matemática. 4. Perspectiva Construtivista. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

Produto Educacional apresentado como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), campus São Paulo. Defesa realizada em 26 – 03 – 2021.

AUTORES

Winderson Ribeiro Cavalcanti: Licenciado em Matemática pela Universidade Camilo Castelo Branco (2010); Licenciado em Física pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (2016); Licenciado em Pedagogia pela Universidade Nove de Julho (2019). Atualmente docente das Redes Públicas de Ensino do Município e do Estado de São Paulo.

Rebeca Vilas Boas Cardoso de Oliveira: Licenciada em Física pela Universidade de São Paulo (1995); Bacharel em Física pela Universidade de São Paulo (1992); Mestre em Ensino de Ciências (Modalidades Física, Química e Biologia) pela Universidade de São Paulo (1999); Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (2006). Atualmente é professora efetiva do Instituto Federal de São Paulo. Tem experiência na área de Educação e de Ensino de Física, atuando principalmente nos seguintes temas: formação de professores, educação de jovens e adultos, estrutura de conhecimento e PIBID.

Sumário

Apresentação

O material produzido, como produto educacional, é parte constituinte de nossa pesquisa intitulada "THA: Análise de uma proposta de ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus a partir de experimentos de Física no ensino fundamental", desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), sob orientação da Profª Drª Rebeca Vilas Boas Cardoso de Oliveira.

Nosso Produto Educacional busca dialogar com os professores sobre a intencionalidade na escolha e seleção das atividades propostas pela Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus, preferencialmente para estudantes do Ensino Fundamental; se dispõe a apresentar um material de referência que possa ser utilizado por docentes na proposição de temas da área da Matemática articulados à Física, com sugestão de propostas experimentais que possibilitem adaptações necessárias a contextos específicos de diferentes comunidades escolares.

A THA é constituída por quatro atividades destinadas ao reconhecimento da estrutura cognitiva dos estudantes e seus conhecimentos prévios, propondo em seguida a primeira atividade experimental intitulada ***Esticando a Mola*** com objetivo de introduzir o tema de estudo, contextualizar e demonstrar uma aplicação do conhecimento matemático em discussão, para além da exercitação com manipulação do algoritmo. Sugere-se que após a realização da primeira atividade experimental o docente desenvolva uma sequência de aulas, que discutam os diversos conceitos referentes às funções polinomiais de 1º e 2º graus e seus respectivos gráficos. Na sequência, recomenda-se a aplicação de duas atividades que buscam compreender o entendimento dos estudantes sobre o tema em estudo, e, logo após, aconselhamos o desenvolvimento da segunda atividade experimental denominada ***Queda Livre,*** com objetivos de contextualizar a função polinomial de 2º grau, finalizando a THA com a avaliação final realizada pelos estudantes.

Apresentaremos, ainda, neste material, uma breve discussão sobre os pressupostos teóricos que orientaram a elaboração, desenvolvimento e avaliação da trajetória hipotética de aprendizagem, que é parte integrante de um ciclo de ensino, em que a aprendizagem também é do professor, que poderá, subsidiado pelas aprendizagens promovidas, reelaborar sua prática e favorecer aprendizagens significativas.

Introdução

A investigação realizada envolveu o planejamento, a realização e a avaliação de uma trajetória hipotética de aprendizagem que utiliza experimentos de Física para ensinar funções polinomiais de 1º e 2º graus para estudantes do ensino fundamental, e, assim, possibilitou a proposição deste produto educacional e um diálogo com os educadores com a intenção explícita de articular o ensino de funções polinomiais a uma outra área de conhecimento, no caso a Física, oferecendo um contexto significativo deste conhecimento matemático aos estudantes, assim como aplicabilidades destes temas de ensino.

De acordo com Vázquez (2011), a atividade teórica só existe por e em relação com a prática, destinada à produção de fins (antecipação ideal do que ainda não existe, mas que se deseja que exista) como de conhecimentos. Distingue-se da atividade prática uma vez que seu objeto e matéria-prima são as sensações ou percepções, conceitos, teorias, representações ou hipóteses que possuem uma existência ideal (objeto psíquico). Assim sendo, o fim imediato da atividade teórica é elaborar ou transformar idealmente – e não realmente – essa matéria-prima.

Por outro lado, "a atividade prática que se manifesta no trabalho humano, na criação artística ou na práxis revolucionária é uma atividade adequada a fins, cujo comprimento exige – como mostramos – certa atividade cognoscitiva." (VÁZQUEZ, 2011, p.227). Assim sendo, consideramos que "[...] práxis nessa filosofia é em si educativa, pois ela é operada por sujeitos que na prática refletem teoricamente para sempre transformar" (SOARES; JUNIOR, 2012, p.9).

Diante disso, escolhemos a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) e a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) para fundamentação teórica (atividade teórica do professor) para orientar a construção do percurso e das estratégias de ensino e aprendizagem dos estudantes (atividade prática do professor).

Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA)

A THA é parte constituinte do que Simon (1993) intitulou de Ciclo de Ensino de Matemática. Este foi desenvolvido por meio de análises de um experimento de ensino construtivista, que possuía como uma de suas finalidades “analisar situações em que uma perspectiva construtivista se depara com as realidades de alunos em uma sala de aula real.” (SIMON, 1993, p.13, tradução nossa).

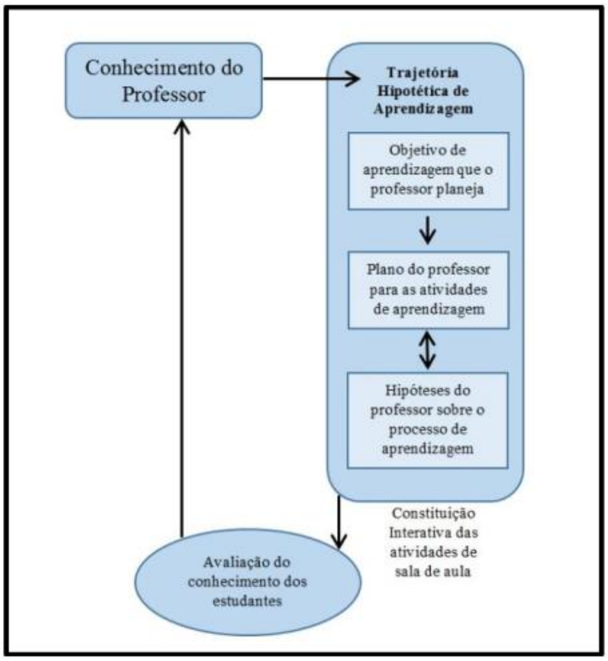
Portanto, buscando uma mudança no ensino de matemática em uma concepção construtivista, a THA é entendida como uma ferramenta de investigação e planejamento. Possui alguns elementos fundamentais, tais como: objetivos de aprendizagem estabelecidos pelo professor que orientarão a THA; as atividades matemáticas de aprendizagens; e o processamento hipotético de aprendizagem dos estudantes. Permite ao professor elaborar seu próprio projeto de decisões para a aprendizagem dos alunos, recorrendo as suas melhores suposições sobre como ocorre a aprendizagem dos mesmos.

> Uso o termo "trajetória hipotética de aprendizagem" para me referir à previsão do professor sobre o caminho pelo qual o aprendizado pode prosseguir. É hipotético, porque a trajetória de aprendizado real não é conhecida com antecedência. Caracteriza uma tendência esperada. A aprendizagem de cada aluno prossegue ao longo de caminhos idiossincráticos, embora muitas vezes semelhantes. Isso pressupõe que a aprendizagem dos indivíduos tenha alguma regularidade (cf.Steffe, Von Glasserfiel, Richards e Cobb, 1983), a comunidade da sala de aula restringe a atividade matemática, com frequência, de maneiras previsíveis, em que muitos dos alunos de uma mesma classe possam beneficiar-se da mesma tarefa matemática. Uma trajetória hipotética de aprendizagem fornece ao professor uma justificativa para a escolha de um projeto instrucional específico. Tomo minhas decisões com base na minha melhor suposição de como o aprendizado pode ocorrer. (SIMON, 1993, p. 35, tradução nossa)

O Ciclo de Ensino de Matemática é uma articulação entre as tomadas de decisões feitas pelo professor, que decorre muitas vezes de seus conhecimentos e de suas hipóteses sobre a aprendizagem dos alunos, com as atividades matemáticas que são projetadas de acordo com determinados objetivos de aprendizagem em uma perspectiva de ensino construtivista. O processo chamado de constituição interativa das atividades em sala de aula, permite alterações e revisões constantes sobre a compreensão dos estudantes diante do tema de ensino investigado, possibilitando modificações significativas nos conhecimentos do professor.

A Figura 1 ilustra esta proposta de ensino, que “enfatiza a importante interação entre os planos do professor e a constituição de atividades da sala de aula pelos professores/alunos.” (SIMON, 1993, p. 41-42, tradução nossa).

Figura 1 - Ciclo de Ensino de Matemática (Abreviado)



Fonte: (SIMON, 1993, p. 5 [23]

Assim, um dos componentes estruturantes do ciclo de ensino é o “conhecimento do professor”, que se reorganiza e se reelabora ao pensar sobre as atividades de ensino desenvolvidas e a avaliação possível das aprendizagens promovidas (ou não), implicando em possíveis alterações na THA. Com isso, o professor não é considerado apenas um especialista técnico (CONTRERAS, 2002), e nem um resolvedor de exercícios em sala de aula com aplicação de algoritmos. O professor conhece sua ciência de referência e conhece elementos de suas práticas, podendo, assim, estabelecer um círculo virtuoso no ciclo de ensino.

O entendimento sobre este ciclo de ensino de matemática, no que se refere a avaliação dos conhecimentos dos estudantes, de caráter processual, não necessariamente ocorre ao final da trajetória hipotética de aprendizagem, ou seja, pode ocorrer ao longo da realização do plano de ensino do professor. As possíveis mudanças que podem ocorrer durante a constituição interativa das atividades em sala de aula, permitem uma reflexão por parte do docente, culminando em novas concepções e criações de THA ou até mesmo alterações na que está em análise, pois

[23] Disponível em: <https://eric.ed.gov/?id=ED364406> Acesso em: 07 jan. 2020.

> [...] as ideias do professor sobre como os estudantes agiriam hipoteticamente na THA se transformam ao passo que ele nota como os estudantes estão desenvolvendo a atividade, o que pode fazer com que o professor recrie sua THA, com novas perspectivas para uma próxima atividade. (OLIVEIRA; FRIAS; OMODEI, 2014, p. 5)

Assim sendo, a THA foi escolhida para ser o instrumento de planejamento de uma proposta de ensino de Matemática do tema funções polinomiais de 1º e 2º graus, pois permite ao professor autonomia no planejamento, desenvolvimento e avaliação ações pautadas em suas melhores hipóteses sobre como os estudantes aprendem.

Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS)

A Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) possui uma abordagem cognitivista–construtivista valorizando o que os alunos já sabem e com ênfase na interação cognitiva, isto é, em como os conhecimentos novos relacionam-se com os conhecimentos prévios na estrutura cognitiva. Essa relação entre os conhecimentos prévios e novos deve acontecer de forma não arbitrária (saberes quaisquer) e não literal (ao pé da letra), com aquilo que o aprendiz já sabe:

> Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. viii)

Na perspectiva de Ausubel, portanto, existem duas condições necessárias, que devem ser atendidas, para que ocorra uma aprendizagem significativa.

> A aprendizagem significativa pressupõe que:
> a) o material a ser aprendido seja potencialmente significativo para o aprendiz, ou seja, relacionável a sua estrutura de conhecimento de forma não-arbitrária e não-literal (substantiva);
> b) o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar o novo material de maneira substantiva e não-arbitrária a sua estrutura cognitiva. (MOREIRA, 2001, p. 23)

É importante identificar os conhecimentos prévios (conceitos subsunçores) dos aprendizes, pois é o resultado da interação entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio que pode assegurar uma aprendizagem significativa.

Diante das condições necessárias para ocorrência de uma aprendizagem significativa, como acima exposto, observamos que uma delas se refere ao material instrucional utilizado para o ensino de determinado tema/conteúdo. Este deve ser cuidadosamente estruturado para que possa garantir que a nova informação potencialmente significativa, relacionada e assimilada pelos conceitos subsunçores existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, resulte em um produto interacional, ou seja, resulte em uma aprendizagem significativa.

Mas, qual seria a alternativa caso o professor reconheça que os estudantes não possuem subsunçores que sirvam de ancoradouro para as futuras aprendizagens? Ausubel propõe o uso de Organizadores Prévios, uma estratégia que tem por finalidade manipular a estrutura cognitiva, preenchendo esse vazio existente entre os conhecimentos prévios e os novos. “Organizadores prévios são materiais introdutórios, apresentados antes do próprio material a ser aprendido, porém, em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade do que esse material.” (MOREIRA, 2006, p. 23).

Os subsunçores não possuem uma natureza estática, sendo assim sofrem modificações, ganham novos significados e oferecem novas condições de ancoradouro para as novas informações, efetivando um processo cíclico de ancoragem, retenção e assimilação de novos conhecimentos.

Por fim, segundo Moreira (2006), para Ausubel o “processo de assimilação, mesmo após o aparecimento dos novos significados, a relação entre as ideias-âncoras e as assimiladas permanece na estrutura cognitiva”. (MOREIRA, 2006, p.28-29). Para este processo de assimilação, há necessidade de destacar a diferenciação progressiva e reconciliação integrativa ou integradora. Segundo Moreira (2001),

> a) diferenciação progressiva é o princípio pelo qual o assunto deve ser programado de forma que as ideias mais gerais e inclusivas da disciplina sejam apresentadas antes e, progressivamente diferenciadas, introduzindo os detalhes específicos necessários [...];
> b) reconciliação integrativa é o princípio pelo qual a programação do material instrucional deve ser feita para esporar relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças significativas, reconciliando discrepâncias reais ou aparentes. (MOREIRA, 2001, p. 30)

Assim sendo, a concepção ausubeliana sobre a aprendizagem dos indivíduos perpassam por esses conceitos que estruturam a Teoria da Aprendizagem Significativa, que em sua perspectiva cognitivista, discute como é o processo de aquisição de novos conhecimentos pelos aprendizes.

A THA como uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa

Como uma das condições para ocorrência de uma aprendizagem significativa é que o material a ser aprendido seja potencialmente significativo, Moreira (2011) acrescenta que

> [...] o significado está nas pessoas, não nas coisas. Então, não há, por exemplo, livro significativo ou aula significativa; no entanto, livros, aulas, materiais instrucionais de um modo geral, podem ser potencialmente significativos e para isso devem ter significado lógico (ter estrutura, organização, exemplos, linguagem adequada, enfim, serem aprendíveis) e os sujeitos devem ter conhecimentos prévios adequados para dar significado aos conhecimentos veiculados por esses materiais. (MOREIRA, 2011, p. 10)

Neste momento, nos dedicaremos a fazer aproximações entre uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS) e a trajetória hipotética de aprendizagem (THA). As UEPS são sequências de ensino fundamentadas na teoria da aprendizagem significativa (TAS), portanto, é importante que a THA proposta, em que os levantamentos de hipóteses sobre as aprendizagens dos estudantes se alicerçam na TAS, possuam características de uma UEPS.

Moreira (2011) apresenta alguns aspectos sequenciais (passos), ou seja, procedimentos que devem ser adotados ao se construir uma UEPS, que entendemos se organizarem como segue:

> 1. Definição do tópico específico a ser abordado;
> 2. Criação/proposição de situações que levem o estudante a externar seus conhecimentos prévios relevantes para a aprendizagem significativa;
> 3. Proposição de situações-problema, em nível introdutório;
> 4. Apresentação do conhecimento a ser ensinado/aprendido;
> 5. Retomada de aspectos gerais e estruturantes;
> 6. Proposição de situação problema, em nível mais alto de complexidade;
> 7. Discussão do tema ensinado considerando a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa;
> 8. Avaliação da aprendizagem da UEPS (avaliação somativa individual);
> 9. Avaliação da UEPS. (Adaptação de MOREIRA, 2011, p. 3-4)

Sendo assim, a THA proposta neste material buscou estruturar-se de forma a atender estes nove aspectos sequenciais. Na Figura 2, é possível observar que, ao definir um tema de ensino específico, podemos ver a estrutura de uma unidade de ensino potencialmente significativa, ou seja, nos atentamos aos seus momentos de desenvolvimento, aos recursos instrucionais utilizados e as estratégias pedagógicas que a integram.

Figura 2 - Modelo de unidade de ensino potencialmente significativa

Fonte: BRUM; DA SILVA, 2015, p. 7.

No primeiro momento prevalece a definição do tópico específico a ser abordado e proposição de situações que façam os alunos revelarem seus conhecimentos prévios sobre o tópico de estudo.

No segundo momento, considerando a diferenciação progressiva e reconciliação integradora, o tema é apresentado desde um nível mais introdutório até alcançar um nível mais alto de complexidade.

O terceiro momento compreende a avaliação das aprendizagens dos estudantes, considerando buscar evidências de aprendizagens significativas seja por atividades individuais, como por meio de atividades coletivas, privilegiando questões abertas para que os estudantes possam mostrar suas compreensões acerca do tema discutido.

Finalizando com o quarto momento, que se respalda na avaliação por parte do professor e alunos da unidade de ensino, dos recursos e estratégias adotadas ao longo da unidade de ensino. “A unidade de ensino não é uma metodologia estanque, engessada, mas passível de reformulações e compete ao professor mudar, quando necessário, na apresentação de um tema em sala de aula.” (BRUM; DA SILVA, 2015, p. 7-8).

Proposta de THA para o ensino de funções

A trajetória hipotética de aprendizagem aqui proposta, considera os momentos de uma UEPS (coluna 1) durante seu processo de planejamento e realização, assim como destaca quais as finalidades das atividades na perspectiva da THA (coluna 2). A **Tabela 1** abaixo complementa na coluna *Intervenção*, quantas mediações seriam necessárias que o professor disponibilizasse em seu planejamento para a realização da THA, sendo complementada pela coluna *Tempo*. Por fim, as colunas *Atividades* e *Objetivos* evidenciam o tema a ser discutido em aula e seus objetivos específicos.

Tabela 1 – Quadro de atividades e objetivos da THA proposta.

<table>
<tr><th>UEPS</th><th>THA</th><th>Intervenção</th><th>Atividade</th><th>Objetivos</th><th>Tempo</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1º Momento</td><td rowspan="4">Reconhecimento da estrutura cognitiva</td><td>1 e 2</td><td>1 – Equação 1º Grau</td><td rowspan="3">Realizar, discutir e identificar os conceitos subsunçores.</td><td>4 aulas</td></tr>
<tr><td>3 e 4</td><td>2 – Equação do 2º Grau</td><td>4 aulas</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3 – Plano Cartesiano</td><td>2 aulas</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4 – Ideia de Função</td><td>Realizar e discutir a tarefa, identificar subsunçores, propor situações-problema em nível introdutório e apresentar o tema de estudo.</td><td>2 aulas</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2º Momento</td><td>Introdução ao tema de ensino</td><td>7, 8, 9 e 10</td><td>Experimento 1 – Esticando a Mola</td><td>Introduzir o tema de estudo em um nível maior de complexidade, apresentar contexto e aplicação do tema Função polinomial de 1º grau.</td><td>8 aulas</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Processo de aprendizagens</td><td>11 e 12</td><td>5 – Relações de Proporcionalidade</td><td rowspan="2">Realizar e discutir a tarefa, perceber a qualidade das aprendizagens dos estudantes (diferenciação progressiva e reconciliação integradora)</td><td>4 aulas</td></tr>
<tr><td>13</td><td>6 – Gráficos de Funções</td><td>2 aulas</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Experimento 2 – Queda Livre</td><td>Discutir aspectos da Física, possibilitar contexto e aplicação para o tema Função polinomial de 2º grau.</td><td>3 aulas</td></tr>
<tr><td>3º Momento</td><td>Avaliação</td><td>15</td><td>Avaliação final</td><td>Avaliação das aprendizagens dos estudantes.</td><td>2 aulas</td></tr>
<tr><td>4º Momento</td><td colspan="5">Avaliação da Trajetória Hipotética de Aprendizagem / UEPS.</td></tr>
</table>

Fonte: Autores

Como parte integrante do primeiro momento da UEPS, a THA contará com quatro atividades matemáticas que objetivam mapear a estrutura cognitiva e os conhecimentos prévios dos estudantes. Sugerimos ao professor que oportunize agrupamentos de estudantes, preferencialmente de dois alunos, dependendo do seu contexto de atuação, para realização das atividades iniciais da THA.

A primeira atividade permite ao professor compreender se os estudantes reconhecem a ideia de equação; se representam situações-problema por meio de equações do 1º grau; e se resolvem equações do 1º grau. Assim, pode possibilitar ao docente verificar os conhecimentos prévios (subsunçores) considerados relevantes para ancorar as novas aprendizagens de função polinomial do 1º grau. Caso o professor perceba que os estudantes não possuem conceitos subsunçores que favoreçam a aprendizagem significativa do tema a ser ensinado, o docente pode desenvolver atividades que atuem como organizadores prévios.

As questões da Atividade 1 foram selecionadas considerando os níveis de pensamento e raciocínio lógico e procedimental associados às equações do 1º grau. As perguntas versam desde um nível elementar em que os símbolos representam as incógnitas, isto é, os valores desconhecidos, perpassam pela igualdade e equivalência com a proposta de uma questão que envolve uma balança de equilíbrio, finalizando com uma pergunta que pretende perceber se os estudantes realizam os procedimentos algébricos necessários para a resolução das equações.

A segunda atividade busca por subsunçores que sirvam de ancoradouro para as aprendizagens referentes à função polinomial de 2º grau, com a preocupação de diagnosticar se os alunos resolvem corretamente equações incompletas e completas do 2º grau.

Na Atividade 2 a preocupação com as questões selecionadas refere-se à compreensão dos estudantes no tocante às letras que representam as incógnitas, sendo propostas equações incompletas do 2ºgrau em que as incógnitas presentes não são expressas somente pela letra *x*. Buscam compreender os procedimentos algébricos adotados pelos estudantes para resolver equações completas e incompletas do 2º grau, inclusive se aplicam corretamente a Fórmula de Bhaskara em suas soluções.

Em seguida, a terceira atividade da THA possibilita ao professor verificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o plano cartesiano, investigando se os alunos localizam pontos no sistema de coordenadas cartesianas, reconhecem os eixos das abscissas e ordenadas e identificam corretamente pares ordenados de pontos no plano cartesiano.

As perguntas selecionadas para a Atividade 3 pretendem perceber se os estudantes reconhecem os eixos das abscissas e ordenadas corretamente, assim como se expressam assertivamente os valores dos pares ordenados de pontos dispostos no plano cartesiano em seus quatro quadrantes.

Por fim, a quarta atividade matemática explora dois aspectos: primeiramente o conhecimento prévio dos estudantes acerca do tema funções; e concomitantemente irá expor o tema de estudo em nível introdutório.

A observação da quarta atividade permite ao docente verificar se os estudantes conseguem analisar as situações apresentadas e compreendem que expressam ou não, funções; e se representam corretamente a lei de formação de funções a partir de situações-problema, assim como, simultaneamente, propõe uma introdução ao tema a ser ensinado em um nível mais elementar.

Para compor a Atividade 4 foram escolhidas questões com situações-problema próximas das vivências dos estudantes, que permitiriam aos mesmos responder utilizando o raciocínio lógico e matemático. No entanto são apresentados alguns conceitos específicos do ensino de funções nestas perguntas, como o termo *lei de formação*. Foram selecionadas ainda questões bem específicas sobre funções, expressas por meio de diagramas, com a finalidade de apresentar o tema de ensino em nível introdutório e que permitissem também discutir termos específicos utilizados no ensino de funções como, por exemplo: *"para que seja uma função de M em N"; "ilustra uma função de A em B?"*.

Ao término de cada atividade proposta até aqui, orientamos o professor a retomar nas aulas subsequentes à realização de cada uma das atividades, o assunto explorado. É possível utilizar uma estratégia expositivo-dialogada, discutindo os objetivos de cada tarefa matemática disponibilizada, bem como as estratégias que os estudantes poderiam ter adotado ou adotaram para encontrar a solução. Sugerimos que o docente apresente a resolução esperada para cada questão aos alunos e retire as dúvidas remanescentes dos temas.

No segundo momento da UEPS, já iniciado pela atividade quatro da THA, temos a proposta de utilização do primeiro experimento de Física, denominado ***Esticando a Mola***, em que consiste apresentar aos estudantes, por meio de outra área de conhecimento, um contexto para aquele tópico de estudo, em um nível de maior complexidade.

> O ensino da Matemática que viabiliza a contextualização pode retirar o aluno da passividade no processo educativo e levá-lo a descobrir a importância da sua formação para sua vida e para o mundo. [...] A saber, a contextualização dos conteúdos de ensino pode provocar aprendizagens significantes e mobilizar o aluno a estabelecer relações de reciprocidade entre ele e o conhecimento em construção. (ALVES, TATSCH, 2017, p. 90)

O roteiro experimental que poderá ser utilizado, apresenta um nível crescente de complexidade, em que os estudantes podem captar os significados, pois estarão em permanente interação com seus colegas e professor. Após a realização da atividade experimental pelos estudantes, sugerimos uma discussão coletiva mediada pelo docente, utilizando a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora para orientar os diálogos.

Sugerimos que o professor possibilite agrupamentos de até cinco estudantes para a realização da atividade experimental, que na proposta apresentada neste material, poderá tomar um conjunto de até oito aulas entre a coleta de dados, resolução das propostas do roteiro experimental e discussão do mesmo. Ressaltamos a importância do professor em destacar os conceitos de funções polinomiais do 1º grau explorados na atividade, contextualizados e aplicados à outra área do conhecimento, neste caso, a Física.

Após a discussão da atividade experimental, propomos ao professor que realize um conjunto de aulas que considere adequadas ao tema, sugerimos que envolva: o conceito de função; lei de formação; as relações de proporcionalidade direta e inversa e a não proporcionalidade; o zero das funções polinomiais de 1º e 2º graus; comportamento e construção de gráficos de funções polinomiais do 1º e 2º graus; vértice da parábola; discriminante (Δ) e coeficientes ***a***, ***b*** e ***c*** da função polinomial de 2º grau e suas implicações nos gráficos.

Privilegiando ainda este segundo momento da UEPS, a THA apresenta a quinta atividade que discute o tema de ensino grandezas direta e inversamente proporcionais e a sexta atividade que aborda os gráficos de funções polinomiais do 1º e 2º graus. O professor pode recorrer, como proposto anteriormente, a agrupamentos preferencialmente de dois estudantes para realização das tarefas.

As questões selecionadas na Atividade 5 buscam compreender se os alunos preenchem e reconhecem tabelas com relações de proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade e a lei de formação associada a cada uma. Permite ao professor aferir se os estudantes reconhecem situações e identificam corretamente a proporcionalidade direta envolvida em situações-problema expostas, assim como se apresentam o valor da constante de proporcionalidade.

Na Atividade 6 as perguntas utilizam gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º graus, contextualizadas a algumas situações-problema, com objetivos de extrair conceitos já estudados. Assim, essa atividade exige que o estudante mobilize conhecimentos já discutidos como proporcionalidade direta e inversa, lei de formação e constante de proporcionalidade. As questões procuram perceber se os alunos compreendem a correspondência entre os valores das tabelas e gráficos correlacionados, e também possibilitam uma discussão dos zeros da função polinomial de 2º grau e vértice da parábola, contextualizados em outra situação-problema.

Sugerimos ao professor que após a aplicação das atividades 5 e 6, faça discussões dos objetivos e das questões propostas, esclarecendo dúvidas e articulando, sempre que possível, com as aulas já ministradas sobre o tema, e até mesmo com a primeira atividade experimental, em uma perspectiva expositivo-dialogada com os alunos, recorrendo à diferenciação progressiva e reconciliação integradora, se necessário.

Recomendamos que após essas discussões seja proposto o segundo experimento de Física, intitulado **Queda Livre**, que pode permitir ao professor junto aos alunos: discutir aspectos de natureza da ciência sobre a experimentação, reconhecer seus conhecimentos prévios sobre o experimento de queda livre e os conceitos físicos envolvidos como gravidade e força e discutir o "comportamento" gráfico de um movimento de queda livre e o significado do parâmetro ***a*** da função polinomial de 2º grau associada ao movimento.

Na proposta de THA deste material, propomos uma discussão do movimento de queda livre por meio de um *software* chamado *Tracker*[24], em que é possível fazer um tratamento de dados experimentais, com filmagem e análise em vídeo do movimento de queda livre. Sugerimos que complemente a discussão com vídeos disponíveis na *Internet*, que abordam a queda dos corpos em condições com e sem a presença de ar, discorrendo sobre os temas, esclarecendo dúvidas e apontamentos pertinentes dos estudantes. Ressaltamos a importância deste momento para contextualizar (movimento de queda livre) e mostrar uma aplicabilidade (determinação da gravidade local) da função polinomial de 2ºgrau, novamente advindo da área da Física.

O terceiro momento da UEPS, destinado à avaliação formativa (durante o percurso realizado pelos estudantes, sobre o tópico estudado) e avaliação somativa individual (previamente avisada aos estudantes, individual e que permite ao estudante expor sua compreensão e organização hierárquica do assunto estudado) na THA, é o momento em que propomos ao professor que faça a avaliação dos conhecimentos dos estudantes por meio da aplicação da última atividade da THA designada avaliação final.

Na avaliação final, os estudantes são organizados a critério do professor, aconselhamos que sejam avaliados individualmente e que a decisão de utilização ou não de registros para consulta dos alunos, seja facultativa ao docente. Busca-se, nesta etapa, identificar se os estudantes

[24] *Tracker* é um *software* gratuito de vídeo-análise e modelagem utilizado no ensino de Física, criado em parceria com a *Open Source Physics.*

demostram clareza ou não dos tópicos de ensino discutidos durante toda a trajetória desenvolvida, bem como as compreensões e fragilidades remanescentes dos temas ensinados.

As questões selecionadas para esta tarefa possuem perguntas dissertativas e objetivas que contemplam os tópicos de ensino sobre funções polinomiais de 1º e 2º graus e seus gráficos. Foram escolhidas questões que: buscam reconhecimento, por parte dos estudantes, das leis de formação da função e constante de proporcionalidade; possibilitam o preenchimento de uma tabela de valores e construção de gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º graus; extraia informações e compreenda os significados presentes em gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º graus.

Assim sendo, conjuntamente com o quarto momento da UEPS, encerra-se o ciclo de ensino de Matemática da THA aqui proposta, em que sugerimos ao professor que juntamente com seus estudantes faça a correção da avaliação final. É possível que ao término de toda THA o professor possa fazer uma reflexão da trajetória de ensino aqui exposta, analisando quais poderiam ser as alterações possíveis e necessárias para que a THA recomendada neste material possa ter seu potencial de ensino elevado, e também se é possível verificar evidências de aprendizagens significativas nos estudantes beneficiados por tal proposição.

Ao lidar com o ciclo de ensino de Matemática, o professor poderá perceber elementos que potencialmente podem provocar modificação de sua prática, permitindo reflexões sobre as aprendizagens que pretendiam e que foram possíveis promover e como avançar nestas análises sobre o processo de ensino e aprendizagem de funções polinomiais de 1º e 2º graus. Poderá também compreender possibilidades de modificação da THA apresentada neste produto, seja na forma ou conteúdo, e assim, conquistará importante elemento para sua autonomia docente, refletindo sobre sua prática.

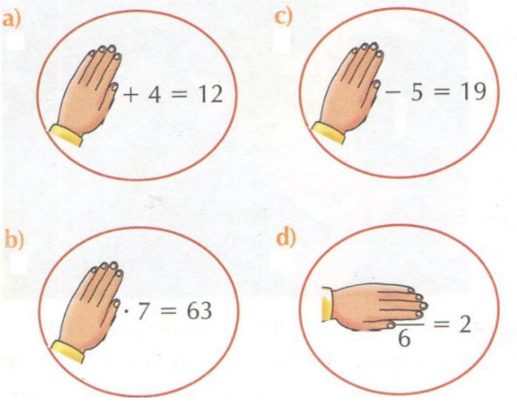
Atividades da THA

ATIVIDADE 1 – EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Objetivo Específico: Representar situações por meio de equações de 1º grau; compreender a ideia de equação; resolver equações do 1º grau.

QUESTÃO 1

Descubra os números "escondidos" pelas mãos.



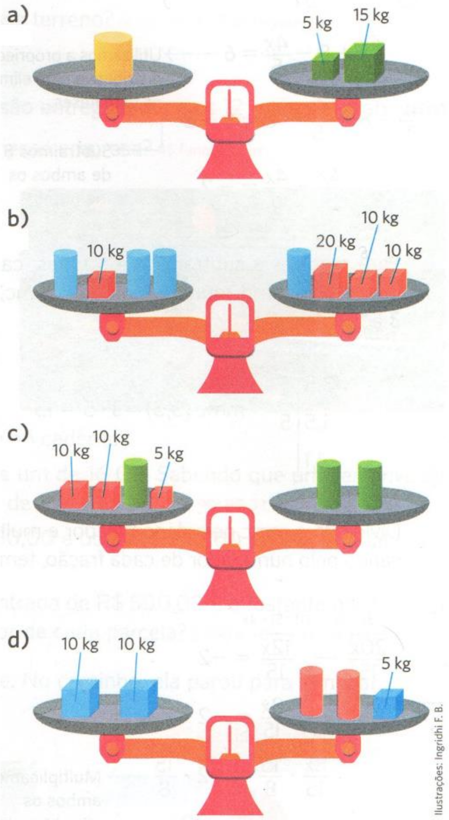
QUESTÃO 2

(CPII-RJ) Observe as expressões abaixo:

Quanto vale cada um dos desenhos dessas somas?

QUESTÃO 3

As balanças a seguir estão em equilíbrio. Determine a massa do cilindro de cada item escrevendo e resolvendo no caderno uma equação na qual *x* represente a massa de cada cilindro.



QUESTÃO 4

Resolva as equações.

a) $x + 2 = 10$

b) $x - 6 = -8$

c) $3x - 21 = 0$

d) $6 + x = 6{,}4$

e) $0{,}5x - 9 = 1{,}5$

f) $4x + 3 = -19$

g) $5x + 2 = 2x - 1$

h) $6 - 3x = -10 - 4x$

i) $2(3x - 5) = 14$

j) $\dfrac{2x - 1}{5} = 3$

ATIVIDADE 2 – EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Objetivo Específico: Resolver equações incompletas do 2º grau; Utilizar a fórmula de Bhaskara na resolução de equações completas do 2º grau.

QUESTÃO 1

Encontre os valores reais de *z* tais que:

a) $z^2 - 7z = 0$

b) $2z^2 - 16z = 0$

c) $5z^2 + 20z = 0$

d) $-2z^2 - 42z = 0$

QUESTÃO 2

Encontre os valores reais de *x* tais que:

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $x^2 + 13x = 0$

c) $6x^2 - 54x = 0$

d) $8x^2 + 8x = 0$

QUESTÃO 3

Resolva estas equações ($y \in \mathbb{R}$):

a) $y^2 - 121 = 0$

b) $2y^2 - 98 = 0$

c) $2y^2 = -8$

d) $4y^2 + 100 = 0$

QUESTÃO 4

Resolva mentalmente ou usando a fórmula de Bhaskara:

a) $x^2 - 20x + 75 = 0$

b) $x^2 - 2x + 2 = 0$

c) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

d) $x^2 - 15x + 26 = 0$

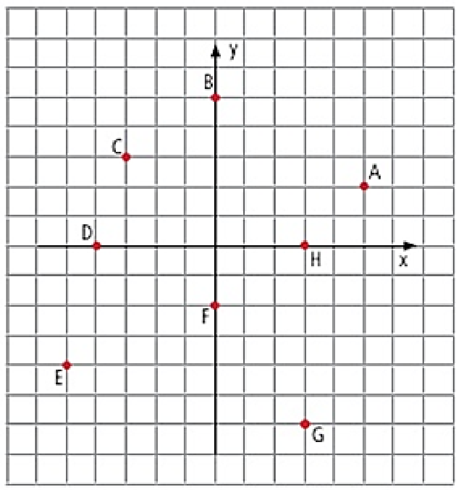
e) $x^2 + 8x - 33 = 0$

ATIVIDADE 3 – PLANO CARTESIANO

Objetivo Específico: Localizar pontos no plano cartesiano; Identificar corretamente os pares ordenados de pontos no plano cartesiano;

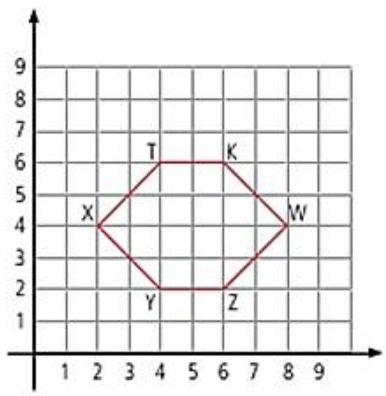
QUESTÃO 1

Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano.



QUESTÃO 2

O hexágono representado no plano cartesiano possui seus vértices denominados por: X, Y, Z, W, K e T.

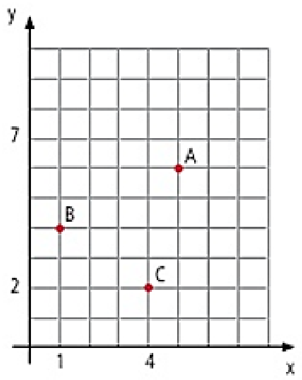


Quais são as coordenadas do vértice W desse hexágono?

a) (8, 4)
b) (3, 2)
c) (6, 0)
d) (0, 4)

QUESTÃO 3

(Prova Brasil) Observe a figura:

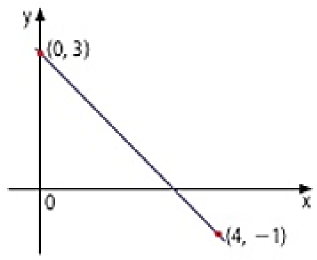


As coordenadas de A, B e C, respectivamente, no gráfico?

a) (1, 4), (5, 6) e (4, 2)
b) (4, 1), (6, 5) e (2, 4)
c) (5, 6), (1, 4) e (4, 2)
d) (6, 5), (4, 1) e (2, 4)

QUESTÃO 4

Observe o gráfico abaixo:



As coordenadas do ponto que intercepta o eixo das ordenadas é:

a) (4, −1)
b) (0, 4)
c) (0, 3)
d) (3, 4)

ATIVIDADE 4 – IDEIA DE FUNÇÃO, LEI DE FORMAÇÃO DA FUNÇÃO, VARIÁVEIS

Objetivo Específico: Analisar as situações apresentadas e verificar se expressam funções; Representar a lei de formação de funções;

QUESTÃO 1

Alessandra, técnica em informática, presta serviço para uma empresa. Ela recebe R$ 50,00 por hora trabalhada.

A tabela abaixo expressa o valor que Alessandra receberá em função da quantidade de horas trabalhadas.

Quantidade de horas trabalhadas	1	2	3	4
Valor recebido (em R$)	50	100		

a) Calcule quanto Alessandra receberá se trabalhar 14 horas para essa empresa.
b) Calcule a quantidade de horas que ela trabalhou se recebeu da empresa R$ 1.500,00.
c) Podemos dizer que o ganho de Alessandra é função do número de horas trabalhadas?
d) Escreva a lei dessa função.

QUESTÃO 2

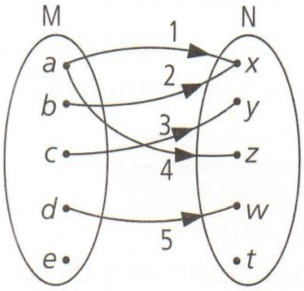
Renato comprou uma impressora a jato de tinta para imprimir panfletos de propaganda. Veja, na tabela a seguir, o número de panfletos que esse equipamento imprime de acordo com o tempo.

Intervalo de tempo (em minuto)	Número de panfletos impressos
2	36
4	72
6	108
8	144
10	180

a) Quantos panfletos o equipamento de Renato imprime por minuto?
b) O número de panfletos impressos (*n*) é função do tempo (*t*) em minutos?
c) Escreva uma lei que relacione *n* com *t*.
d) Em meia hora, quantos panfletos são impressos?

QUESTÃO 3

Considere o diagrama abaixo:



Para que seja uma função de M em N, basta:

a) apagar a seta **1** e retirar o elemento *t*.

b) apagar as setas **1** e **4** e retirar o elemento *e*.

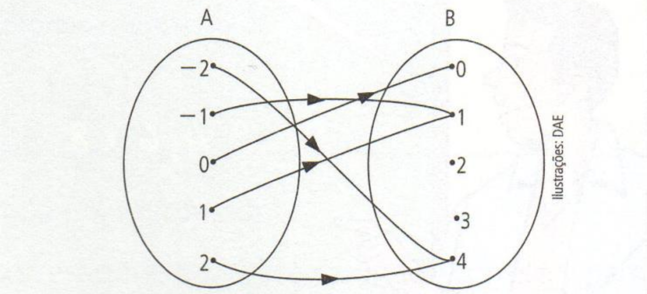
c) retirar os elementos *e* e *t*.

d) apagar a seta **4** e retirar o elemento *e*.

e) apagar a seta **2** e retirar o elemento *e*.

QUESTÃO 4

Observe o diagrama e responda às questões no caderno.



a) A todo número *x* tomado em A corresponde um único número *y* em B?

b) Esse diagrama ilustra uma função de A em B?

c) Escreva a expressão algébrica que liga as variáveis *x* e *y*.

d) Escreva os pares ordenados (*x*; *y*) dessa função.

ATIVIDADE EXPERIMENTAL 1 – ESTICANDO A MOLA

Objetivo Específico: Estabelecer critérios coletivamente, para compreender a ideia de proporcionalidade; utilizar diferentes estratégias para explorar as relações entre grandezas; calcular a constante de proporcionalidade K (constante elástica da mola); relacionar o comportamento gráfico (reta) a uma situação de relação de proporcionalidade direta entre grandezas; compreender as variáveis e os erros experimentais como integrantes do processo de construção do conhecimento científico;

INTRODUÇÃO[25]

O que é uma mola?

Uma mola é um objeto que pode ser deformado por uma força e que volta a sua forma original quando essa força é removida.

Existem molas de todos os tipos, mas provavelmente a mais familiar é a mola de metal helicoidal. Molas são partes essenciais de quase todos dispositivos mecânicos moderadamente complexos; da caneta esferográfica aos motores de carros de corrida.

Ao estudar molas e elasticidade, o físico do século XVII Robert Hooke, notou que a curva de tensão *vs* deformação para muitos materiais tinha uma região de comportamento. A partir de agora vocês farão alguns procedimentos e responderá algumas questões para discussão deste comportamento de uma mola. *(Professor, selecionamos alguns vídeos[26] auxiliares que discutem a Lei de Hooke, caso considere necessário retomar ou aprofundar alguns conhecimentos).*

MATERIAIS

- Suporte;
- Régua;
- Mola metálica;
- Arruelas;
- Calculadora.

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Inicie separando as arruelas por tamanho e preencha as colunas da tabela de massas. (Dica: para encontrar o valor da massa em quilogramas, divida o valor medido em gramas, por 1000).

---

[25] Fonte: <https://pt.khanacademy.org/science/physics/work-and-energy/hookes-law/a/what-is-hookes-law> Acesso: 12 set. 2018.

[26] DICA PARA OS PROFESSORES: <https://www.youtube.com/watch?v=ZuHrXwbqTcw>; <https://www.youtube.com/watch?v=5fG8GE_PmfQ>; <https://www.youtube.com/watch?v=5pb08NokxGM>; <https://www.youtube.com/watch?v=YgpyJe8NUZs>; Acesso em: 27 jul. 2021

TABELA DE MASSAS		
	Gramas (g)	Quilogramas (Kg)
ARRUELA **GG**		
ARRUELA **G**		
ARRUELA **M**		
ARRUELA **P**		

Agora, monte o suporte e pendure a régua e a mola do seu kit experimental, como na ilustração. *(Professor, aqui demonstramos uma possibilidade de kit experimental que pode ser utilizado nesta atividade experimental. Você possui liberdade para realizar a montagem experimental utilizando os recursos disponíveis).*

Vamos preencher a tabela de distensões da mola. Primeiramente, meça a distensão da mola sem massa (x_0) e coloque na tabela abaixo.

TABELA DE DISTENSÕES DA MOLA METÁLICA			
	Centímetro (cm)	Metros (m)	Notação Científica / Potência de Base 10 (10^{-2})
x_0			
x_1			
x_2			
x_3			
x_4			
x_5			

Em seguida, coloque a arruela GG e anote o novo valor de distensão da mola (x_1) na tabela. Coloque a arruela G e anote novamente o valor distendido pela mola metálica (x_2). Repita esse procedimento com todas as arruelas. (Dica: para encontrar o valor da distensão da mola em metros, divida o valor medido em centímetros, por 100).

QUESTÕES

1. O grupo percebeu uma relação de dependência entre os valores da massa e da distensão da mola? Se sim, qual?
2. Se há uma relação de dependência entre os valores de massa e distensões da mola, essa relação o grupo considera direta ou inversamente proporcional?
3. Preencha a tabela abaixo e encontre o par ordenado, distensão da mola (x_0, x_1, x_2, ...) e força elástica ($m_0 \cdot g$, $m_1 \cdot g$, $m_2 \cdot g$, ...). Use $g \cong 9{,}8 m/s^2$

	Distensões da mola (x) (em metros)	Força Elástica (y) (em Newton)	Par Ordenado (x , y) (em notação científica)
MEDIDA 0 (SEM MASSA)			
MEDIDA 1 (Massa 1)			
MEDIDA 2 (Massas 1 e 2)			
MEDIDA 3 (Massas 1, 2 e 3)			
MEDIDA 4 (Massas 1, 2, 3 e 4)			

4. Construam um plano cartesiano, com os eixos das abscissas e ordenadas, localize os pontos da tabela do item anterior, e responda:

   a. É possível traçar uma reta por todos os pontos neste gráfico?

   b. A reta seria a melhor representação funcional destes pontos? Por quê?

5. Utilizando a expressão $K_n = \dfrac{m_n \cdot g}{x_n}$, calcule o valor da constante elástica da mola metálica de seu grupo e discuta os resultados com seus colegas e professor.
6. Deixem suas impressões sobre a atividade proposta, dificuldades, elogios e críticas são bem vindos.

ATIVIDADE 6 – RELAÇÕES DE PROPORCIONALIDADE DIRETA E INVERSA

Objetivo Específico: Compreender a ideia de proporcionalidade; expressar situações e problemas em linguagem algébrica; aplicar as noções de proporcionalidade em diferentes contextos.

QUESTÃO 1

Discuta com seus colegas a seguinte situação: Paulo foi à feira e encontrou ofertas de maçãs:

Em sua opinião, a oferta das 10 maçãs é vantajosa para Paulo? Justifique sua resposta.

QUESTÃO 2

A tabela a seguir indica como varia a grandeza **y** em função da grandeza **x**. Analise-a e, levando em conta os valores apresentados, diga se as grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais, ou se não são nem direta nem inversamente proporcionais. Em cada caso, escreva a expressão algébrica que relaciona **x** e **y**.

a)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	10	20	30	40	50	60	70

b)

x	1	2	3	4	5	6	10
y	48	24	16	12	9,6	8	4,8

c)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15

d)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	8	18	32	50	72	98

QUESTÃO 3

Refaça a tabela apresentada na atividade 2, item **c** da seção Você aprendeu?, e verifique se há proporcionalidade entre **x** e **y – 1**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15
y – 1							

QUESTÃO 4

Faça a mesma análise com o item d da atividade 2 apresentado na seção Você aprendeu?, verificando se há proporcionalidade entre os valores de **y** e os de **x²**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
x^2							
y	2	8	18	32	50	72	98

QUESTÃO 5

Em cada um dos casos apresentados a seguir, verifique se há ou não proporcionalidade direta entre as medidas das grandezas correspondentes. Se houver, expresse tal fato algebricamente, indicando o valor da constante de proporcionalidade, quando possível.

a) A massa **m** de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade **t**?

b) Quando compramos **x** metros de determinado fio, o preço **p** a pagar é diretamente proporcional a **x**?

c) O preço a ser pago por uma fotocópia é diretamente proporcional ao número de cópias?

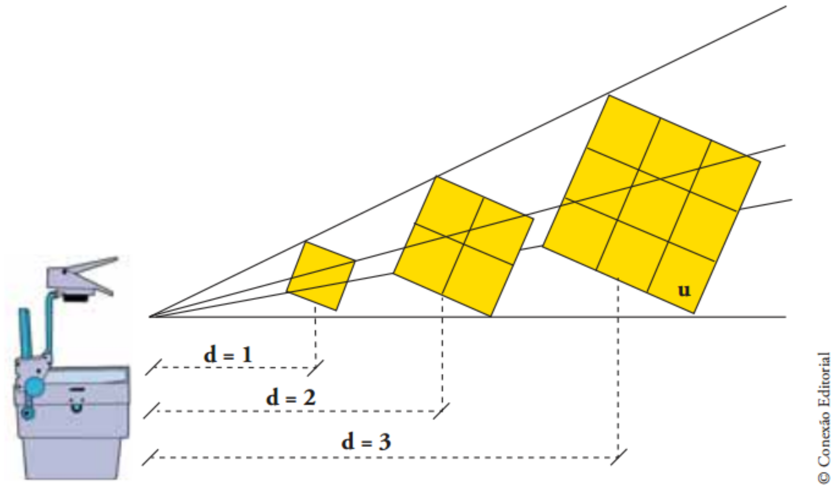
QUESTÃO 6

Para produzir **x** unidades de um produto **A**, o custo total **C** é composto por uma parcela fixa de mil reais e uma parcela variável, que é diretamente proporcional a **x**. O custo total da produção de **x** produtos é, então, C = 1000 + kx, sendo **C** em reais. A constante **k** representa o aumento no custo total **C** quando a quantidade produzida aumenta uma unidade. Dado que, para produzir 100 unidades do produto **A**, o custo total é igual a R$ 1500,00, responda às seguintes questões:

a) Qual é o valor de **k** na expressão C = 1000 + kx?

QUESTÃO 7

A área **A** de uma imagem projetada é dada em função da distância **d** entre o projetor e a tela.



a) Observe a figura e complete a tabela a seguir, que relaciona a área **A** da imagem com a distância **d** do projetor:

Distância (d)	1	2	3	4	5	6	7
Área (A) (u)	1						

b) Qual das expressões a seguir representa a relação entre **A** e **d**?

$A = 2d$ ( ) $A = d + 4$ ( ) $A = d^2$ ( ) $A = d + 1$ ( )

ATIVIDADE 6 – GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Objetivo Específico: Compreender situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade; expressar graficamente situações de interdependência entre grandezas.

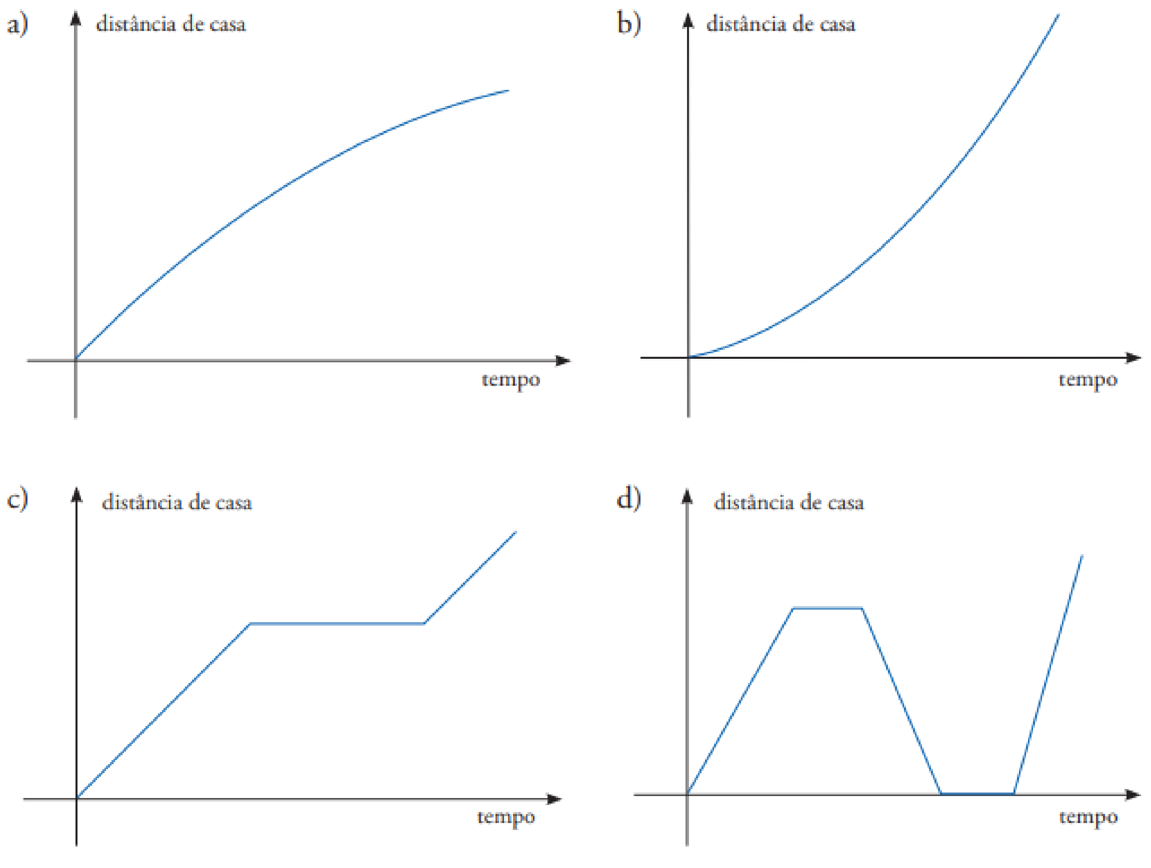
QUESTÃO 1

Considere as grandezas "distância de casa" e "tempo decorrido" nas situações a seguir e indique o gráfico que melhor corresponde a cada uma.

I. Paulo saiu de sua casa de automóvel para ir ao trabalho, mas o pneu furou. Depois de trocá-lo, ele continuou o trajeto. Gráfico ________________________

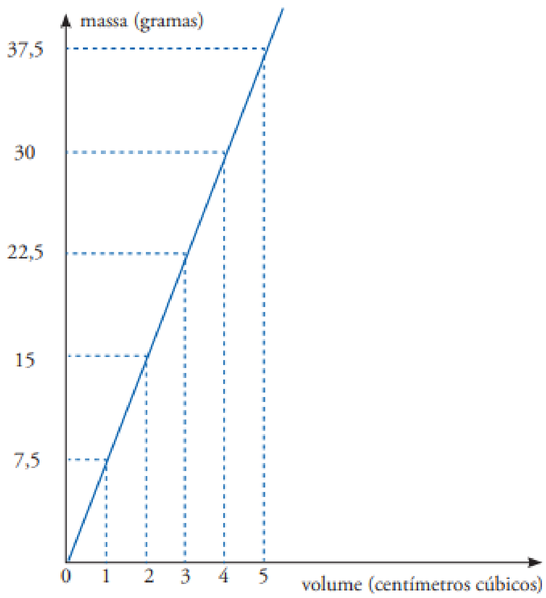
II. Ana saiu de casa para ir ao banco, mas precisou retornar para pegar sua bolsa. Em seguida, ela foi ao banco. Gráfico ___________________

III. Pedro saiu de casa devagar, mas aumentou cada vez mais sua velocidade para chegar mais rápido ao seu destino. Gráfico _______________________



QUESTÃO 2

Mediram-se as massas de pequenas amostras de ferro de diversos volumes. A unidade de medida de massa foi o grama (g) e a de volume foi expressa em centímetros cúbicos (cm^3). Com os dados encontrados, construiu-se o gráfico a seguir:



a) Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é 4 cm^3?

b) Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15 g de massa?

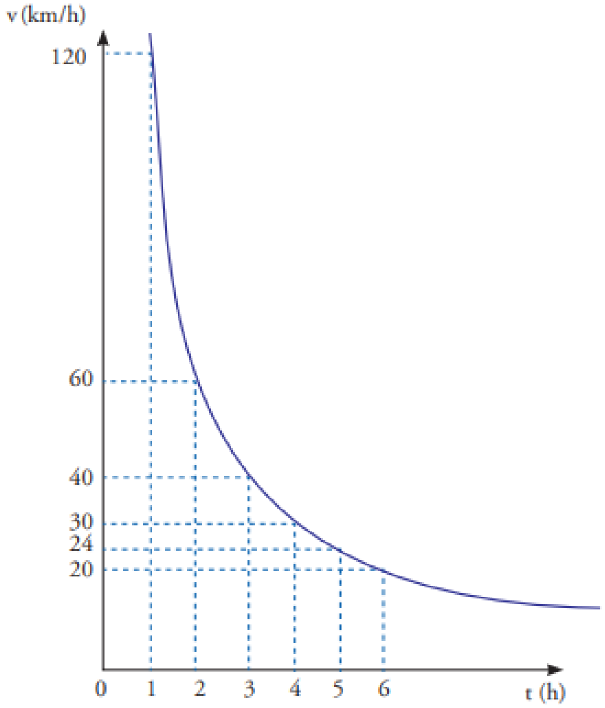
c) Explique por que as grandezas volume e massa de amostras de ferro representadas no gráfico são grandezas diretamente proporcionais.

d) Qual é a constante de proporcionalidade?

e) Escreva a relação entre a massa, **m**, e o volume, **V**, por meio de uma expressão.

QUESTÃO 3

O gráfico a seguir indica a velocidade que um automóvel precisa alcançar em função do tempo para percorrer uma distância de 120 km.



a) Com base no gráfico, complete a tabela a seguir:

t (h)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
v (km/h)	120		60						

b) Explique por que as grandezas "velocidade" e "tempo" representadas no gráfico são inversamente proporcionais.

____

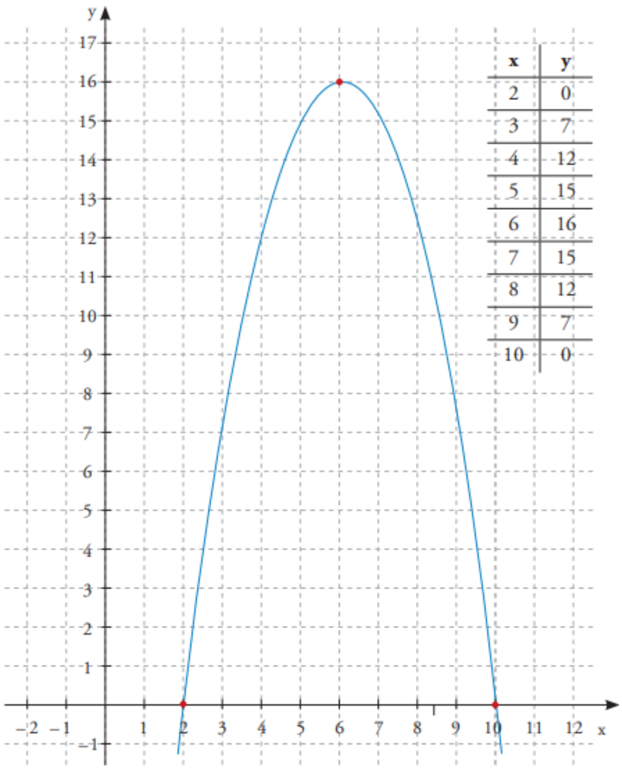
____

____

c) Escreva a sentença que relaciona **v** e **t**.

QUESTÃO 4

Um grupo de alunos da 8ª série/9º ano formou uma banda e precisa determinar o preço **x**, em reais, do ingresso para um *show* de apresentação. Eles imaginaram que, se o valor do ingresso for muito alto, não conseguirão vendê-lo e, se for muito baixo, não obterão lucro, que seria investido na banda. Com base nos valores cobrados por outras bandas, os alunos concluíram que o lucro **L** de cada espetáculo, em reais, poderia ser dado pela expressão $L = -x^2 + 12x - 20$. (**Observação**: $L > 0$ significa lucro e $L < 0$, prejuízo).



x	y
2	0
3	7
4	12
5	15
6	16
7	15
8	12
9	7
10	0

Observe o gráfico e a tabela e, em seguida, responda:

a) Qual será o lucro caso eles decidam cobrar 4 reais por ingresso?

b) Se o preço do ingresso for superior a 6 reais, podemos afirmar que o grupo terá prejuízo? Justifique.

c) Para que intervalo de valores de **x** o lucro aumenta? E para qual ele diminui?

d) Qual é o valor do ingresso para que o grupo obtenha o maior lucro possível? Qual é o valor do lucro máximo?

e) O que acontece quando o valor dos ingressos é inferior a 2 reais ou superior a 10 reais?

f) O que ocorre com o lucro quando os ingressos são vendidos a 3 reais ou a 9 reais?

ATIVIDADE EXPERIMENTAL 2 – QUEDA LIVRE

Objetivo específico: Discutir aspectos da natureza da ciência e da atividade experimental; estabelecer diálogos sobre conceitos físicos presentes no experimento de queda livre (gravidade, força peso) e sondagem dos conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema; apresentar as relações entre o comportamento gráfico do movimento de queda livre e a função quadrática; e contextualizar o tema função polinomial de 2º grau à outra área de conhecimento (Física).

A proposta desta atividade experimental recorre ao uso do *Software Tracker*, com vídeos amadores que reproduzem o experimento de queda livre, com o objetivo de subsidiar discussões que articulem os conceitos de funções polinomiais do 2º grau e seu gráfico, e a relação entre o parâmetro ***a*** da função quadrática com a aceleração da gravidade local.

É necessário que alunos e professor tenham acesso a equipamentos eletrônicos como computadores, smartphones, projetor e acesso à rede de internet.

Sugerimos que seja discutido com os estudantes aspectos da área da Física, no que se refere à natureza da ciência (NdC) e da atividade experimental (imprecisão e erros experimentais), a força peso e a aceleração da gravidade, e também a relação existente entre massa e gravidade.

Iniciaremos, disponibilizando o link[27] da plataforma de vídeos *Youtube*, que permite ao professor entender como poderá baixar e utilizar as ferramentas básicas do *Software Tracker* para as discussões que serão recomendadas nesta atividade. Se o docente julgar necessário, pode aprofundar os conhecimentos do programa *Tracker* com vídeos tutoriais mais específicos, na mesma plataforma de vídeos.

Para iniciar a aula com os estudantes, recomendamos que o professor disponibilize um tempo para fazer a gravação dos vídeos do movimento de queda livre com os alunos, preferencialmente em grupos pequenos, com os recursos disponíveis e sem oferecer detalhes do movimento que gravarão. É importante que o professor dê instruções de como devem gravar o vídeo, isto é, se possível um fundo neutro, um objeto que se destaca no vídeo, marcação aparente na gravação com uma medida conhecida. Após a realização desta etapa, é interessante que o docente colete os vídeos produzidos pelos estudantes em um pen drive, e selecione pelo menos um deles que possa assegurar uma boa discussão em aula com os estudantes.

---

[27] <https://www.youtube.com/watch?v=0XMyfrhAg3g>; <https://www.youtube.com/watch?v=A0HsElys-u8> – Acesso em: 07 set. 2020

De posse do vídeo selecionado, o qual permitirá discussão futura no programa *Tracker* com os estudantes sobre o experimento de queda livre realizado, o professor pode prosseguir com a aula fazendo uma pergunta geradora: *"– O que é o experimento de Queda Livre?"*. A partir das interações, sem apresentar a definição, é interessante o professor estimule a interação e privilegie o diálogo na explanação dos conhecimentos prévios dos estudantes. Finalizando esta etapa de discussão e diálogos, sugerimos que o professor, ainda sem apresentação da definição do movimento de queda livre, solicite a atenção dos alunos para exibir o primeiro vídeo da aula, na plataforma *Youtube*.

Aconselhamos iniciar a discussão do movimento de queda livre por meio de um vídeo da BBC TWO que mostra o experimento de Galileu sobre a queda dos corpos em situações com e sem a presença de ar, disponível no link[28]. O docente pode levantar as hipóteses dos alunos antecipando a percepção dos mesmos sobre o comportamento das penas e da bola de boliche nos dois momentos de análise das quedas (com e sem a presença de ar), podendo fazer pausas no vídeo em momentos que julgar oportunos e promover discussões que forem válidas.

Figura 1 - Vídeo sobre o experimento de Queda Livre de Galileu

Fonte: Arquivo do autor.

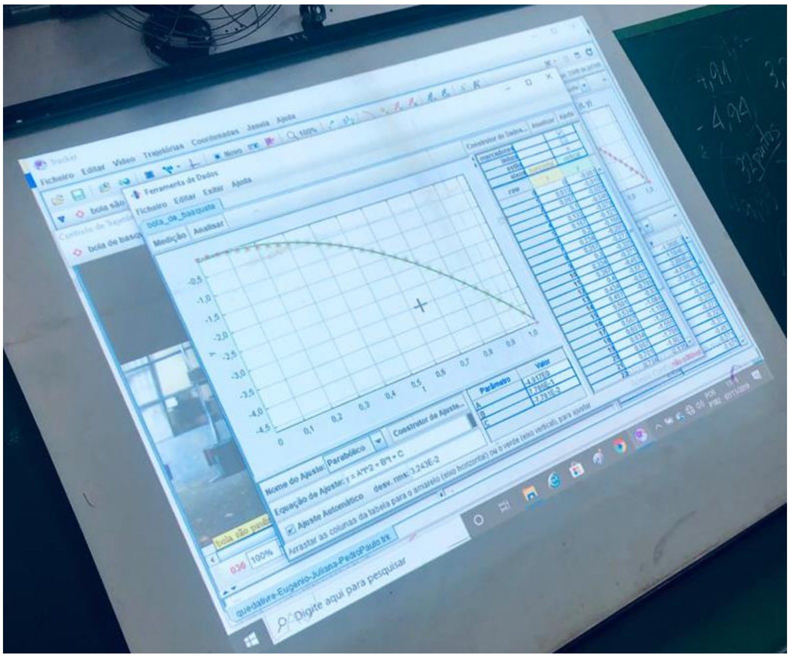
Após a exibição completa do vídeo, o docente pode definir em conjunto com os alunos o entendimento do que é um movimento de queda livre permitindo debates remanescentes, se necessário. As hipóteses levantadas pelos estudantes sobre o comportamento dos corpos em queda, podem permitir ricas discussões sobre conceitos físicos decorrente das interações promovidas.

[28] <https://www.youtube.com/watch?v=qSeW0f51QzY> – Acesso em: 07 set. 2020.

Encerrando estes debates e dando prosseguimento ao planejamento, o professor pode, então, abrir o programa *Tracker* e importar o vídeo que foi selecionado previamente e será o responsável em subsidiar uma discussão com elementos das funções quadráticas. Neste momento é importante priorizar o comportamento gráfico (parábola) dos pontos observados no movimento de queda livre, e sugerimos que seja feito o ajuste de uma curva do tipo parábola ao gráfico que o programa constrói.

Se possível, o professor pode evidenciar aos estudantes que o valor do parâmetro ***a*** desta parábola se aproxima da metade do valor da gravidade local. Caso o número deste parâmetro não se aproxime da metade do valor da gravidade local, o professor tem a oportunidade de iniciar uma discussão de natureza da ciência e da natureza da atividade experimental, expondo os possíveis fatores que influenciaram para que este número não correspondesse ao esperado.

Figura 2 - Discussão do comportamento dos pontos experimentais no movimento de Queda Livre



Fonte: Arquivo do autor.

Se for do interesse do docente ele encerrar a aula discutindo os diferentes valores de gravidade no Sistema Solar, sua relação com a massa dos astros, e de forma sucinta, se interessar ao docente, a influência da gravidade na órbita dos astros. Há um vídeo no link (https://www.youtube.com/watch?v=cuSkhtzhwYY – Acesso em: 07 set. 2020) disponível na plataforma *Youtube*, em que um conjunto de cientistas faz simulações da gravidade local em diversas situações, sendo possível utilizar trechos para ilustrar aos estudantes essas variações no valor da gravidade.

Figura 3 - Vídeo sugerido pelo aluno do Grupo A que simula diversas gravidades

Fonte: Arquivo do autor.

AVALIAÇÃO FINAL – FUNÇÕES DE 1º E 2º GRAUS

Objetivos específicos: Expressar situações e problemas em linguagem algébrica; expressar graficamente situações de interdependência entre grandezas; expressar proporcionalidade direta e inversa como função; identificar gráficos que representam proporcionalidade direta entre grandezas ou com o quadrado de outra.

QUESTÃO 1

Os professores de uma academia recebem a quantia de 15 reais por aula, mais uma quantia fixa de 200 reais como abono mensal. Então a quantia y que o professor recebe por mês é dada em função do número x de aulas que ele dá durante esse mês. Qual é a lei de formação da função que relaciona essas duas grandezas?

QUESTÃO 2

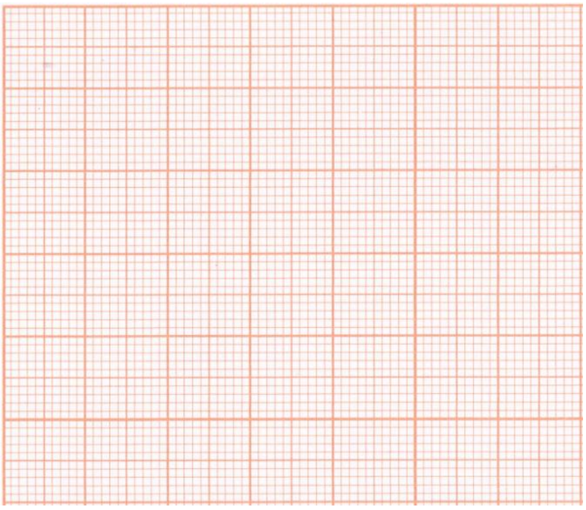
Um motorista, saindo de um ponto A, viaja por uma estrada e verifica que a distância percorrida, desde o ponto inicial, pode ser calculada por $y = 51x + 17$, em que y é dado em quilômetros, e x é dado em horas. Nessas condições, determine as distâncias percorridas, de hora em hora, desde $x = 1$ até $x = 4$.

QUESTÃO 3

Construa o gráfico da função polinomial do 1º grau, preenchendo convenientemente a tabela de valores dos pares ordenados, indique se ela é **crescente** ou **decrescente** e qual é o ponto correspondente ao **zero da função**.

a. $y = x + 1$

x	$y = x + 1$	y	(x, y)



QUESTÃO 4

Num movimento, o espaço percorrido é diretamente proporcional ao tempo, mantendo-se constante a velocidade. O professor Demóstenes deslocou-se no seu automóvel durante 4 horas, a uma velocidade média de 90 km/h. A função que representa corretamente a relação de proporcionalidade direta é

(A) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço}}{\text{Tempo}}$

(B) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço} + \text{Tempo}}{\text{Tempo}}$

(C) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço} - \text{Tempo}}{\text{Tempo}}$

(D) "Velocidade média = $\text{Espaço} \cdot \text{Tempo}$

(E) "Velocidade média = $\frac{\text{Tempo}}{\text{Espaço}}$

QUESTÃO 5

O comprimento **C** de uma circunferência é uma função do diâmetro **d**; no caso, **C** é diretamente proporcional a **d**, e temos **C = f(d) =** $\pi \cdot$ **d** . Então a constante de proporcionalidade (k) é:

(A) $k = 2d$

(B) $k = \pi$

(C) $k = \frac{2}{\pi}$

(D) $k = 2\pi$

(E) $k = \frac{\pi}{2}$

QUESTÃO 6

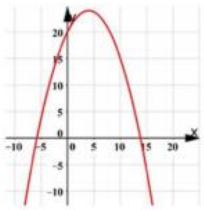
Construa o gráfico da função polinomial do 2º grau, preenchendo convenientemente a tabela de valores dos pares ordenados, calcule o **vértice da parábola** e quais são os pontos correspondentes ao **zeros da função**.

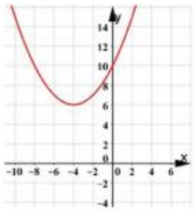
a. $y = x^2 + 6x + 5$

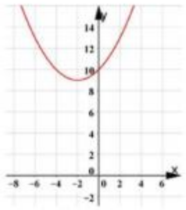
x	$y = x^2 + 6x + 5$	y	(x, y)

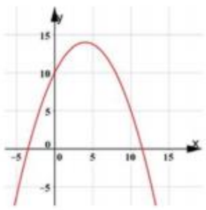
QUESTÃO 7

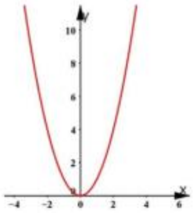
Dada a função: $\mathbf{y = 0{,}25x^2 + 2x + 10}$.
O gráfico que representa corretamente a proporcionalidade direta entre as duas grandezas é:

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


Avaliando o desenvolvimento da THA

A análise da THA realizada no âmbito desta pesquisa, que resultou na proposta revisada da trajetória hipotética de aprendizagem aqui exposta, possibilitou algumas reflexões que podem vir a ser pertinentes ao professor que, por ventura, venha utilizá-la como recurso didático para ensinar funções polinomiais de 1º e 2º graus.

A possibilidade de articulação entre áreas distintas do conhecimento (Matemática e Física); a eventual parceria com professores com outras formações e que atuam em áreas diferentes da Matemática; a apresentação da aplicabilidade e de um contexto para conhecimentos específicos da Matemática; e o uso de experimentos no ensino da Matemática são algumas alternativas possíveis para os professores, com a prática de ensino aqui proposta.

Um dos resultados que vale a pena ser destacado é o fato de que em diversos momentos os estudantes puderam estabelecer conexões entre seus conhecimentos prévios (subsunçores) e a nova informação apresentada. As quatro primeiras atividades, assim como o primeiro experimento proposto permitiram, em maior profundidade, que os alunos pudessem discutir novamente conceitos estudados em bimestres anteriores com seus colegas e com o professor, este último oportunamente mediava os conhecimentos explorados nas aulas dedicadas aos debates e esclarecimentos do que havia sido proposto e do que era esperado como resolução para cada situação.

Ao desenvolver a trajetória percebemos a importância em pautar o ensino de novos conhecimentos nos conceitos subsunçores dos alunos, previamente averiguados em suas estruturas cognitivas. Identificamos muitos indícios de aprendizagens significativas com as análises das respostas dos alunos nas atividades propostas no decorrer da THA.

Ao proporcionar aos estudantes uma relação entre as ideias-âncoras e as já assimiladas na estrutura cognitiva, mesmo após o surgimento de novos significados, percebemos que muitas vezes um conhecimento já sabido estava mais elaborado e sofisticado evidenciando o que Moreira (2001) destaca que Ausubel classificou como assimilação obliteradora.

Os experimentos de Física puderam ser compreendidos como recursos positivos no que se refere a contextualização de temas da Matemática e permitiram uma aproximação entre áreas de conhecimentos distintas. Estimularam a curiosidade dos estudantes, assim como discutiu-se aplicações daquele conhecimento em situações separadas das situações-problema convencionais, aplicação de algoritmos e fórmulas matemáticas.

Conceitos das ciências naturais como força, gravidade, aceleração, deformação e massa estiveram articulados à ideia de grandezas direta e inversamente proporcionais e função permitindo que os estudantes pudessem aprender significativamente os novos conhecimentos e possibilitando discussões acerca da Natureza da Ciência (NdC) como os erros experimentais, aproximação, arredondamento e incerteza. Permitiu apresentar um contexto de aplicação do conhecimento estudado e, com isso, o professor pode agregar ou reconhecer novos valores a esse aprendizado.

Os experimentos dispuseram de elementos para diálogos em sala que permitiram modificar, enriquecer e reelaborar os conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva, possibilitando a aquisição de novos significados. Os aprendizes indicaram o que para Moreira (2001) Ausubel chama de Princípio da Assimilação, que significa que a relação entre as ideias-âncora e as assimiladas permanecem na estrutura cognitiva, ou seja, é o subsunçor modificado.

Os alunos apresentaram, em sua maioria, uma disposição para aprender satisfatória durante toda a realização da THA, desenvolveram as atividades nos tempos estimados pelo docente e nas ocasiões em que apresentaram maior dificuldade de compreensão dos processos experimentais ou até mesmo do que era solicitado nas atividades, novamente o papel fundamental do professor em mediar as situações foram importantes.

A THA permite que o professor reflita sobre como os estudantes incorporam o novo conhecimento em sua estrutura cognitiva em suas melhores suposições de como a aprendizagem de determinado tema da Matemática ocorre. Possibilita constantes mudanças nos conhecimentos do professor, lhe permitindo que altere, se necessário, a THA inicialmente idealizada. Este Ciclo de Ensino de Matemática proposto por Simon (1993) garante uma autonomia ao professor que diante de sua realidade, recursos didáticos e público-alvo, faça as adaptações necessárias em seu planejamento de ensino.

Um outro aspecto relevante durante esta proposta de THA, é a importância da interação social entre os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Ela permite que o professor se certifique de que os significados captados pelos estudantes são os compartilhados socialmente para os signos em questão e possibilita que intervenha a fim de alcançar os objetivos previamente estabelecidos.

Associação correta entre as atividades experimentais e a representação gráfica de cada situação, compreensão do conceito lei de formação de uma função e da relação existente entre tabelas e gráficos são indicadores possíveis de se alcançar com esta proposta de trajetória. Vemos como um caminho metodológico possível para o professor discutir ideias e conceitos associados à funções polinomiais de 1º e 2º graus, sem definir sistematicamente tais conhecimentos, a priori.

Considerando que muitas vezes o trabalho docente se mostra solitário, esta proposta permite que professores de Matemática e Ciências ou Física desenvolvam uma parceria e de maneira interdisciplinar discutam temas que julgam importantes e pertinentes as duas áreas de conhecimento. Assim, o trabalho na disciplina ganha parceria, permitindo que o objeto de conhecimento seja ressignificado para docentes e seus estudantes.

Não se espera que esta proposta seja compreendida como a única possibilidade possível para uma articulação positiva entre as áreas da Física e da Matemática para ensinar funções polinomiais. Destacamos o papel fundamental e necessário do professor em compreender os principais conceitos e abordagens aqui expostos e caso seja necessário e viável, possa propor uma THA com alterações nas atividades para melhor atendimento de seus estudantes, assim como mudanças na abordagens experimentais, utilizando um simulador ou adaptando o experimento, com o objetivo estruturante de ensinar funções polinomiais de 1º e 2º graus, seja para estudantes do Ensino Fundamental – Anos Finais ou alunos do Ensino Médio.

Considerações Finais

Caro leitor, buscamos apresentar os pressupostos teóricos que subsidiaram a proposição do nosso Produto Educacional, sugerindo um percurso de aprendizagem para ensinar funções polinomiais de 1º e 2º graus, preferencialmente para estudantes do ensino fundamental, utilizando experimentos de Física.

Ressaltamos que, de acordo com Simon (1993) a Trajetória Hipotética de Aprendizagem permite uma autonomia para que o professor possa planejar e desenvolver sua proposta de ensino de um tema da área da Matemática, em suas melhores suposições de como ocorre as aprendizagens em seus estudantes. O Ciclo de Ensino de Matemática favorece a atuação docente amparada na filosofia da práxis, pois permite uma reflexão sobre sua atuação e sobre as estratégias de ensino adotadas, permite um espaço de avaliação da aprendizagem dos estudantes e da própria THA, em que é possível fazer alterações ao longo da trajetória, por não se tratar de um planejamento rígido e estanque, com a capacidade de poder causar alterações no conhecimento do professor.

Segundo Moreira (2011), a Teoria da Aprendizagem Significativa oportunizou ponderações sobre como acontece as aprendizagens nos estudantes, contribuindo para construção da THA. Considera que uma das condições necessárias para ocorrência de aprendizagem significativa é dispor de um material instrucional potencialmente significativo, nos permitindo fazer uma aproximação entre uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa e a THA.

Um aspecto igualmente relevante para a ocorrência de uma aprendizagem significativa é o conhecimento prévio dos aprendizes. Conhecimento prévio, na perspectiva da TAS, é o conhecimento que o estudante possui e é relevante para servir de ancoradouro para a nova informação a ser ensinada. Ainda que possa ser confundida com pré-requisito, estes conhecimentos prévios são as informações que se relacionam de maneira não arbitrária e não literal com a nova informação a ser ensinada. Caso seja identificado que os estudantes não possuem tais conhecimentos, Ausubel sugere que seja utilizado Organizadores Prévios, que são materiais introdutórios, apresentados antes do próprio material a ser aprendido, porém, em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade.

Objetivamos disponibilizar uma sequência de ensino fundamentada na THA, TAS e UEPS, que articula conhecimentos da área da Física, para favorecer as aprendizagens de funções polinomiais de 1º e 2º graus. Recomendamos o uso de dois experimentos que possibilitam discussões benéficas e fluidez entre os temas em estudo e destacamos a necessidade do professor em avaliar o seu contexto de aplicação e recursos que dispõe para que faça, se necessário, possíveis adaptações na proposta, por exemplo: substituir a mola metálica por elásticos; permitir aos estudantes que façam as aferições das massas que utilizarão no experimento; utilize uma tabela com valores (espaço e tempo) já disponíveis para as discussões do movimento de queda livre, se não dispor de equipamentos tecnológicos.

Destacamos com esta proposta a importância do conhecimento do professor de Matemática, no que se refere ao conhecimento específico da disciplina, e como as modificações deste conhecimento matemático decorrentes da reflexão da THA realizada podem enriquecer o olhar dos professores sobre as aprendizagens matemáticas dos estudantes sobre o tema de ensino escolhido.

Esta proposta de ensino nos permitiu um diagnóstico constante, tanto no que se refere a aprendizagem dos alunos, quanto as possibilidades de interdisciplinaridade com outros docentes. Obtivemos uma colaboração construtiva da escola, professores e alunos envolvidos na pesquisa, de forma que foi possível desenvolver a THA sem ocorrências que prejudicassem sua execução.

As salas de aula foram adaptadas para realização das atividades experimentais e os alunos foram direcionados para a sala de multimídia da escola nas discussões que necessitavam de projeção, e apesar de um dos grupos analisados por esta pesquisa ter demonstrado maior dificuldade em algumas propostas da THA, é possível que tenha sido o grupo com maior ganho em aprendizagem significativa.

Esta proposta de ensino de funções de 1º e 2º graus favorece uma interlocução com outras disciplinas que compõem o currículo escolar, possibilita um trabalho interdisciplinar de qualidade em que os docentes de cada área, em conjunto, discutem o planejamento e realização da THA e modificam de acordo com as análises e reflexões que a sua realização permite.

Ensejamos que os professores que acessem esse material, possam compreender as concepções teóricas e a potencial prático de desenvolver a trajetória hipotética de aprendizagem sugerida, percebam a riqueza em ofertar aos estudantes aplicações e contextos significativos de temas da área da Matemática, assim como o papel engrandecedor da experimentação na aquisição de aprendizagens significativas.

Referências

ALVES, M. A.; TATSCH, K. J. S. Epistemologia, história e ensino da matemática: reflexões sobre formação e aprendizagem significativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 8, n. 3, p. 78-93, 2017.

ANDRINI, A.; VASCONCELOS. M. J. **Praticando a Matemática, 8.** Editora do Brasil. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ANDRINI, A.; VASCONCELOS. M. J. **Praticando a Matemática, 9.** Editora do Brasil. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ANDRINI, A.; VASCONCELOS. M. J. **Unidade 3: Sistema Cartesiano, Sugestões de atividades, Praticando a Matemática, 9.** Editora do Brasil. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil. Disponível em: <http://editoradobrasil.com.br/praticandomatematica/pdf/exercicios-complementares/9ano/PMR9_Sug_atividades_unid_3.pdf>. Acesso em: 08 set. 2020.

ARARIBÁ, Projeto. **Matemática.** Editora Moderna. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Trad. Eva Nick e outros. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BRUM, W. P.; DA SILVA, S. D. C. R. Análise de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa no ensino de Matemática durante a apresentação do tema números reais. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 6, n. 3, p. 1-22, 2015.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática: teoria e contexto, 9ºAno.** Editora Saraiva. São Paulo: Saraiva, 2012.

CHAVANTE, E. R. **Convergência: matemática, 8º ano: anos finais: ensino fundamental.** Edições SM. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2015.

CONTRERAS, J. **A autonomia de professores.** São Paulo, Cortez, 2002.

MOREIRA, M.A. **Aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

______. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Editora Universidade de Brasília, 2006.

______. **Aprendizagem significativa:** a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

______. **Potentially meaningful teaching units-PMTU**. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2011.

OLIVEIRA, J. C. R.; FRIAS, R. T.; OMODEI, L. B. C. Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de função afim em um curso de formação continuada. 2014. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2014, Campo Mourão – PR. **Anais eletrônicos XII EPREM**. Paraná: UNESPAR, 2014. Disponível em: <http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/index.htm>. Acesso em: 19 abr. 2019.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Gestão da Educação Básica. **Avaliação da Aprendizagem em Processo - Prova do Aluno – 2ºBim/2017.** 16ªEdição. São Paulo: SEE, 2017.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Caderno do aluno: matemática, Ensino Fundamental Anos Finais – 8ªSérie/9ºAno, volume 1**. São Paulo: SEE, 2014.

SIMON, M. A. *Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.* ***National Science Foundation***, Washington, DC, 1993. 56p. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED364406.pdf>. Acesso em: 04 set. 2020.

SOARES, J. R.; JÚNIOR, J. N. A. P. Filosofia, Práxis e Educação. 2012. In: Fórum Internacional de Pedagogia, 2012, Parnaíba – PI. **Anais eletrônicos IV FIPED**. Piauí: Realize editora, 2012. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/78b9cab19959e4af8ff46156ee460c74.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2020.

VÁZQUEZ, A. S. **Filosofia da Práxis.** São Paulo: Expressão Popular, 2011.

APÊNDICE B – Atividades da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA)

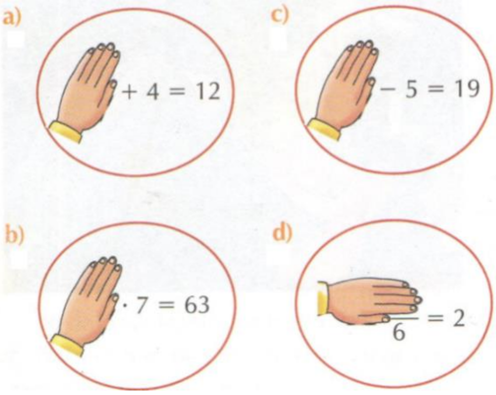
NOMES: ____ GRUPO _____ 9º Ano ______

ATIVIDADE – EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Objetivo Específico: Representar situações por meio de equações de 1º grau; compreender a ideia de equação; resolver equações do 1º grau.

QUESTÃO 1

Descubra os números "escondidos" pelas mãos.



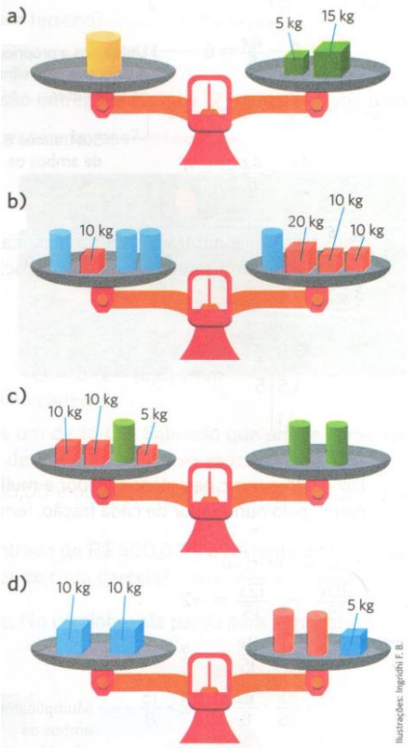
QUESTÃO 2

(CPII-RJ) Observe as expressões abaixo:

Quanto vale cada um dos desenhos dessas somas?

QUESTÃO 3

As balanças a seguir estão em equilíbrio. Determine a massa do cilindro de cada item escrevendo e resolvendo no caderno uma equação na qual x represente a massa de cada cilindro.



QUESTÃO 4

Resolva as equações.

a) $x + 2 = 10$

b) $x - 6 = -8$

c) $3x - 21 = 0$

d) $6 + x = 6{,}4$

e) $0{,}5x - 9 = 1{,}5$

f) $4x + 3 = -19$

g) $5x + 2 = 2x - 1$

h) $6 - 3x = -10 - 4x$

i) $2(3x - 5) = 14$

j) $\dfrac{2x - 1}{5} = 3$

NOMES: ____ **GRUPO** _____ **9º Ano** ______

ATIVIDADE – EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Objetivo Específico: Resolver equações incompletas do 2º grau; Utilizar a fórmula de Bhaskara na resolução de equações completas do 2º grau.

QUESTÃO 1

Encontre os valores reais de *z* tais que:

a) $z^2 - 7z = 0$

b) $2z^2 - 16z = 0$

c) $5z^2 + 20z = 0$

d) $-2z^2 - 42z = 0$

QUESTÃO 2

Encontre os valores reais de *x* tais que:

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $x^2 + 13x = 0$

c) $6x^2 - 54x = 0$

d) $8x^2 + 8x = 0$

QUESTÃO 3

Resolva estas equações ($y \in \mathbb{R}$):

a) $y^2 - 121 = 0$

b) $2y^2 - 98 = 0$

c) $2y^2 = -8$

d) $4y^2 + 100 = 0$

QUESTÃO 4

Resolva mentalmente ou usando a fórmula de Bhaskara:

a) $x^2 - 20x + 75 = 0$

b) $x^2 - 2x + 2 = 0$

c) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

d) $x^2 - 15x + 26 = 0$

e) $x^2 + 8x - 33 = 0$

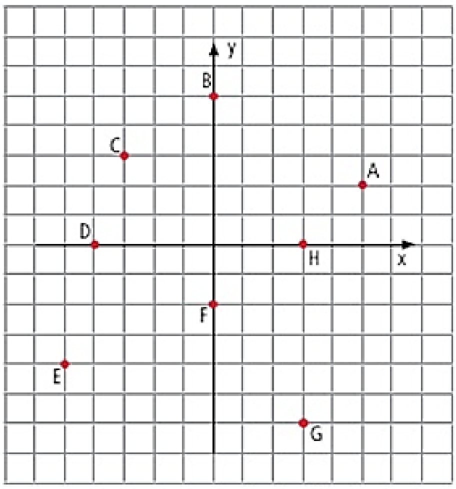
NOMES: ____ **GRUPO** _____ **9º Ano** ______

ATIVIDADE – PLANO CARTESIANO

Objetivo Específico: Localizar pontos no plano cartesiano; Identificar corretamente os pares ordenados de pontos no plano cartesiano;

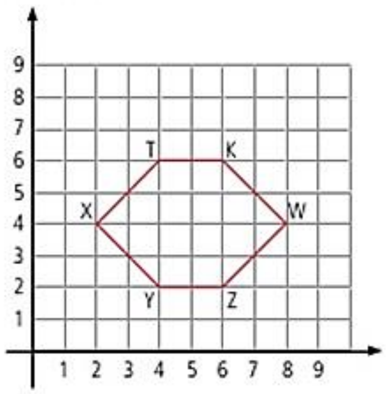
QUESTÃO 1

Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano.



QUESTÃO 2

O hexágono representado no plano cartesiano possui seus vértices denominados por: X, Y, Z, W, K e T.

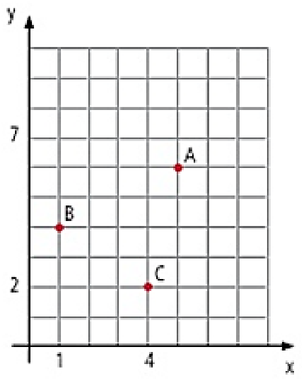


Quais são as coordenadas do vértice W desse hexágono?

a) (8, 4)
b) (3, 2)
c) (6, 0)
d) (0, 4)

QUESTÃO 3

(Prova Brasil) Observe a figura:

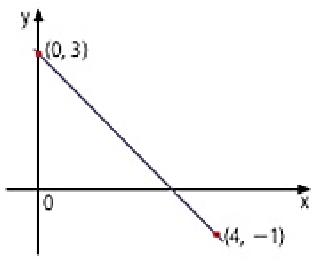


As coordenadas de A, B e C, respectivamente, no gráfico?

a) (1, 4), (5, 6) e (4, 2)
b) (4, 1), (6, 5) e (2, 4)
c) (5, 6), (1, 4) e (4, 2)
d) (6, 5), (4, 1) e (2, 4)

QUESTÃO 4

Observe o gráfico abaixo:



As coordenadas do ponto que intercepta o eixo das ordenadas é:

a) (4, −1)
b) (0, 4)
c) (0, 3)
d) (3, 4)

NOMES: ____ **GRUPO** _____ **9º Ano** ______

ATIVIDADE – IDEIA DE FUNÇÃO, LEI DE FORMAÇÃO DA FUNÇÃO, VARIÁVEIS

Objetivo Específico: Analisar as situações apresentadas e verificar se expressam funções; Representar a lei de formação de funções;

QUESTÃO 1

Alessandra, técnica em informática, presta serviço para uma empresa. Ela recebe R$ 50,00 por hora trabalhada.

A tabela abaixo expressa o valor que Alessandra receberá em função da quantidade de horas trabalhadas.

Quantidade de horas trabalhadas	1	2	3	4
Valor recebido (em R$)	50	100		

a) Calcule quanto Alessandra receberá se trabalhar 14 horas para essa empresa.

b) Calcule a quantidade de horas que ela trabalhou se recebeu da empresa R$ 1.500,00.

c) Podemos dizer que o ganho de Alessandra é função do número de horas trabalhadas?

d) Escreva a lei dessa função.

QUESTÃO 2

Renato comprou uma impressora a jato de tinta para imprimir panfletos de propaganda. Veja, na tabela a seguir, o número de panfletos que esse equipamento imprime de acordo com o tempo.

Intervalo de tempo (em minuto)	Número de panfletos impressos
2	36
4	72
6	108
8	144
10	180

a) Quantos panfletos o equipamento de Renato imprime por minuto?

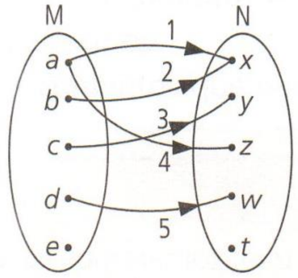
b) O número de panfletos impressos (*n*) é função do tempo (*t*) em minutos?

c) Escreva uma lei que relacione *n* com *t*.

d) Em meia hora, quantos panfletos são impressos?

QUESTÃO 3

Considere o diagrama abaixo:



Para que seja uma função de M em N, basta:

a) apagar a seta **1** e retirar o elemento *t*.

b) apagar as setas **1** e **4** e retirar o elemento *e*.

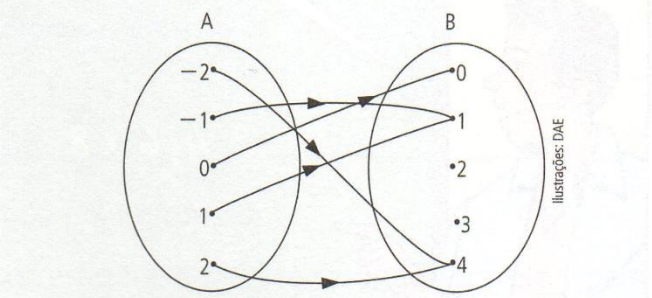
c) retirar os elementos *e* e *t*.

d) apagar a seta **4** e retirar o elemento *e*.

e) apagar a seta **2** e retirar o elemento *e*.

QUESTÃO 4

Observe o diagrama e responda às questões no caderno.



a) A todo número *x* tomado em A corresponde um único número *y* em B?

b) Esse diagrama ilustra uma função de A em B?

c) Escreva a expressão algébrica que liga as variáveis *x* e *y*.

d) Escreva os pares ordenados (*x*; *y*) dessa função.

NOMES: ____ GRUPO _____ 9º Ano ______

ATIVIDADE – EXPERIMENTO ESTICANDO A MOLA

Objetivo Específico: Estabelecer critérios coletivamente, para compreender a ideia de proporcionalidade; utilizar diferentes estratégias para explorar as relações entre grandezas; calcular a constante de proporcionalidade K (constante elástica da mola); relacionar o comportamento gráfico (reta) a uma situação de relação de proporcionalidade direta entre grandezas; compreender as variáveis e os erros experimentais como integrantes do processo de construção do conhecimento científico;

INTRODUÇÃO

O que é uma mola?

Uma mola é um objeto que pode ser deformado por uma força e que volta a sua forma original quando essa força é removida.

Existem molas de todos os tipos, mas provavelmente a mais familiar é a mola de metal helicoidal. Molas são partes essenciais de quase todos dispositivos mecânicos moderadamente complexos; da caneta esferográfica aos motores de carros de corrida.

Ao estudar molas e elasticidade, o físico do século 17 Robert Hooke notou que a curva de tensão *vs* deformação para muitos materiais tinha uma região de comportamento. A partir de agora vocês farão alguns procedimentos e responderá algumas questões para discussão deste comportamento de uma mola.

MATERIAIS

- Suporte;
- Régua;
- Mola metálica;
- Arruelas;
- Calculadora.

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Inicie separando as arruelas por tamanho e preencha as colunas da tabela de massas. (Dica: para encontrar o valor da massa em quilogramas, divida o valor medido em gramas, por 1000).

TABELA DE MASSAS		
	Gramas (g)	Quilogramas (Kg)
ARRUELA **GG**		
ARRUELA **G**		
ARRUELA **M**		
ARRUELA **P**		

Agora, monte o suporte e pendure a régua e a mola do seu kit experimental, como na ilustração.

Vamos preencher a tabela de distensões da mola. Primeiramente, meça a distensão da mola sem massa (x_0) e coloque na tabela abaixo.

TABELA DE DISTENSÕES DA MOLA METÁLICA			
	Centímetro (cm)	Metros (m)	Notação Científica (10^{-2})
x_0			
x_1			
x_2			
x_3			
x_4			
x_5			

Em seguida, coloque a arruela GG e anote o novo valor de distensão da mola (x_1) na tabela. Coloque a arruela G e anote novamente o valor distendido pela mola metálica (x_2). Repita esse procedimento com todas as arruelas. (Dica: para encontrar o valor da distensão da mola em metros, divida o valor medido em centímetros, por 100).

QUESTÕES

1. O grupo percebeu uma relação de dependência entre os valores da massa e da distensão da mola? Se sim, qual?

2. Se há uma relação de dependência entre os valores de massa e distensões da mola, essa relação o grupo considera direta ou inversamente proporcional?

3. Preencha a tabela abaixo e encontre o par ordenado, distensão da mola (x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , ...) e força elástica ($m_0 \cdot g$, $m_1 \cdot g$, $m_2 \cdot g$, ...). Use $g \cong 9{,}8 m/s^2$

	Distensões da mola (x)(em metros)	Força Elástica (y) (em Newton)	Par Ordenado (x , y) (em notação científica)
MEDIDA 0 (SEM MASSA)			
MEDIDA 1 (Massa 1)			
MEDIDA 2 (Massas 1 e 2)			
MEDIDA 3 (Massas 1, 2 e 3)			
MEDIDA 4 (Massas 1, 2, 3 e 4)			

4. Construam um plano cartesiano, com os eixos das abscissas e ordenadas, localize os pontos da tabela do item anterior, e responda:

a. É possível traçar uma reta por todos os pontos neste gráfico?

b. A reta seria a melhor representação funcional destes pontos? Por quê?

5. Utilizando a expressão $K_n = \dfrac{m_n \cdot g}{x_n}$, calcule o valor da constante elástica da mola metálica de seu grupo e discuta os resultados com seus colegas e professor.

6. Deixem suas impressões sobre a atividade proposta, dificuldades, elogios e críticas são bem vindos.

NOMES: ____ GRUPO _____ 9º Ano ______

ATIVIDADE – RELAÇÕES DE PROPORCIONALIDADE DIRETA E INVERSA

Objetivo Específico: Compreender a ideia de proporcionalidade; expressar situações e problemas em linguagem algébrica; aplicar as noções de proporcionalidade em diferentes contextos.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 7
GRANDEZAS PROPORCIONAIS: ESTUDO FUNCIONAL, SIGNIFICADOS E CONTEXTOS

VOCÊ APRENDEU?

1. Discuta com seus colegas a seguinte situação: Paulo foi à feira e encontrou ofertas de maçãs:

Em sua opinião, a oferta das 10 maçãs é vantajosa para Paulo? Justifique sua resposta.

____

____

____

____

____

2. A tabela a seguir indica como varia a grandeza **y** em função da grandeza **x**. Analise-a e, levando em conta os valores apresentados, diga se as grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais, ou se não são nem direta nem inversamente proporcionais. Em cada caso, escreva a expressão algébrica que relaciona **x** e **y**.

a)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	10	20	30	40	50	60	70

b)

x	1	2	3	4	5	6	10
y	48	24	16	12	9,6	8	4,8

c)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15

d)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	8	18	32	50	72	98

LIÇÃO DE CASA

3. Refaça a tabela apresentada na atividade 2, item **c** da seção Você aprendeu?, e verifique se há proporcionalidade entre **x** e **y – 1**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15
y – 1							

4. Faça a mesma análise com o item d da atividade 2 apresentado na seção Você aprendeu?, verificando se há proporcionalidade entre os valores de **y** e os de **x²**. Justifique sua resposta.

x	1	2	3	4	5	6	7
x^2							
y	2	8	18	32	50	72	98

5. Em cada um dos casos apresentados a seguir, verifique se há ou não proporcionalidade direta entre as medidas das grandezas correspondentes. Se houver, expresse tal fato algebricamente, indicando o valor da constante de proporcionalidade, quando possível.

a) A massa **m** de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade **t**?

b) Quando compramos **x** metros de determinado fio, o preço **p** a pagar é diretamente proporcional a **x**?

c) O preço a ser pago por uma fotocópia é diretamente proporcional ao número de cópias?

VOCÊ APRENDEU?

6. Ao dirigir um automóvel, o motorista deve estar atento à distância percorrida pelo automóvel quando o freio é acionado. O código de segurança nas estradas sugere uma relação entre a distância de segurança, isto é, a distância percorrida pelo carro após acionado o sistema de freios e a velocidade do automóvel no instante da frenagem. A tabela a seguir mostra alguns valores encontrados em uma pista de testes:

Velocidade v (km/h)	0	10	20	30	40	50	100	120
Distância de segurança d (metros)	0	1	4	9	16	25	100	144

Observando a tabela, concluímos que $\mathbf{d = k \cdot v^2}$.

a) Qual é o valor da constante de proporcionalidade **k**?

b) O automóvel encontra um obstáculo a uma distância de 83 m. Qual deve ser, aproximadamente, sua velocidade máxima de modo que ele não atinja o obstáculo?

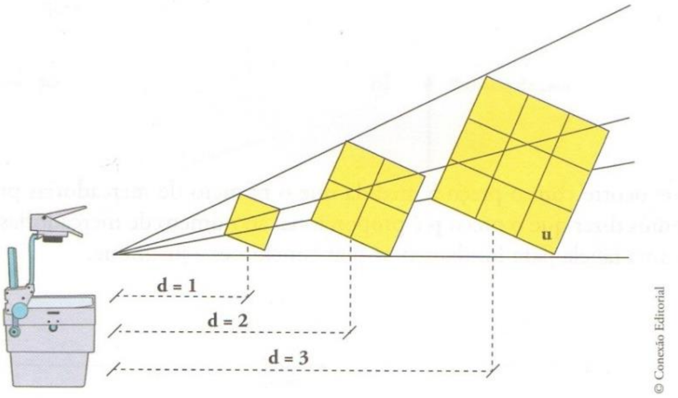
c) Qual é a distância de segurança quando a velocidade do automóvel for v = 80 km/h?

7. Para produzir **x** unidades de um produto **A**, o custo total **C** é composto por uma parcela fixa de mil reais e uma parcela variável, que é diretamente proporcional a **x**. O custo total da produção de **x** produtos é, então, C = 1 000 + kx, sendo **C** em reais. A constante **k** representa o aumento no custo total **C** quando a quantidade produzida aumenta uma unidade. Dado que, para produzir 100 unidades do produto **A**, o custo total é igual a R$ 1 500,00, responda às seguintes questões:

a) Qual é o valor de **k** na expressão C = 1 000 + kx?

VOCÊ APRENDEU?

10. A área **A** de uma imagem projetada é dada em função da distância **d** entre o projetor e a tela.



a) Observe a figura e complete a tabela a seguir, que relaciona a área **A** da imagem com a distância **d** do projetor:

Distância (d)	1	2	3	4	5	6	7
Área (A) (u)	1						

b) Qual das expressões a seguir representa a relação entre **A** e **d**?

A = 2d ( ) A = d + 4 ( ) $A = d^2$ ( ) A = d + 1 ( )

c) A área **A** da imagem é diretamente proporcional à distância **d** do projetor? Se sim, quanto vale a razão de proporcionalidade?

d) A área **A** da imagem é diretamente proporcional ao quadrado da distância **d** ao projetor? Se sim, quanto vale a razão de proporcionalidade?

NOMES: ____ **GRUPO** _____ **9º Ano** ______

ATIVIDADE – GRÁFICO DE FUNÇÕES

Objetivo Específico: Compreender situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade; expressar graficamente situações de interdependência entre grandezas.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 8
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE GRANDEZAS PROPORCIONAIS E DE ALGUMAS NÃO PROPORCIONAIS

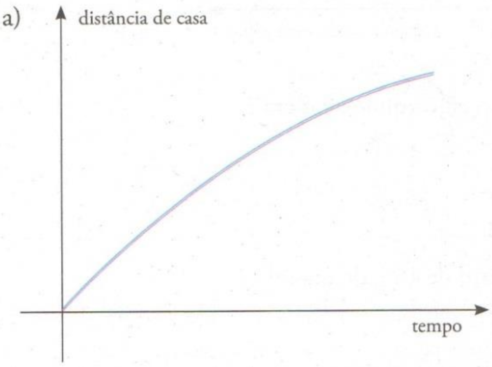
VOCÊ APRENDEU?

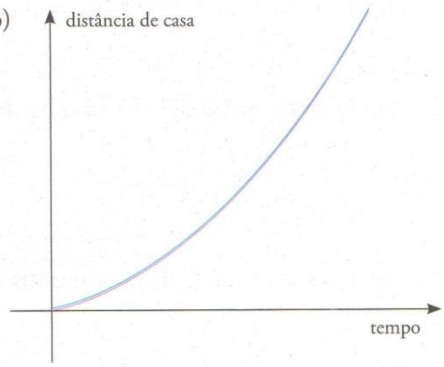
1. Considere as grandezas "distância de casa" e "tempo decorrido" nas situações a seguir e indique o gráfico que melhor corresponde a cada uma.

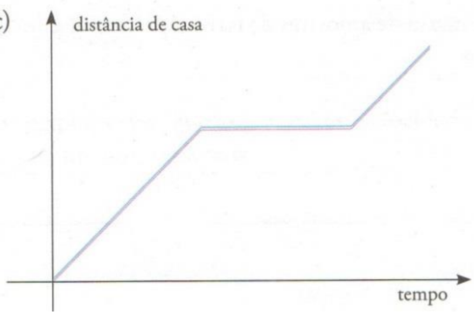
   I. Paulo saiu de sua casa de automóvel para ir ao trabalho, mas o pneu furou. Depois de trocá-lo, ele continuou o trajeto. Gráfico ______

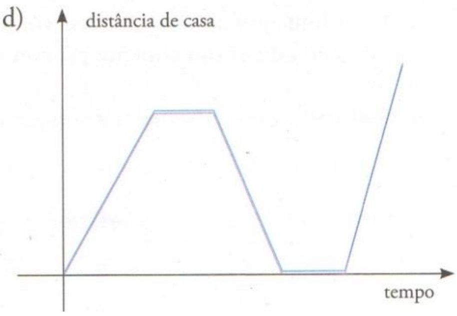
   II. Ana saiu de casa para ir ao banco, mas precisou retornar para pegar sua bolsa. Em seguida, ela foi ao banco. Gráfico ______

   III. Pedro saiu de casa devagar, mas aumentou cada vez mais sua velocidade para chegar mais rápido ao seu destino. Gráfico ______

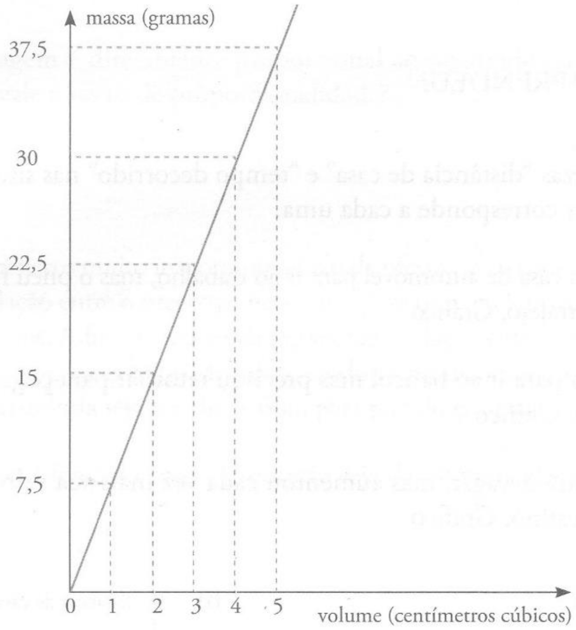
a)


b)


c)


d)


2. Mediram-se as massas de pequenas amostras de ferro de diversos volumes. A unidade de medida de massa foi o grama (g) e a de volume foi expressa em centímetros cúbicos (cm^3). Com os dados encontrados, construiu-se o gráfico a seguir:



a) Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é 4 cm^3?

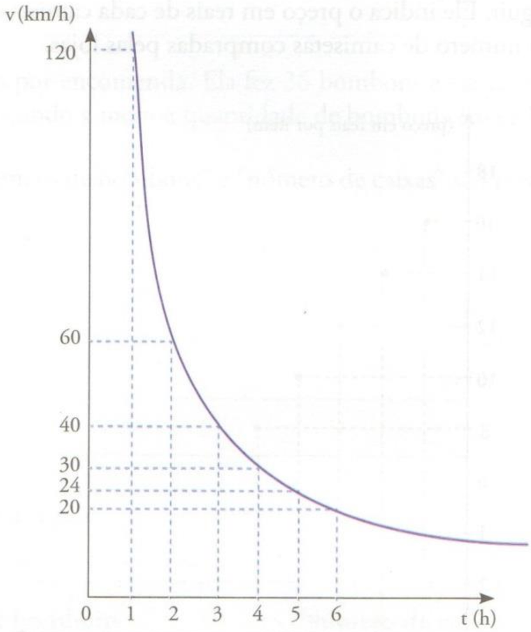
b) Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15 g de massa?

c) Explique por que as grandezas volume e massa de amostras de ferro representadas no gráfico são grandezas diretamente proporcionais.

d) Qual é a constante de proporcionalidade?

e) Escreva a relação entre a massa, **m**, e o volume, **V**, por meio de uma expressão.

3. O gráfico a seguir indica a velocidade que um automóvel precisa alcançar em função do tempo para percorrer uma distância de 120 km.



a) Com base no gráfico, complete a tabela a seguir:

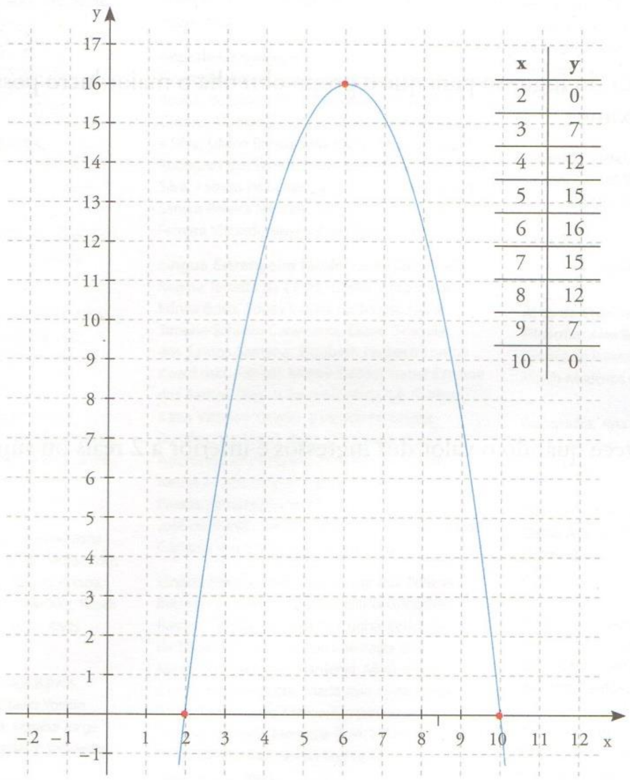
t (h)	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
v (km/h)	120		60						

b) Explique por que as grandezas "velocidade" e "tempo" representadas no gráfico são inversamente proporcionais.

c) Escreva a sentença que relaciona **v** e **t**.

LIÇÃO DE CASA

8. Um grupo de alunos da 8ª série/9º ano formou uma banda e precisa determinar o preço **x**, em reais, do ingresso para um *show* de apresentação. Eles imaginaram que, se o valor do ingresso for muito alto, não conseguirão vendê-lo e, se for muito baixo, não obterão lucro, que seria investido na banda. Com base nos valores cobrados por outras bandas, os alunos concluíram que o lucro **L** de cada espetáculo, em reais, poderia ser dado pela expressão $L = -x^2 + 12x - 20$. (**Observação**: $L > 0$ significa lucro e $L < 0$, prejuízo).



x	y
2	0
3	7
4	12
5	15
6	16
7	15
8	12
9	7
10	0

Observe o gráfico e a tabela e, em seguida, responda:

a) Qual será o lucro caso eles decidam cobrar 4 reais por ingresso?

b) Se o preço do ingresso for superior a 6 reais, podemos afirmar que o grupo terá prejuízo? Justifique.

c) Para que intervalo de valores de **x** o lucro aumenta? E para qual ele diminui?

d) Qual é o valor do ingresso para que o grupo obtenha o maior lucro possível? Qual é o valor do lucro máximo?

e) O que acontece quando o valor dos ingressos é inferior a 2 reais ou superior a 10 reais?

f) O que ocorre com o lucro quando os ingressos são vendidos a 3 reais ou a 9 reais?

NOMES: ____ **GRUPO** _____ **9º Ano** ______

ATIVIDADE FINAL – FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS

Objetivo Específico: Expressar situações e problemas em linguagem algébrica; expressar graficamente situações de interdependência entre grandezas; expressar proporcionalidade direta e inversa como função; identificar gráficos que representam proporcionalidade direta entre grandezas ou com o quadrado de outra.

Questão 1

Os professores de uma academia recebem a quantia de 15 reais por aula, mais uma quantia fixa de 200 reais como abono mensal. Então a quantia y que o professor recebe por mês é dada em função do número x de aulas que ele dá durante esse mês. Qual é a lei de formação da função que relaciona essas duas grandezas?

Questão 2

Um motorista, saindo de um ponto A, viaja por uma estrada e verifica que a distância percorrida, desde o ponto inicial, pode ser calculada por $y = 51x + 17$, em que y é dado em quilômetros, e x é dado em horas. Nessas condições, determine as distâncias percorridas, de hora em hora, desde $x = 1$ até $x = 4$.

Questão 3

Construa o gráfico da função polinomial do 1º grau, preenchendo convenientemente a tabela de valores dos pares ordenados, indique se elas são **crescentes** ou **decrescentes** e qual é o ponto correspondente ao **zero da função**.

a. $y = x + 1$

x	$y = x + 1$	y	(x, y)

Questão 4

Num movimento, o espaço percorrido é diretamente proporcional ao tempo, mantendo-se constante a velocidade. O professor Demóstenes deslocou-se no seu automóvel durante 4 horas, a uma velocidade média de 90 km/h. A função que representa corretamente a relação de proporcionalidade direta é

(A) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço}}{\text{Tempo}}$

(B) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço} + \text{Tempo}}{\text{Tempo}}$

(C) "Velocidade média = $\frac{\text{Espaço} - \text{Tempo}}{\text{Tempo}}$

(D) "Velocidade média = Espaço $\cdot$ Tempo

(E) "Velocidade média = $\frac{\text{Tempo}}{\text{Espaço}}$

Questão 5

O comprimento **C** de uma circunferência é uma função do diâmetro **d**; no caso, **C** é diretamente proporcional a **d**, e temos **C = f(d) =** $\pi \cdot$ **d** . Então a constante de proporcionalidade (k) é:

(A) k = 2d

(B) k = π

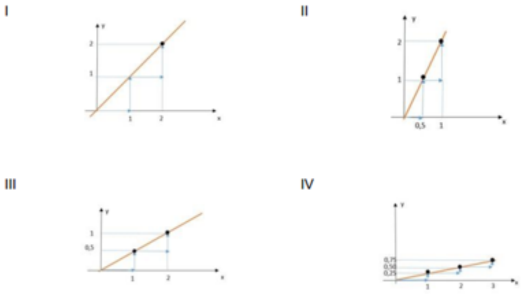
(C) k = $\frac{2}{\pi}$

(D) k = 2π

(E) k = $\frac{\pi}{2}$

Questão 6

Considere os gráficos a seguir:



Considerando as constantes de proporcionalidade encontradas em cada uma das funções e organizando-as em ordem crescente, obtemos a seguinte sequência:

(A) IV, III, I e II.

(B) II, I, III e IV.

(C) III, IV, I e II.

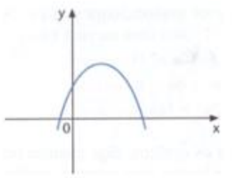
(D) I, II, III e IV.

(E) II, III, IV e I.

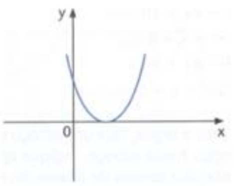
Questão 7

São dadas a seguir os gráficos de três funções de 2º grau, com $y = ax^2 + bx + c$ e $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Em cada caso, diga se a e Δ são positivos, nulos ou negativos.

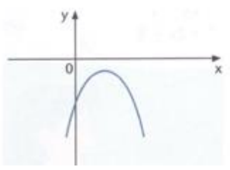
a.



b.



c.



Questão 8

Construa o gráfico da função polinomial do 2º grau, preenchendo convenientemente a tabela de valores dos pares ordenados, calcule o **vértice da parábola** e quais são os pontos correspondentes ao **zeros da função**.

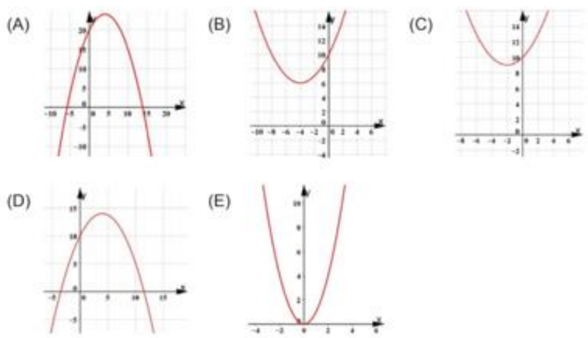
a. $y = x^2 + 6x + 5$

x	$y = x^2 + 6x + 5$	y	(x, y)

Questão 9

Dada a função: **y = 0,25x² + 2x + 10**.

O gráfico que representa corretamente a proporcionalidade direta entre as duas grandezas é:



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, A.; VASCONCELOS. M.J. **Praticando a Matemática, 8.**3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ANDRINI, A.; VASCONCELOS. M.J. **Praticando a Matemática, 9.** 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ARARIBÁ, Projeto. **Matemática.** Editora Moderna. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática: teoria e contexto, 9ºAno.** Editora Saraiva. São Paulo: Saraiva, 2012.

CHAVANTE, E. R. **Convergência: matemática, 8º ano: anos finais: ensino fundamental.** Edições SM. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2015.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 9ºano**. ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2009.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Gestão da Educação Básica. **Avaliação da Aprendizagem em Processo - Prova do Aluno – 2ºBim/2017**. 16ªEdição. São Paulo: SEE, 2017.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Caderno do aluno: matemática, Ensino Fundamental Anos Finais – 8ªSérie/9ºAno, volume 1**. São Paulo: SEE, 2014.

APÊNDICE C – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

TERMO DE CONSENTIMENTO E ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O aluno ____ está sendo convidado para participar da pesquisa UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM QUE UTILIZA EXPERIMENTOS DE FÍSICA NO ESTUDO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E 2º GRAUS NO ENSINO FUNDAMENTAL. Os objetivos deste estudo são analisar as potencialidades e desafios da atividade experimental para o ensino de funções em turmas de 9ºAno do Ensino Fundamental de uma escola pública. O aluno foi selecionado porque está regularmente matriculado no ano/série que sofrerá a investigação, no entanto sua participação não é obrigatória, nem remunerada. A qualquer momento o aluno pode desistir de participar e retirar o seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo em sua relação com o pesquisador ou com a instituição. Sua participação consistirá em participar de uma sequência de aulas elaboradas pelo professor pesquisador, executar as atividades experimentais que serão propostas, responder os roteiros experimentais e questionários que serão disponibilizados. Os benefícios relacionados com a sua participação são contato com outra área do conhecimento (Física) de forma a contextualizar e mostrar uma aplicabilidade do tema funções, uma possível aprendizagem significativa relacionada ao tema proposto e um novo modo de relacionar os conhecimentos de áreas distintas. Não há riscos relacionados à pesquisa, pois os estudantes realizarão as atividades da sequência didática em horário regular de aulas, dentro da unidade escolar em que se encontra matriculado, não havendo riscos de perda de aprendizado, sendo funções uma proposta do Currículo Oficial do Estado de São Paulo, possibilitando uma discussão sobre a aprendizagem das competências e habilidades deste tema, propostas nos documentos norteadores da prática do docente da rede estadual de ensino, não necessitando, portanto, de plano de contingência. A tomada de dados para essa pesquisa será feita por meio de atividades impressas distribuídas/preenchidas durante o desenvolvimento das aulas. Essas atividades também serão registradas por meio de fotografias, enquanto de seu desenvolvimento, no entanto, serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre sua participação. Os dados coletados não serão divulgados de forma a possibilitar a sua identificação, com tempo de guarda de cinco anos conforme legislação. Após prazo legal de guarda, todo o material de coleta de dados impresso e preenchido pelos estudantes, será fragmentado em tiras e descartado e registros fotográficos deletados. Caso algum registro seja indispensável para a análise da pesquisa, será atribuído um nome fictício ao estudante, e sua imagem será preservada impossibilitando o reconhecimento de sua face. Você receberá uma via deste termo onde constam o telefone e o endereço institucional do pesquisador principal e do CEP (Comitê de Ética e Pesquisa), podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

PROFª. DRA. REBECA VILAS BOAS CARDOSO DE OLIVEIRA
Orientadora
E-mail: rebecavilasboas@ifsp.edu.br
Rua Pedro Vicente, 625 – Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 2763-7583

WINDERSON BRAGA CAVALCANTI
Mestrando
E-mail: winderson.cavalcanti@outlook.com
Rua Pedro Vicente, 625 – Canindé – São Paulo/SP

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 3775-4569
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios da participação do menor sob minha responsabilidade na pesquisa e autorizo sua participação.

____
Nome do responsável

____
Assinatura do participante

____
Assinatura do responsável