INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA

E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

CAMPUS SÃO PAULO

GISELE DE GOUVÊA

REFLEXÕES ACERCA DO USO DA APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS NO ENSINO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

SÃO PAULO

2016

GISELE DE GOUVÊA

REFLEXÕES ACERCA DO USO DA APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS NO ENSINO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca

SÃO PAULO

2016

G735r Gouvêa, Gisele de.

Reflexões acerca do uso da aprendizagem baseada em problemas no ensino de conceitos matemáticos / Gisele de Gouvêa. São Paulo: [s.n.], 2016.

113 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2016.

1. Resolução de problemas 2. Ensino e aprendizagem 3. Aprendizagem baseada em problemas (PBL) I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. II. Título

CDU 370.0

GISELE DE GOUVÊA

REFLEXÕES ACERCA DO USO DA APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS NO ENSINO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada e aprovada em 21 de setembro de 2016 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca IFSP – Câmpus São Paulo Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Armando Traldi Junior IFSP – Câmpus São Paulo

Membro da Banca

Prof. Dr. Dermeval Santos Cerqueira

FATEC - GRU

Membro da Banca

A minha Mãe

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, por ter me dado forças para esta luta, por ter me iluminado na construção deste trabalho ao decorrer desses dois anos de Mestrado, mostrando-me possuir uma capacidade na qual eu não acreditava muito.

À minha mãe, que, mesmo sem entender o que eu faço, deu-me todo o apoio, seu amor incondicional, e entendeu cada final de semana e feriado em que eu me trancava no quarto para terminar esta dissertação; e à minha família, de modo geral, por todo o apoio.

Agradeço todo o apoio (que foi essencial durante esses dois anos) dos meus colegas de turma. Fomos sempre muito unidos, e eles me fizeram não desistir diante de cada dificuldade. Entre eles, destaco: Carla, Edimar, Eliane, Giselle Barreto, Jândela: vocês me deram forças para continuar quando eu pensava em desistir.

Ao IFSP, tenho muito a agradecer por toda a minha formação, desde a graduação até a pós, proporcionando-me um crescimento profissional do qual muito me orgulho, uma formação que me permite fazer a diferença na educação. Portanto deixo aqui registrado, aos profissionais dessa instituição, os meus agradecimentos. E à Diretoria do Sócio Pedagógico, pelo auxílio que me permitiu continuar estudando em um período em que fiquei sem recursos financeiros.

Aos meus professores do Mestrado, que com suas aulas contribuíram de forma significativa para minha pesquisa; dentre eles, Profª Dra. Amanda, Profº Dr. Armando Traldi, Profª Dra. Elaine, Profº Dr. Gustavo, Profª Dra. Diva, Profª Dra Graziela, Profª Dra. Mariana.

Ao meu querido orientador Prof. Rogério, em especial, por toda a sua paciência, dedicação e comprometimento com a nossa pesquisa. Ele foi imprescindível para minha aceitação neste programa, acreditou no meu potencial e guiou-me durante a pesquisa, que tomou um rumo que me deixou bastante contente.

Não posso deixar de agradecer aos membros da banca por terem aceitado o convite e, com as suas contribuições para a minha pesquisa, tenho que dizer que nortearam meu trabalho para um caminho muito interessante, que deixará um bom material aos educadores. Obrigada, portanto, aos professores: Dr. Armando Traldi, Dr. Dermeval; aos suplentes: Dr. Rogério Marques, Dra. Diva Novaes.

Uma pessoa bastante especial, que durante esses dois anos me deu forças para continuar, sempre acreditou em mim, e todas as vezes que eu pensava em desistir me aconselhava a continuar, mostrando que valia a pena: agradeço a você, Amanda Machado, por todo o carinho de sempre, saiba que você é muito especial, e que esse título, apesar de todo meu esforço, tem a sua contribuição, como pessoa e profissional. Você me ajudou muito na Graduação, mas, isso você já sabe. Enfim, só tenho a agradecer por todo o apoio de sempre, agradeço a Deus por ter conhecido uma pessoa tão especial.

À Lilian Sais por toda a paciência que teve comigo para me ajudar a passar na proficiência em inglês, por ter me mostrado que eu era capaz de obter a aprovação, pelos conselhos em todas as vezes que pensava em desistir. Ela foi uma excelente professora, as aulas sempre muito bem preparadas, e o meu avanço foi notório - hoje tudo que eu sei de inglês devo a ela.

Não posso deixar de agradecer aos meus professores do IFSP- Guarulhos, pois sem a formação inicial que me proporcionaram nada disso seria possível: obrigada por cada dica e por cada experiência e conhecimento compartilhado.

À Cristiane Freire, que sempre me incentivou a fazer o Mestrado, apoiou-me, lia os meus projetos, dava-me dicas, agradeço por tudo sempre, desde a graduação até a pós.

Deixo aqui os mais sinceros agradecimentos à equipe gestora da escola em que leciono no Município de Caraguatatuba, E.M.E.F. Prof. Luiz Silvar do Prado, Luís, Karina e Lilian, por todo o apoio durante o final desse processo do Mestrado, sendo compreensivos em todos os momentos, e meu muito obrigada, por tudo, aos meus alunos.

RESUMO

No presente trabalho, faremos considerações acerca de uma “nova” metodologia de ensino ativa: referimo-nos à Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL). A palavra “nova” se refere à utilização desta metodologia no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. O interesse por essa temática surgiu por meio do contato com algumas pesquisas que utilizam o PBL no ensino de engenharia, medicina e outras áreas de conhecimento. Em geral, essa metodologia auxilia na articulação entre teoria e prática profissional, o que nos parece relevante também para o ensino e aprendizagem de matemática, diante dos desafios impostos pela sociedade contemporânea, ou seja, uma sociedade que cada vez mais busca profissionais que atuem de forma crítica, criativa e participativa em suas áreas de atuação. Indicamos como produto final dois problemas exemplares e suas respectivas orientações didáticas, de acordo com os preceitos da metodologia de ensino aqui adotada.

Palavras-chaves: Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL), Ensino e Aprendizagem, Conceitos Matemáticos, Resolução de Problema.

REFLECTIONS ON THE USE OF PROBLEM-BASED LEARNING IN TEACHING MATHEMATICAL

ABSTRACT

In this work, we Will make considerations about a “new” active teaching methodology, the Problem Based Learnin (PBL). The Word “new” refers to the use of this methodology in the teaching and learning of mathematical concepts. In general, this methodology helps in the complementarity in btwen theory and Professional practice, which seems also relevant to the teaching and learning of mathematics, given the challenges posed by contemporary society, ie a society that increasingly search Professional Who act so critical, creative and participatory in their área. Indicated as a final product duplicate problems and their teaching guidelines , according to the precepts of the teaching methodology adopted here . With this study, we observed new ways to innovate in the classroom , demystifying the teaching of mathematics, for example, allowing to overcome the fact that many students do not see a direct application of mathematical concepts they study, and that the PBL shows an innovative way to approach to overcome this difficulty through professional practice.

Keywords: Problem-Based Learning (PBL). Teaching and Learning. Mathematical Concepts. Problem Solving.

LISTA DE QUADROS

<u>Pág.</u>

Quadro 1 – Aspectos relacionados às metodologias de ensino 38
Quadro 2 – Dados de uma pessoa. 46
Quadro 3 – Altura/ Tamanho da Cabeça. 47
Quadro 4 – Altura do Corpo/ Tamanho da Cabeça.. 48
Quadro 5 – Idade/ Tamanho da Cabeça.. 52
Quadro 6 – Idade/ Tamanho da Cabeça.. 53
Quadro 7 – Idade/ Tamanho da Cabeça 56
Quadro 8 – Idade/ Tamanho da Cabeça.. 58
Quadro 9 – Idade/ Tamanho da Cabeça.. 59

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 1 – Ciclo de atividades PBL. 35
Figura 2 – Casos de Microcefalia por Região..44
Figura 3 – Gráfico elaborado pelo autor. 48
Figura 4 – Gráfico elaborado pelo autor. 53
Figura 5 – Gráfico elaborado pelo autor. 57
Figura 6 – Gráfico elaborado pelo autor. 60
Figura 7 – Contorno de Celulas..61
Figura 8 – Contagem de Caixas. 62
Figura 9 – Gráfico de diagnóstico de tumores. 62
Figura 10 – Tapete de Sierpinski...63
Figura 11 – Fractal Triminó. 64
Figura 12 – Cartão Fractal...64
Figura 13 – Gráfico de Diagnóstico. 65
Figura 14 – Exemplo de Fractais no cotidiano. 66
Figura 15 – Planta sobre malha quadriculada. 67
Figura 16 – Planta sobre malha quadriculada. 68
Figura 17 - Gráfico do modelo matemático.. 68

SUMÁRIO

Pág.

1 Introdução..15

1.1. Motivações e Objetivos..16

1.2. Problemática...18

2 Procedimentos Metodológicos 20

2.1. Aspectos comuns e peculiaridades entre Resolucão de Problemas (RP), Modelagem (MM) e Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL)..........................22

3 Sugestões de problemas para abordar conceitos matemáticos por meio do PBL...40

3.1. Orientações Gerais...40

3.2. Sugestão de tratamento matematico 1 e orientações......................................46

3.3. Sugestão de tratamento matematico 2 e orientações 50

3.4. Sugestão de tratamento matematico 3 e orientações......................................54

3.5. Sugestão de tratamento matematico 4 e orientações 57

3.6. Sugestão de tratamento matematico e orientações para o Problema 2 66

4 Considerações Finais...69

Referências..74

Apêndice: Produto Final..81

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho, nos dedicaremos ao estudo de uma “nova” metodologia de ensino ativa, nos referimos a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL). A palavra “nova” se refere à utilização desta metodologia no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Teceremos comentários a respeito das potencialidades pedagógicas em relação ao uso desta metodologia para abordar noções de Matemática.

Nosso interesse por essa temática surgiu por meio do contato com algumas pesquisas que utilizam a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) no ensino de engenharia, entre outros (Ribeiro, 2008; Schmdt, 1993, 1994, 2006; Filho e Ribeiro, 2009).

Em geral, essa metodologia auxilia na articulação entre teoria e prática profissional, o que nos parece relevante perante os desafios impostos pela sociedade contemporânea, ou seja, uma sociedade que cada vez mais busca profissionais que atuem de forma crítica, criativa e participativa em sua área de atuação.

Optamos por noções de matemática devido aos resultados de pesquisas que apontam que os estudantes de graduação, em geral, têm dificuldades com essa disciplina, muitas vezes citando como entraves a formalização da linguagem matemática, o caráter demasiadamente abstrato e a percepção de poucas aplicações práticas (Fratelli, 2007; Machado, 2012; Chiari, 2013; Santos, 2013; Barufi, 1999; Reis, 2001; Rezende, 2003; Bassanezi, 2011).

Nosso trabalho está dividido da seguinte maneira, no Capítulo 1 abordaremos a motivação, justificativa, objetivo e questões de pesquisa, expondo à problemática, ou seja, contextualizando os aspectos envolvidos no estudo.

No Capítulo 2, apresentaremos os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento da pesquisa e faremos considerações a respeito de algumas metodologias de ensino, a saber, Resolução de Problemas, Modelagem Matemática e a Aprendizagem Baseada em Problemas, com ênfase nesta última.

Apresentaremos uma breve comparação entre as três destacando aspectos comuns e também as particularidades de cada uma delas.

No Capítulo 3, indicaremos algumas sugestões para abordar determinados conceitos matemáticos por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas ressaltando potencialidades teóricas desta metodologia, assim como possíveis entraves. No presente texto apresentaremos dois problemas exemplares. Será realizada uma análise didática considerando alguns apontamentos sobre os objetivos dessas propostas (sugestões de problemas), bem como conhecimentos prévios necessários aos alunos, orientações aos professores e possíveis dinâmicas que poderão ser utilizadas na aplicação das atividades exemplares.

Por fim, apresentamos as considerações finais, as quais indicarão à retomada dos principais objetivos da pesquisa, respostas às questões de pesquisa, descrevendo possíveis vantagens, desvantagens e entraves no uso da Aprendizagem Baseada em Problemas para abordar conceitos matemáticos e perspectivas para futuras pesquisas.

Dessa maneira estamos propondo como produto final reflexões acerca da utilização da Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino de conceitos matemáticos com as respectivas orientações didáticas, o que poderá servir de base para futuras pesquisas. Destacamos que existem poucos estudos a respeito do uso desta metodologia no ensino de Matemática.

1.1. Motivações e objetivos

A motivação para o desenvolvimento da pesquisa surgiu pelo fato de estarmos interessados em investigar potencialidades de uma metodologia ativa, em especial o PBL, no ensino de conceitos matemáticos, com o intuito de favorecer uma aprendizagem mais significativa e mais próxima da realidade dos estudantes, de forma articulada com a futura prática profissional. Entendemos que a aprendizagem significativa é “uma incorporação de novos conhecimentos à estrutura cognitiva com significado, compreensão, capacidade de explicar, transferir, enfrentar situações novas” (MOREIRA, 2013, p. 12).

Outro aspecto motivador está relacionado ao fato de que essa metodologia tem sido pouco explorada no ensino e aprendizagem de Matemática. As dificuldades e desafios envolvidos no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, indicados em diversas pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática e as demandas impostas pela sociedade contemporânea, indicam a necessidade de explorar novas metodologias de ensino.

Diante disso optamos por explorar uma metodologia de ensino ativa, a Aprendizagem Baseada em Problemas, onde os estudantes se tornam o centro do processo ensino e aprendizagem, participando ativamente na construção de seu próprio conhecimento.

O objetivo de nossa pesquisa é explorar e analisar, do ponto de vista teórico, as potencialidades de se abordar conceitos matemáticos por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas, ressaltando possíveis vantagens e desvantagens dessa metodologia de ensino. Além disso, iremos sugerir dois problemas de acordo com os preceitos do PBL, acompanhados de orientações didáticas.

Buscamos com esta pesquisa responder as seguintes questões: Quais são as potencialidades teóricas da Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos? E quais são os possíveis entraves inerentes a essa metodologia de ensino perante a construção do conhecimento matemático?

Uma das principais características da Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) é explorar situações (problemas) reais ou realísticas (plausíveis de ocorrerem na prática profissional) no processo de ensino e aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais para a futura atuação dos estudantes como profissionais e cidadãos.

Julgamos que buscar uma “nova” metodologia de ensino para abordar conceitos matemáticos é relevante, diante das demandas impostas pela sociedade contemporânea, onde se espera que as pessoas atuem de maneira ética, critica e inovadora na resolução de problemas no seu âmbito profissional.

Como nossa pesquisa tem um compromisso explorar problemas factíveis, ou seja, que possam ocorrer no ambiente de trabalho de determinadas profissões, nossa expectativa é também contribuir para que determinados profissionais sejam mais autônomos diante de problemas do seu cotidiano, capazes de resolvê-los de maneira prática e criativa, aplicando (sempre que necessário) conhecimentos matemáticos desenvolvidos no âmbito universitário.

1.2. Problemática

Articular os saberes disciplinares e os campos de atuação profissional é muitas vezes questionável no universo acadêmico por se tratar de um entrave a ser superado nos cursos de formação inicial.

Destacamos como agravante o fato de constatar que as disciplinas cursadas na graduação apresentam-se distantes do que é exigido para atuar profissionalmente (Hunger e Lepre, 2013), desta maneira o PBL pode auxiliar o enfrentamento desta situação.

> A maioria dos professores e alunos universitários há tempo sabe desses e de outros problemas e desafios encontrados na busca da formação de um profissional que pense sobre e na prática e que, portanto, é preciso conceber os cursos de graduação de modo articulado às problemáticas, necessidades, exigências, inovações etc. do mundo do trabalho. (HUNGER e LEPRE, 2013, p.1)

Associar o conhecimento científico ao saberes experienciais desde o início da formação é necessário, o ensino não pode ser tratado de forma fragmentada.

É primordial articular teoria e prática no ensino de Matemática, no sentido de proporcionar aos estudantes uma formação profissional mais próxima das situações que irão se deparar no mundo do trabalho.

O conhecimento matemático não deve ser tratado como propriedade privada dos matemáticos, ele tem evoluído também no contexto de outras ciências. Destacando-se que o pensamento matemático deve ser aprendido não apenas por aqueles que irão dedicar-se à Matemática, mas por todos os demais profissionais que fazem uso da Matemática, além dos cidadãos comuns.

Pesquisas de Fratelli e Monteiro (2007) revelam que alguns conhecimentos matemáticos são necessários na aplicação de áreas como Engenharia, Biologia, Física, entre várias outras, por isso é importante que o professor trabalhe esses conhecimentos, de forma a aproximá-los da prática desses profissionais, permitindo que eles utilizem os conhecimentos adquiridos em aula ao se deparar com problemas que serão resolvidos no âmbito profissional.

“Teoria e prática são conceitos distintos, mas que precisam ser pensados de forma indissociada, visando uma práxis transformadora e emancipadora”. (Hunger e Lepre, 2013, p.1)

Os argumentos anteriores ajudam a evidenciar nossa escolha por explorar a Aprendizagem Baseada em Problemas, para abordar conceitos matemáticos, devido esta metodologia possibilitar a articulação entre teoria e prática no cenário profissional de interesse dos estudantes.

É importante destacar que nossa sociedade precisa de profissionais que consigam atuar de formas inovadoras em seu ambiente de trabalho, mas exigir isso requer uma formação que vá ao encontro dessas novas demandas impostas pela sociedade contemporânea.

CAPÍTULO 2

Neste capítulo apresentaremos os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento da pesquisa e faremos comentários sobre algumas metodologias de ensino ativa, em especial, a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática e a Aprendizagem Baseada em Problemas, enfatizando a última.

2 Procedimentos Metodológicos

O estudo que estamos propondo trata-se de uma pesquisa exploratória de cunho bibliográfico. Este tipo de procedimento metodológico é adequado quando há pouco conhecimento sobre a temática a ser abordada, buscando conhecer com maior profundidade o assunto, de modo a torná-lo mais claro ou construir questões importantes para a condução da pesquisa.

Já existe e está disponível um número considerável de publicações a respeito da Aprendizagem Baseada em Problemas e seu uso em diferentes áreas de conhecimento, como Medicina, Engenharia, Administração, Direito, entre outras (ARAÚJO e SASTRE, 2009). No entanto, há poucas pesquisas sobre o uso desta metodologia no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos (SOUZA, 2016).

> Pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato. Este tipo de pesquisa é realizado especialmente quando o tema escolhido é pouco explorado e torna-se difícil sobre ele formular hipóteses precisas e operacionalizáveis. (GIL, 2008, p.27)

Sua finalidade é desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, com objetivo de formular problemas mais precisos, ou hipóteses pesquisáveis para estudos futuros, envolve também levantamento bibliográfico e documental.

Gil (2008) destaca que, ela constitui a primeira etapa de uma investigação mais ampla, apontando que o tema escolhido é genérico, tornando o esclarecimento e delimitação necessários, exigindo uma revisão de literatura, discussão com especialista e outros procedimentos. O produto final, fruto desta pesquisa, é um problema mais esclarecido passível de investigação mediante procedimentos mais sistematizados.

Proporciona maiores informações sobre o assunto que se vai investigar, facilitar a delimitação do tema de pesquisa, orientar a fixação dos objetivos e a formalização de hipóteses ou descobrir um novo tipo de enfoque sobre o assunto.

Como característica Gil (2008), apontou o aprofundamento de conceitos preliminares de uma temática que não foi contemplada satisfatoriamente por pesquisas anteriores. Dessa forma, contribui para o esclarecimento de questões superficialmente abordadas sobre o assunto.

Já a pesquisa bibliográfica consiste em uma análise de documentos como artigos, livros, revistas, entre outros.

> A Pesquisa Bibliográfica é aquela que se faz preferencialmente sobre documentação escrita. O campo pode ser caracterizado pelas bibliotecas, pelos museus, pelos arquivos e pelos centros de memória [...]. Esse tipo de pesquisa é também chamado de estudo documental. Os documentos para estudo apresentam-se estáveis no tempo e ricos como fonte de informação, pois incluem: filmes, fotografias, livros, propostas curriculares, provas (testes) cadernos de alunos, autobiografia, revistas, jornais, pareceres, programas de TV, listas de conteúdos de ensino, planejamentos, dissertações, ou teses acadêmicos, diários pessoais, diários de Classe, entre outros documentos". (FIORENTINI, 2012, p. 102-103)

Gil (1999) explica que a pesquisa bibliográfica é desenvolvida mediante material já elaborado, principalmente livros e artigos científicos. Apesar de praticamente todos os outros tipos de estudo exigirem trabalho dessa natureza, há pesquisas exclusivamente desenvolvidas por meio de fontes bibliográficas.

O material consultado na pesquisa bibliográfica pode abranger todo referencial já tornado público em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, livros, pesquisas, monografias, dissertações e teses. Por meio dessas bibliografias reúnem-se conhecimentos sobre a temática pesquisada. Nessa perspectiva é possível elaborar um trabalho monográfico, como uma abordagem histórica ou com intuito de reunir diversas publicações isoladas e atribuir-lhes uma nova leitura.

Podemos destacar ainda que uma pesquisa bibliográfica pode explicar um problema a partir de referencias teóricas, publicado em documentos.

Dedicaremos o próximo item a uma breve apresentação a respeito das seguintes metodologias de ensino: Resolução de Problemas, Modelagem Matemática e a Aprendizagem Baseada em Problemas. Será dada mais ênfase a está última, por ser o objeto desta pesquisa. Apresentaremos de forma resumida uma comparação entre as três, destacando aspectos comuns e também as particularidades de cada uma delas. Descreveremos aqui com maior detalhamento o passo a passo dessa pesquisa, primeiramente fizemos um estudo bibliográfico, no sentido de buscar referenciais que nos amparem quanto ao uso da metodologia aqui proposta no ensino de Matemática. Em seguida buscamos na literatura as pesquisas que utilizam diversas metodologias de ensino ativa na formação de conceitos matemáticos. Decidimos por abordar a utilização do PBL no ensino de alguns conceitos matemáticos, propondo dois problemas a serem trabalhados por professores, e também, alguns encaminhamentos que podem ser explorados pelos tutores em suas aulas.

2.1. Aspectos comuns e peculiaridades entre Resolução de Problemas (RP), Modelagem Matemática (MM) e Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL)

Há várias metodologias de ensino consideradas ativas, nos dedicaremos a indicar os principais aspectos da Resolução de Problemas (RP), da Modelagem Matemática (MM) e da Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL), destacando suas peculiaridades.

Para essas reflexões utilizaremos alguns artigos de pesquisadores que abordam em seus estudos a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática, para a primeira adotaremos a concepção de Onuchic e Allevato(2011) e Onuchic (2012), e para a segunda Barbosa(2001; 2004).

Estudos desenvolvidos no âmbito da Educação Matemática, utilizando a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática, destacam seus potenciais, como, estimular o estudante a aprender e favorecer articulações entre teoria e prática, por intermédio da utilização de problemas. Isso nos leva a questionar qual é a peculiaridade que as diferem da Aprendizagem Baseada em Problemas? É justamente esta questão que buscaremos responder com o desenvolvimento deste tópico.

Resolução de Problemas

Nesta metodologia de ensino, o ponto de partida é a apresentação de um problema que deverá ser estudado por meio de diversas estratégias, e possivelmente resolvido, o que deverá colaborar com a construção de novos conhecimentos.

> Na metodologia de Ensino- Aprendizagem- Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é o ponto de partida e, na sala de aula através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2011, p. 81)

Ressaltamos ainda que a RP tem uma razão fundamental, ajudar os alunos a compreender conceitos e processos como técnicas operatórias necessárias, a partir do tema que se deseja trabalhar.

Na Resolução de Problemas, com base nas concepções de Onuchic e Allevato (2004), o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre dar o sentido a um conhecimento, pode desenvolver a capacidade de pensar matematicamente, utilizando diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, aumentando assim o conhecimento dos conteúdos e conceitos matemáticos.

De acordo com está concepção, a formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.

Quando o problema selecionado na Resolução de Problemas visa à construção de um novo conceito, esse problema será chamado de gerador, ressaltamos que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema será explorado por meio dele, e não antecipadamente.

Geralmente, na RP existem dois momentos de leitura do problema, a individual e a em grupos, havendo dificuldades na leitura, o professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema. Caso existam palavras ou termos desconhecidos para os alunos, surge um problema secundário, é possível buscar uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos consultar um dicionário.

O trabalho dos alunos na RP é feito por meio de cooperação e colaboração, buscando a resolução do problema, os alunos são considerados co-construtores dos conceitos a serem abordados.

O papel do professor na Resolução de Problemas é observar, analisar o comportamento dos alunos e estimular o trabalho colaborativo, o professor é mediador e leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

Na dinâmica da metodologia RP, as soluções do problema são registradas na lousa, sejam elas erradas, certas ou feitas por processos diferentes, todas são apresentadas para que os alunos analisem e discutam.

Outra etapa importante na Resolução de Problemas é a plenária, onde os estudantes discutem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, o professor é o mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos, por fim há o consenso após analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor juntamente com a classe tenta chegar a um consenso sobre o resultado correto. Na formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos.

> Reitere-se que, nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspecto-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante a resolução do problema. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009 apud ALLEVATTO; ONUCHIC, 2011, p. 85)

Modelagem Matemática

Apresentaremos agora algumas considerações acerca da Modelagem Matemática. A Modelagem Matemática é tão antiga quanto à própria Matemática, porém vem ganhando espaço como estratégia de ensino da Matemática, por meio da resolução de problemas do cotidiano para construir um novo conhecimento, isso nas últimas décadas do século XX. (SILVEIRA; FERREIRA e SILVA, 2013).

Os primeiros trabalhos envolvendo Modelagem Matemática e Educação, no Brasil, surgiram na década de 1970, realizados por: Aristides Camargo Barreto, da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro; seguido por Ubiratan D' Ambrósio, um dos representantes brasileiros em Educação Matemática e por Rodney Carlos Bassanezi, da Universidade de Campinas. (SILVEIRA; FERREIRA e SILVA, 2013).

Os primeiros cursos de pós-graduação surgem na década de 80, muitos coordenados pelo professor Bassanezi, com isso a Modelagem Matemática ganha maiores proporções como uma estratégia de ensino e em 2001 a SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática), cria o Grupo de Trabalho (GT) de Modelagem Matemática. Em 2006 foi fundado pela professora Maria Salett Biembegut o Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino, CREMM.

No ano de 2007, o GT10 reuni diversos artigos sobre MM e publicou-os em um livro intitulado Modelagem Matemática na Educação Matemática: Pesquisas e Práticas Educacionais.

Silveira; Ferreira e Silva (2013) destaca que a obra mencionada apresenta a MM de diversas maneiras e em diversas situações, emergindo quatro grandes áreas de concentração, ou seja, as tendências da Modelagem Matemática no ensino:

> I. Aspectos teóricos da MM: em um primeiro momento, os artigos apresentam uma preocupação com o aprofundamento teórico que contribua para a aplicação da MM.
>
> II. Modelagem e prática de sala de aula: aqui são apresentadas as pesquisas de campo tanto no Ensino Básico como no Ensino Superior. É o momento onde as estratégias são testadas.
>
> III. MM e as tendências da informação e da comunicação- nessa tendência, os artigos defendem o uso da Modelagem Matemática através dos ambientes virtuais de aprendizagem.

> IV. Modelagem Matemática e formação de professores: a Modelagem Matemática aqui é apresentada como estratégia de ensino para o educador e para o educando. (SILVEIRA, FERREIRA e SILVA, 2013, p.6)

Utilizando as ideias de BIEMBENGUT (2011) o movimento pela Modelagem Matemática na Educação Básica e Superior passa a ocorrer a partir da década de 1970, ao mesmo tempo em diversos países, inclusive no Brasil. Destaca-se que as primeiras propostas são procedentes de professores de Matemática de Cursos de Educação Superior, especialmente em cursos de Engenharia, buscando entender alguns questionamentos oriundos de estudantes, entre eles, 'para que serve matemática', e algumas críticas sobre a formação matemática dos estudantes.

> Na última década, por exemplo, tem sido crescente o número de pesquisas e relatos de experiências em sala de aula sobre MM apresentados em eventos de Educação Matemática e de Modelagem na Educação Matemática (nacional e em dois estado). Apesar desse crescente interesse pela modelagem na Educação brasileira, há poucas evidências sobre mudanças no ensino frente ao número de adeptos e interessados. Não dispõe de um mapeamento completo das atividades de MM na Educação, em particular quais são as concepções de MM dos professores que a adotam e, ainda, quais as tendências emergidas nesses 40 anos de MM na Educação brasileira. (BIEMBENGUT; 2011, p.2)

Agora abordaremos a metodologia Modelagem Matemática (MM) a cerca das ideias de Jonei Cerqueira Barbosa.

> É uma limitação teórica pensar na Modelagem Matemática como uma aplicação de matemática em outras áreas do conhecimento. Podemos ressaltar que é preciso que tenhamos clareza do que venha ser Modelagem. "Em geral, são apresentados cinco argumentos: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio-cultural da matemática". (BARBOSA, 2004, p. 2)

O trabalho na Modelagem Matemática ocorre por projetos, os alunos são divididos em grupos, os quais devem eleger temas de interesses, para serem investigados por meio da Matemática, o acompanhamento do professor é de suma importância.

> Modelagem pode ser entendida em termos mais específico. Do nosso ponto de vista, trata-se de uma oportunidade para os

> alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. Os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade.(BARBOSA, 2001, p.5)

Na Modelagem o ambiente de aprendizagem é baseado na indagação e investigação, se diferenciando do ensino tradicional (pautado na definição, exemplos e exercícios), ela busca estabelecer algumas relações com outras áreas e o cotidiano.

Na concepção de Modelagem Matemática apresentada por Barbosa (2004), o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação, o primeiro se refere ao ato de criar perguntas ou problemas, já o segundo busca seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas.

Aprendizagem Baseada em Problemas

Agora faremos algumas reflexões acerca de nossa escolha pela Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) como metodologia de ensino a ser explorada nesta pesquisa. De acordo com o que será apresentado a seguir observar-se-á que ela está relacionada com a futura prática profissional dos estudantes, por propor situações reais, tornando a aprendizagem mais próxima de sua formação profissional.

Apresentaremos um breve contexto histórico da Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL). Originou-se no Canadá na década de 60 e início de 1970, no âmbito universitário, mais precisamente na Faculdade de Medicina da Universidade de McMaster,sob a coordenação de Howard S. Barrows.

Além da McMaster, outras Faculdades de Ciências da Saúde passaram a utilizar o PBL como base da estrutura curricular, de forma plena ou mesmo inicialmente, utilizando-a como um currículo paralelo, ou em parte da grade curricular. Destacam-se: Maastrichi University (Holanda), Southern Illinois Schoolof Medicine (EUA), Faculté de Medicine- Université de Sherbrooke (Canadá) e Havard Medical School (EUA).

> Os principais determinantes para a introdução de inovações no ensino de Ciências da Saúde são: avanços da ciência e da tecnologia para diagnóstico e tratamento e industrialização; mudanças de legislações; mudanças econômicas, políticas e sociais, com a consequente modificação do sistema de saúde e valorização da prevenção; surgimento de diferentes doenças; descoberta de novos medicamentos; e por pressões dos alunos e pela vontade de reitores, de diretores, de departamentos de ensino e de colegiados. (BORGES; CHACHÁ; QUINTANA; FREITAS; RODRIGUES, 2014, p.2)

Com o intuito de desenvolver diversas habilidades o PBL começa a fazer parte da estruturação de um currículo médico, ou seja, lidar com problemas e tomar algumas decisões fundamentadas em situações desconhecidas, desenvolver raciocínio crítico e criativo, entre outras.

> Estamos vendo uma explosão no uso do PBL em suas várias adaptações. Hoje, a maioria das escolas médicas dos EUA e muitas em quase todos os países do mundo estão implementando (ou estão planejando implantar) o PBL em seus currículos, em maior ou menor grau. Além disso, o PBL se espalhou para as escolas de ciências da saúde, enfermagem, odontologia, farmácia, medicina veterinária e saúde pública. Mais longe, escolas de arquitetura, negócios, direito, engenharia, silvicultura, ciências políticas, serviço social, educação e muitas outras áreas profissionais adotaram a estratégia. (CAMP, 1996, p.1; apud SOUZA, 2016, p.52)

Queiroz (2012) aponta que no Brasil o PBL já se tornou uma realidade educacional em diversas universidades e centros acadêmicos, por se tratar de uma metodologia ativa que vem ao encontro das necessidades de nossa sociedade contemporânea.

> Em meados dos anos 80 e 90 o PBL passou a ser aceito em toda a América do Norte e Europa. No Brasil, a Aprendizagem Baseada em Problemas também começou a ser inserida em diversos campos de estudo. A Escola de Saúde Pública do Ceará tornou-se notória por ser a primeira instituição do país a adotar uma proposta tão inovadora. Fato este que ocorreu em 1994, em cursos de educação continuada. (COELHO-FILHO;SOARES;SÁ,1998; apud SOUZA, 2016, p.54)

A respeito do uso do PBL no Brasil, destacam-se as seguintes universidades: Universidade de São Paulo, na Escola de Artes, Ciências e Humanidades (EACH-

USP Leste) e na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade (FEA-USP Ribeirão Preto), por meio de um novo curso de MBA; a Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), em seus cursos de Engenharia; a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), nos cursos de Medicina e Engenharia Biomédica; dentre outras.

> As décadas de 1960/1970 caracterizaram-se como um período de contestações memoráveis, em escala mundial, bastante fértil no campo das ideias, inovações e reivindicações de novos paradigmas em diversos domínios, sobretudo naqueles da cultura, arte, política e comportamento. Assim sendo, apesar de num ritmo inicialmente lento, o espraiamento progressivo do PBL para diversas outras Faculdades, tanto de Medicina quanto de outros cursos como Direito, Engenharia, Administração, Fisioterapia e Psicologia não tardou muito. (QUEIROZ; 2012, p. 28)

Outro fato que marcou a grande mudança de paradigmas ocorreu a partir da década de 1980, com a Revolução Tecnológica e o fenômeno da globalização, desafiando alguns centros acadêmicos, a recompor seus modelos de gestão, diante de uma sociedade cujos valores não se sustentavam mais na tradição ou nas grandes escrituras. Dessa maneira, metodologias ativas de ensino e aprendizagem surgiram como tentativa de resposta aos novos parâmetros de exigências da realidade contemporânea.

A Aprendizagem Baseada em Problemas se insere em um modelo educacional de ensino superior, propiciando aos alunos a oportunidade de serem ativos, participativos e responsáveis por seu conhecimento, durante todo o processo que os inserem. Procura também garantir que a realidade seja confrontada, levando os alunos, por meio de problemas, a analisarem as situações propostas como pessoas comprometidas com a realidade social, em busca de soluções para a vida, aliando teoria e prática e rompendo com os modelos tradicionais de ensino (pautado em definições, exemplos e exercícios).

Destaca-se que no PBL o aluno é o agente ativo em busca da resolução de problemas, as soluções em si não é o que lhes apontam à aprendizagem, mas o processo de pesquisa, este sim, constitui-se o verdadeiro fenômeno da aprendizagem. Além disso, os alunos são autorizados, requisitados e estimulados a falarem em classe.

Na dinâmica do PBL o trabalho ocorre em pequenos grupos de 4 ou 5 alunos e um tutor, cada integrante tem tarefas delegadas ao final de cada aula. Ocorre a escolha de um relator e um coordenador, o primeiro sistematiza toda a discussão no grupo, já o segundo conduz as discussões no grupo, delega as tarefas aos integrantes, além disso, é importante que haja a rotatividade de papeis perante o grupo.

Inicialmente é proposto um problema real (ou realístico) pertinente á futura área de atuação profissional dos estudantes, é feita uma leitura coletiva do problema proposto. Os próximos passos da dinâmica do PBL incluem a identificação de vocabulário desconhecido e de palavras-chave e o reconhecimento da problemática central como sendo o objetivo geral do problema em questão. As discussões prosseguem e é feita a formulação dos pontos de aprendizagem a serem cumpridos durante a etapa que correspondem ao estudo e à pesquisa individual.

No PBL o problema deve ser aberto, entendemos por problema aberto aquele que permite diversos caminhos para se chegar a sua resolução, permitindo assim uma investigação por parte dos estudantes, destacamos que um problema ideal deve ser real ou potencialmente real, e relevante à futura atuação do estudante em sua formação profissional, não admite necessariamente uma única resposta correta, há alguns caminhos de resoluções a serem percorridos pelos estudantes, gerando hipóteses e conjecturas.

Destaca-se como característica importante de um problema no PBL a estruturação flexível, com a ausência proposital de algumas informações, permitindo o surgimento de um número considerável de questões, conjecturas e hipóteses. O problema é considerado o meio principal para o alcance dos objetivos de ensino e aprendizagens, um indicador importante da relevância de determinados conceitos para a formação profissional.

O papel do tutor é de conduzir as discussões com base nos objetivos de aprendizagem a serem alcançados pelos alunos, ou seja, é o tutor que deve guiar o grupo. Seu papel também é incentivar os alunos a pesquisarem artigos e teses, entre outras fontes de pesquisas pertinentes, que contemplem a temática abordada no problema.

Os problemas devem ser estimulantes e provocativos do querer saber, os alunos tem que ser instigados a resolvê-los, por isso a importância de ser um problema que esteja diretamente relacionado à futura prática profissional dos estudantes.

A adoção do PBL como metodologia de ensino a ser explorada nas aulas de Matemática, poderá ser relevante por estar diretamente relacionada à prática profissional, ela pode contribuir com uma formação mais ampla, que relaciona teoria à prática, explorando algumas situações que podem futuramente fazer parte do cotidiano profissional.

Na Aprendizagem Baseada em Problemas, como ponto de partida do processo de aprendizagem os alunos são desafiados por um problema, que entre outros aspectos tem a função de motivar, focar, direcionar, e alavancar a aprendizagem deles. Os problemas são cuidadosamente selecionados (organizados ou adaptados) e espera-se que sejam propostos diversos problemas de acordo com os temas essenciais que os alunos devem estudar para cumprir o Currículo, sem os quais não poderão ser considerados aptos para exercer a profissão.

De maneira alguma o PBL nega a importância da aprendizagem de conteúdos, contudo não reconhece a utilidade futura do conteúdo memorizado, mas sim busca a construção de conhecimentos por meio da resolução de um problema. Valoriza, além do conteúdo a ser aprendido, a forma como ocorre o aprendizado, reforçando o papel ativo do aluno neste processo, permitindo que ele aprenda como aprender.

O fato dos estudantes estarem diante de problemas reais pode tornar a aprendizagem mais atrativa e interessante, pois os mesmos se envolvem com suas próprias aprendizagens, os conhecimentos que devem ser construídos passam a ser mais importantes ou relevantes para as suas próprias vidas profissionais. “Os alunos e docentes num ambiente educacional PBL são mais dedicados e produtivos.” (RIBEIRO, 2008, p.30)

O que nos remete ao comprometimento maior principalmente por parte dos estudantes, que neste caso são “chamados” para a responsabilidade por sua aprendizagem, e também do grupo ao qual fazem parte, a postura perante ao grupo terá que ser ativa, e que cada um deverá contribuir para uma possível resolução do problema a ser estudado.

A aprendizagem não pode ser vista como um processo de recepção passiva de informações, é notório que perante a sociedade contemporânea não podemos restringir o ensino a uma acumulação de informações, é preciso que saibamos também o que fazer diante delas, como já mostramos o PBL pode auxiliar nesse sentido, por ser uma prática inovadora.

A Aprendizagem Baseada em Problemas contrapõe o cenário no qual o papel do discente é reduzido à apenas a reprodução de modelos apresentados pelo professor.

Os estudantes na dinâmica do PBL são protagonistas diante da aprendizagem, são mais ouvidos, devem contar com ampla gama de materiais, por exemplo, teses, dissertações e artigos para os auxiliarem na busca de pontos a ser aprendidos, na busca da resolução do problema ou pelo menos o encaminhamento do mesmo.

O papel do tutor, para que o estudante se sinta confortável na situação de protagonista, é o de estimular a participação dos estudantes, orientá-los para que busquem as informações pertinentes ao problema a ser estudado e explorado. Cabe ao tutor conduzir o ciclo de atividades do PBL, os estudantes precisam estar cercados de informações acerca da dinâmica para que se sintam seguros e a vontade para participar das aulas de forma ativa e participativa como prevê o PBL.

Uma possibilidade para a execução dessa dinâmica é a seguinte: identificação do problema proposto, formulação de hipóteses, resumo das hipóteses, formulação dos objetivos da aprendizagem, estudo de cada objetivo de aprendizagem e rediscussão do problema perante aos novos conhecimentos adquiridos. Existem outras possibilidades de dinâmicas.

De acordo com Ribeiro,

> O PBL é uma metodologia de ensino e aprendizagem que utiliza problemas coerentes para com a futura atuação dos alunos como profissionais e cidadãos – para iniciar, enfocar e motivar a aprendizagem dos conhecimentos conceituais, procedimentais e atitudinais objetivados. (RIBEIRO, 2008,p.24)

A aprendizagem não pode ser vista como um processo de recepção passiva e acumulação de informações, mas como construção de conhecimento. Por acreditarmos que a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) proporciona aos alunos a construção de seus conhecimentos, resolvemos utilizá-la em nossa pesquisa.

> O PBL, como outros métodos construtivistas, está pautado no pressuposto de que o conhecimento de pesquisas educacionais, especialmente na área da psicologia cognitiva, que indicam que o trabalho dos alunos com a vida real, particularmente em grupos, favorece a aprendizagem. (FILHO; RIBEIRO, p. 24)

Uma das mais importantes características do PBL é o fato de uma situação problema sempre preceder a apresentação dos conceitos necessários para sua solução.

Resumindo, destacamos novamente que o trabalho dos alunos é feito em pequenos grupos facilitados por tutores. Esses são chamados de grupo tutorial que atuam com o apoio de um tutor, cujas atribuições são estimular o processo de aprendizagem dos estudantes e de ajudar o grupo a conduzir o ciclo de atividades do PBL, utilizando-se diversos meios, dentre eles a apresentação de questões pertinentes à situação proposta. Os estudantes, estabelecidos no grupo tutorial, identificam o problema, investigam, debatem, interpretam e produzem possíveis justificativas, soluções ou resoluções, ou recomendações.

Os alunos devem ter a sua disposição e devem ser estimulados a utilizarem os recursos da internet, biblioteca, livros e artigos acadêmicos como fontes de informações. Também podem ser confeccionados artefatos concretos como projeto, maquete, protótipo, modelos e etc.

Acima indicamos algumas características da dinâmica envolvida no PBL, acrescenta-se a elas alguns elementos imprescindíveis: um problema da vida real ou realístico sempre precede a discussão da teoria; demanda um processo formal de solução de problemas; a resolução do problema envolve o trabalho dos alunos em grupo; implica o estudo autorregulado e autônomo dos alunos; idealmente favorece a integração de conhecimentos.

Segundo Ribeiro (2008), o processo (ou dinâmica) do PBL consiste de uma sequência de ciclos de trabalho com problemas, que podem ser divididos nos seguintes passos:

I – Apresentação de um problema, o qual é analisado e definido pelos alunos em grupos.

II - Após a identificação do problema, os alunos, assistidos pelo tutor, discutem a situação proposta livremente e levantam hipóteses a respeito das causas.

III - Os alunos avaliam a propriedade das hipóteses arroladas, confrontando-as com os dados encontrados nos problemas, e tentam solucioná-lo com seus conhecimentos prévios. Este passo também é uma oportunidade para que os alunos tragam à luz seus conhecimentos (que podem ser incompletos ou equivocados) sobre o assunto em questão, que poderão ser retificados pelos tutores.

IV - Como não obtêm sucesso na solução do problema com os conhecimentos de que dispõem, os alunos levantam os pontos ou questões de aprendizagem (conceitos, teorias, etc.) necessárias para solucioná-lo.

V - Planejam o trabalho do grupo (Quais pontos serão priorizados?). Quem irá pesquisá-los? Quais fontes serão utilizadas? Quando, como e onde as novas informações serão compartilhadas?).

VI- Os alunos buscam os conceitos e informações de forma autônoma.

VII- Compartilham as informações ou estudos em encontros independentes do tutor.

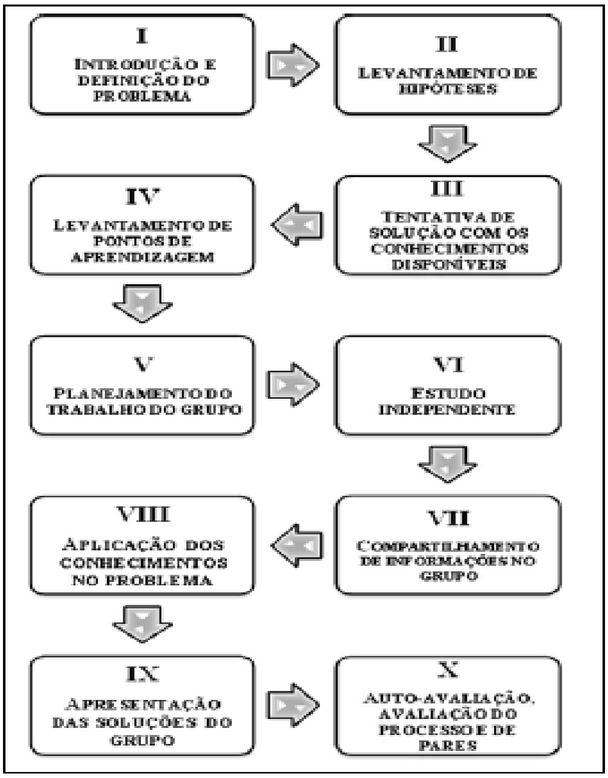
VIII- Aplicam os conhecimentos desenvolvidos na resolução do problema, quantas vezes forem necessárias, até atingirem uma solução que o grupo considere satisfatória.

IX- Implica na produção de algo concreto (relatório, projeto, planta, maquete, vídeo, pôster, etc.), que é apresentado para o tutor, examinadores e outros grupos durante as sessões tutoriais.

X- Fechando o ciclo, os alunos também avaliam o processo, seu produto, o trabalho em grupo, seu próprio desempenho e o dos demais integrantes do grupo.

A avaliação de pares e a auto avaliação são essenciais para o desenvolvimento das capacidades meta-cognitivas e a promoção da aprendizagem contínua e independente.

O ciclo descrito anteriormente foi elaborado por Ribeiro (2008), abaixo apresentamos um diagrama retirado de seu trabalho para entendermos como funciona o ciclo de atividades do PBL.



Ciclo de trabalho com um problema no PBL
Extraído de RIBEIRO, (2008)

Figura 1- Ciclo de Atividades PBL

Apresentamos aqui alguns aspectos fundamentais do que entendemos por Aprendizagem Baseada em Problemas, com intuito de mostrar os motivos que levaram nossa escolha por esta metodologia de ensino que vem sendo explorada principalmente em áreas como a Medicina e Engenharia, e que nos indica ter bons frutos para a Educação Matemática.

Já apresentamos resumidamente algumas características importantes da Resolução de Problemas, da Modelagem Matemática e da Aprendizagem Baseada em Problemas, agora estamos em condições de destacar quais são os principais aspectos comuns entre essas metodologias, assim como suas peculiaridades.

Destacamos as principais características de três metodologias ativas utilizadas no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, podemos evidenciar que as mesmas iniciam a construção de conhecimentos com a apresentação de um problema, com intuito de motivar os estudantes, porém vale ressaltar que neste aspecto o PBL difere das outras pelo fato dos problemas obrigatoriamente estarem relacionados com a futura prática profissional dos estudantes.

Na RP existem dois momentos de leitura do problema, a individual e a coletiva, destaca-se que no PBL a segunda é mais privilegiada. O professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema. O trabalho dos alunos na RP é feito por meio de cooperação e colaboração, buscando a resolução do problema, os alunos são considerados co-construtores dos conceitos a serem abordados, já no PBL, além desses aspectos, os integrantes dos grupos têm tarefas delegadas (por exemplo, coordenador e relator) para auxiliá-los na organização dos estudos e pesquisas complementares, objetivando a resolução do problema, os possíveis encaminhamentos para a mesma.

O papel do professor na Resolução de Problemas é observar, analisar o comportamento dos alunos e estimular o trabalho colaborativo, o professor é mediador e leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias. Destacamos que no PBL, além disto, o Professor/tutor deve permitir que os estudantes apropriem-se do problema de forma independente e autônoma.

As soluções do problema no PBL são apresentadas a todo grupo por meio de um relatório, protótipo, maquete, reuniões, entre outras formas, já na RP elas são apresentadas na lousa, sejam elas erradas, certas ou feitas por processos diferentes para que todos os alunos analisem e discutam e por fim o professor faz a discussão sistemática dos novos conceitos.

Na MM o trabalho pode ser realizado por meio de projetos, ocorre a divisão dos alunos em grupo (como no PBL), os estudantes elegem temas de interesse para serem investigados por meio da Matemática. Já no PBL a construção do conhecimento se dá por meio de problemas (ou situações) reais ou realísticos, que estão diretamente ligadas com a prática de um determinado profissional, este problema é apresentado (selecionado, organizado ou adaptado) pelo professor (ou grupo de professores) com base nas competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes, esses geralmente não participam da escolha do tema.

Outra diferença é que os trabalhos dos alunos são realizados por meio de tutorias com revezamentos de papeis pelos estudantes.

Nossa justificativa para a escolha da Aprendizagem Baseada em Problemas perante as outras metodologias citadas aqui, se ancora em suas peculiaridades que favorecem a aprendizagem da teoria articulada à prática profissional como principal norteador do ensino, permitindo o enfrentamento de desafios que surgem com novas demandas da sociedade contemporânea, onde o profissional deve agir e intervir de forma ativa, ética e criativa.

Buscando resumir as considerações acima a respeito da Resolução de Problemas, Modelagem Matemática e Aprendizagem Baseada em Problemas, organizamos um quadro para sintetizar as diferenças e semelhanças entre elas.

ASPECTOS	METODOLOGIAS
Utilização de um Problema na construção de conhecimento.	RP; MM; PBL
O aluno é o centro do processo de ensino e aprendizagem, sua participação é de forma ativa.	RP; MM; PBL
Trabalho realizado através de projetos	MM; PBL
Trabalho realizado por meio de tutorias com revezamentos de papeis pelos estudantes.	PBL
Os problemas são reais ou realísticos e exclusivamente pertinentes à futura atuação profissional.	PBL
O professor/tutor deve motivar e estimular o trabalho colaborativo.	RP; MM; PBL
Ambiente de aprendizagem é baseado na indagação e investigação.	RP; MM; PBL
Aproveitamento de conhecimentos prévios dos alunos.	RP; MM; PBL
Dinâmica de aula em grupos de alunos.	RP; MM; PBL
Tutor ou professor deve permitir que o estudante se aproprie do problema de forma independente e autônoma.	RP; MM; PBL
Formalização final realizada pelo professor.	RP; MM; PBL
Leitura, análise e discussão dos problemas apresentados (em grupos)	RP; MM; PBL

Quadro 1- Aspectos relacionados às metodologias de ensino.
Fonte: Elaborado pela autora

Apresentamos as principais características da Aprendizagem Baseada em Problemas, encerraremos este tópico com sucintos comentários a respeito do papel do professor (que atuará como tutor de acordo com o PBL) na dinâmica proposta pelo PBL.

Conforme indicamos anteriormente, na Aprendizagem Baseada em Problemas, o professor/tutor tem um papel importante, que é permitir que o estudante se aproprie do problema de forma independente e autônoma. Essa metodologia requer um esforço dos professores no sentido de propiciar modelos (problemas) e cenários de ensino que permitam o trabalho e a aprendizagem em níveis adequados de complexidade e relevância.

É imprescindível, portanto, a formação de um docente prático-reflexivo, dotado de conhecimentos, habilidades e, principalmente, disposto a refletir sobre sua prática. O professor deve sempre avaliar seu trabalho, verificando se a sua proposta metodológica está adequada à realidade, se a relação professor-aluno é frutífera e favorece a aprendizagem significativa.

> Esta atitude interdisciplinar do professor deve ser construída pelo autoconhecimento inicial, no exercício da reflexão sobre sua prática educativa, na procura do significado para sua própria vida e de seus alunos, tornando-o um processo contínuo de construção de novo saberes e não abandonando suas práticas coerentes, mas atualizando-as e compartilhando-as com seus parceiros. (GEMIGNANI, 2012, p.11)

No próximo capítulo indicaremos dois exemplos de problemas que atendem aos preceitos do PBL, vamos explorar algumas possibilidades de resolução destacando conceitos matemáticos que poderiam ser abordados, por meio deles, assim como outros aspectos relevantes para a aprendizagem e também para a dinâmica de trabalho com o PBL.

CAPÍTULO 3

3 Sugestões de problemas para abordar conceitos matemáticos por meio do PBL

Neste capítulo apresentaremos duas sugestões de problemas reais de acordo com os preceitos da Aprendizagem Baseada em Problemas, visando o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Tanto o problema 1, quanto o problema 2, poderão ser utilizados em cursos que tenham interesse na área de saúde, ou em políticas públicas, entre outros.

3.1. Orientações Gerais

As orientações feitas neste item são gerais, e versão sobre uma sugestão de dinâmica de acordo com os preceitos do PBL, por seu aspecto mais geral também serve para as diferentes sugestões de encaminhamentos (tratamento matemático e sugestão de abordagens de conceitos matemáticos) que apresentaremos na sequencia.

Inicialmente será fundamental que o tutor (professor) ressalte os principais aspectos envolvendo a dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, promovendo a conscientização a respeito dos objetivos da metodologia e do trabalho a ser feito na busca da solução (ou encaminhamento da resolução) do problema proposto. Todos os envolvidos precisam entender que o processo se dá por meio de tutorias e possíveis consultorias, as quais substituem as aulas convencionais, favorecendo um ambiente mais dinâmico e interativo.

Na dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, os alunos deverão ser organizados em pequenos grupos, em torno de quatro ou cinco pessoas, e o professor assume a postura de tutor ou mediador da aprendizagem.

O problema será apresentado aos grupos antes dos conceitos matemáticos que serão explorados. Cada grupo deverá eleger desde o início um coordenador e um relator (ou secretário). O coordenador tem a responsabilidade de conduzir as conversas em grupo, ou seja, deverá atuar como líder da equipe. O relator deverá registrar os pontos mais importantes das reuniões, além de registrar a indicação das tarefas de cada membro do grupo. Aconselha-se que exista rotatividade de papéis entre os participantes do grupo, buscando o desenvolvimento de atitudes e comportamentos essenciais às atuações profissionais.

As sessões tutoriais devem respeitar aspectos gerais, como: a análise do problema e o planejamento da pesquisa; o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema; a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

Em relação à análise do problema e planejamento da pesquisa, destacamos a apresentação geral a respeito do problema proposto. Objetiva-se ressaltar possíveis relações da situação proposta com as futuras realidades profissionais dos estudantes, isso se dá por meio da leitura coletiva do problema, apresentação do contexto e registro de possíveis palavras ou termos desconhecidos, esses deverão ser pesquisados posteriormente. O interesse pelo problema deve ser despertado e os grupos tendem a perceber que há lacunas em seus conhecimentos, logo, faz-se necessária a realização de pesquisas acerca do assunto abordado.

A partir daí os estudantes deverão iniciar um planejamento para buscar informações acerca do problema, organizar ações e meios para trocas de experiências entre os membros da equipe. Nesta etapa, será fundamental a elaboração de hipóteses e definições das estratégias para resolver o problema, considerando o tempo disponível para executá-las, esse tempo depende da carga horária da disciplina e do planejamento do tutor (professor). Pode-se sugerir também que os grupos elaborem um projeto de pesquisa, de acordo com os objetivos do tutor.

Na etapa que envolve as ações que levarão à resolução do problema deverão ocorrer estudos, pesquisas e intervenções, contando com possíveis consultorias de outros profissionais (ou professores de outras áreas do conhecimento).

Na Aprendizagem Baseada em Problemas, o plano de aulas dificilmente se restringe a um único momento, pois após o primeiro contato com o problema surgirão conjecturas e alguns planos de ação, os discentes precisam se reencontrar a fim de apresentar e discutir tudo o que foi desenvolvido ou pesquisado (durante um determinado período). Nos encontros intermediários os grupos falam sobre suas descobertas e, com embasamentos teóricos, compartilham suas informações com os outros membros da equipe.

O tutor analisará as interpretações dos estudantes e poderá indicar encaminhamentos a respeito do trabalho com conceitos envolvidos, mesmo que englobe outras áreas de conhecimento. Entretanto o tutor precisará analisar se as decisões adotadas pelos estudantes levarão à construção de conhecimentos relevantes. Previsões e análises das dificuldades também devem ser mapeadas pelo tutor, tanto em relação aos conhecimentos gerais como ao comportamento que cada grupo possa apresentar. Reiteramos que cada um desses apontamentos, analisados de modo processual, pretendem diagnosticar a aquisição de conhecimentos transdisciplinares e, precisam, assim, ser bem estruturados.

Na última etapa da dinâmica envolvendo a Aprendizagem Baseada em Problemas deverá ocorrer a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

A socialização ocorrerá por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos, com os demais grupos e com o tutor. Propõe-se a apresentação de um relatório no qual conste a trajetória do projeto desenvolvido, as pesquisas realizadas e os resultados obtidos, inclusive a indicações de conhecimentos adquiridos. Nessa etapa as soluções podem ser apresentadas aos demais membros da sala e recomenda-se a validação das mesmas, a partir dos conhecimentos adquiridos. Momento este em que há abertura para a exposição das ideias e troca de experiências com os outros grupos.

Em relação aos processos de avaliação das sessões, ressalta-se que eles podem ter caráter tanto processual quanto formativo. Pode-se considerar na avaliação: a produção e a análise dos relatórios; os aspectos pertinentes à autoavaliação; a avaliação individual dos membros da equipe; a apropriação dos conceitos estudados; dentre outro aspectos.

Os conhecimentos adquiridos são indicados pelos próprios estudantes. O tutor ao longo do processo deverá identificar se os novos conhecimentos realmente estão sendo construídos, isto é, verificar se os métodos de resolução e os conceitos matemáticos abordados estão sendo apreendidos significativamente, inclusive quanto à formalização de conceitos. A ideia é que esses estudantes notem o quanto a apreensão do problema pode colaborar para o desenvolvimento de suas competências conceituais, atitudinais e profissionais.

Além das orientações gerais indicadas nos parágrafos anteriores, o tutor poderá discutir aspectos relacionados aos modelos matemáticos e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, essa discussão será fundamental para os encaminhamentos que sugerimos no próximo item.

É importante destacar, por exemplo, que os modelos matemáticos ajudam a fazer estimativas ou previsões, no entanto, eles geralmente não representam literalmente os fenômenos modelados, ou seja, eles não traduzem a pura realidade, mas sim fazem aproximações, e tem suas limitações em relação aos fenômenos estudados.

“Todo modelo teórico é parcial e aproximativo: não apreende senão uma parcela das particularidades do objeto representado”. (BUNGE, 2008, pág. 30).

Assim como afirma Stewart (2015, pág. 22), entendemos que “um modelo matemático é uma descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real [...]”.

Ao modelar um fenômeno do mundo real, temos como propósito entendê-lo, e quiçá fazer previsões sobre seu comportamento futuro. Stewart ressalta que:

> Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física - é uma *idealização.* Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza. (STEWART, 2015, pág. 22)

Na sequencia apresentaremos algumas sugestões de tratamento matemático, explorando diferentes conceitos. Não temos a pretensão aqui de sugerir que esses sejam os melhores ou os mais adequados para resolver os problemas propostos, já que são possíveis várias outras abordagens matemáticas, dependendo das escolhas do tutor e dos objetivos de cada curso. Buscaremos apenas ilustrar a potencialidade da Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino de noções matemáticas.

Problema 1

Microcefalia[1]

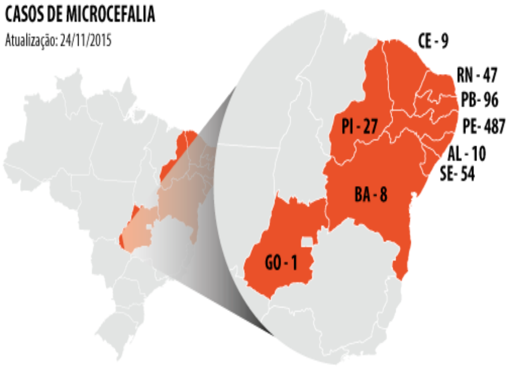


Figura 2 Casos de Microcefalia por Região
Fonte:http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/orientacao-e-prevencao/xyz-microcefalia

O que é a Microcefalia?

Microcefalia é o nome que se dá quando uma criança tem a cabeça menor do que o considerado padrão. Não é exatamente uma doença, e sim um sinal de que o cérebro pode não estar crescendo como deveria.

É o crescimento do cérebro que faz o crânio crescer. Se o cérebro realmente não se desenvolve, a criança pode vir a ter deficiência intelectual e física, em variados graus. Mas é possível uma criança ter microcefalia e não ter atrasos.

É importante lembrar que o cérebro é um órgão ainda bastante misterioso e surpreendente, e são muitos os casos de problemas cerebrais em que as crianças se desenvolveram muito melhor do que previam os médicos.

Como a microcefalia é diagnosticada?

Ainda no útero, a microcefalia pode ser diagnosticada quando a medida da cabeça (perímetro cefálico) do feto, quando comparada com outras medidas, e com a idade gestacional, fica abaixo do esperado.

[1] Texto sobre a Microcefalia retirado de http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/orientacao-e-prevencao/xyz-microcefalia pesquisado em: 15 de Julho de 2016.

É importante considerar que a medição pode não ser exata, porque depende da habilidade do profissional, da posição do bebê e da qualidade do equipamento.

Quando o bebê nasce à microcefalia é diagnosticada com uma simples fita métrica.

As autoridades brasileiras estão determinando, para efeito de monitoramento, que serão considerados casos suspeitos de microcefalia recém-nascidos (desde que nascidos depois de 37 semanas) com perímetro cefálico de menos de 32 cm.

Apenas a medida não é suficiente para determinar se há má formação. É preciso levar em conta também:

- A circunferência cefálica dos pais (se os pais também tiverem a cabeça pequena, pode ser apenas uma característica hereditária).

- O fato de o bebê ter nascido de parto normal. É recomendável repetir a medida do perímetro cefálico três ou quatro dias depois do parto, porque a cabeça do bebê tem a capacidade de "afinar" para passa pelo canal do parto, e demora alguns dias para voltar ao normal.

- As proporções do corpo da criança. Uma criança de estrutura pequena tende a ter uma cabeça menor.

Diante dos fatos expostos a respeito da microcefalia, e de possíveis informações complementares, responda:

Quais serão os impactos do aumento considerável de diagnósticos de microcefalia nas políticas públicas nos próximos anos? E nas próximas décadas? Quais são as ações dos órgãos públicos em relação a essa nova realidade? É possível a partir de um modelo matemático afirmar ou suspeitar do diagnóstico de microcefalia? Justifique sua resposta à questão anterior utilizando argumentos matemáticos.

3.2. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (1) E ORIENTAÇÕES

TRANSFORMAÇÃO LINEAR[2]

Uma diretriz para o encaminhamento do problema 1 pode ser o estudo da lei do crescimento, considerando que desde o nascimento até atingir a idade adulta, diferentes partes do corpo crescem, cada uma com um fator de escala diferente.

Vamos considerar a relação, tamanho da cabeça (t), por altura do corpo (a). Utilizaremos como critério para a lei do crescimento o delineamento de uma razão entre essas duas grandezas (representado por r=t/a).

Observe o quadro que mostra a razão do tamanho da cabeça pela altura do corpo de uma pessoa durante sua vida. Complete a coluna “Tamanho da Cabeça (t) (cm)”.

Idade (anos)	Altura do corpo (a) (cm)	Tamanho da Cabeça (t) (cm)	Razão (r)
0	50	11	0,22
1	70	15	0,21
2	79	17	0,22
3	86	18	0,21
5	99	19	0,19
10	127	21	0,17
20	151	22	0,15

Quadro 2 Dados de uma pessoa Fonte: Quadro adaptado de Nunes (2006). Geometria Fractal e Aplicações.

O fenômeno do crescimento não é proporcional, é possível compará-lo com a geometria fractal, que recebe o nome de lei de potência.

A lei de potência consiste em considerarmos os dados em largas escalas numéricas x e y, então é possível que exista uma lei de potência que exprima y em termos de x.

Considerando 10 como base do logaritmo, mas poderia ser qualquer outra.

$$logy = mlogx + b \Leftrightarrow 10^{logy} = 10^{logx^m} * 10^b \Leftrightarrow y = x^m * 10^b \Leftrightarrow y = cx^m, c = 10^b$$

Destacamos que, m é o declive da reta e b é a ordenada na origem.

[2]Esse Estudo de Apoio foi adaptado de NUNES (2006) INTITULADO: Geometria Fractal e Aplicações. Departamento de Matemática Pura Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Janeiro/2006.

Esta equação descreve a lei de potência y em função de x, em que x é uma potência cujo expoente é o declive da reta.

Vamos mostrar como o procedimento acima apresentado pode ajudar a encaminhar a resolução do problema, para isso utilizaremos como modelo matemático $y = cx^m$, m = 1 e b = 0, o modelo será reduzido a y = cx, c é uma constante. Para adaptar o modelo matemático aos dados o quadro acima, utilizaremos como parâmetro a altura do corpo em cm e o tamanho da cabeça também em cm, mesmo o modelo sendo uma função linear vale destacarmos que dependendo dos valores que iremos atribuir para as grandezas x e y pode haver uma pequena discrepância entre funções lineares encontradas pelos estudantes, caberá ao tutor alertá-los sobre isso, afinal estamos trabalhando com valores reais. Para sabermos o valor da constante c na equação y = cx temos:

Altura do corpo (a) (cm) x	Tamanho da Cabeça (t) (cm) y
50	11
70	15
79	17
86	18

Quadro 3 Altura/ tamanho da Cabeça - Elaborado pela autora

Para encontrar o valor de c, iremos pegar os valores x = 50 e y = 11:

y= cx

11= 50c

c= 11/50   c= 0,22

Assim o modelo será y = 0,22 x, com isso apresentaremos o gráfico do modelo acima definido:

Altura do Corpo (cm) x	Tamanho da cabeça (cm) y
50	11
70	15,4
79	17,38
86	18,92

Quadro 4 Altura do Corpo/ tamanho da Cabeça -Fonte: Quadro elaborado pela autora

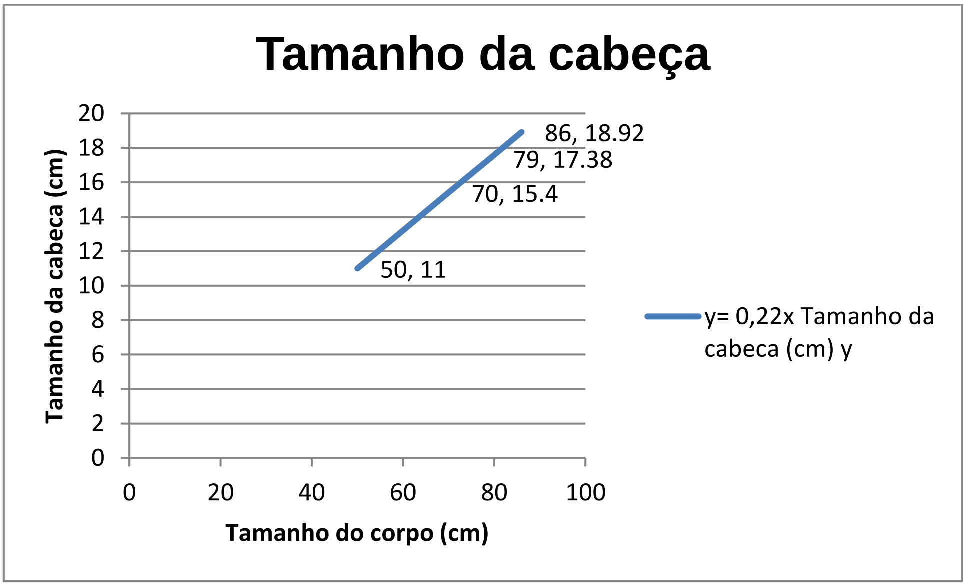


Figura 3- Gráfico elaborado pela autora.

Mais especificamente no problema 1, além de aspectos relacionados à Matemática, também poderão ser exploradas questões relacionadas a área de Medicina, com problemáticas a respeito de saúde pública e políticas públicas, entre outras.

O problema será apresentado a cada grupo, que a princípio farão a leitura juntamente com o tutor, em seguida a seleção de termos desconhecidos que estão inseridos no problema para pesquisa posterior.

O tutor ainda poderá apontar questionamentos como: Qual a relevância desse tipo de problema para o poder público? Quais conhecimentos podem estar envolvidos nele? Quais ligações este problema apresenta com o futuro campo de atuação profissional dos estudantes?

Será fundamental que o tutor faça a sugestão do tratamento matemática do problema, caso os estudantes não vislumbrem essa possibilidade. Nesse caso poderão ser propostas as seguintes questões: Será possível desenvolver um modelo matemático para expressar um possível diagnóstico da Microcefalia?

O problema apresentado poderá envolver noções de Transformações Lineares. Conforme o direcionamento do estudo de apoio. Como sugestão de trabalho, o tutor poderá propor referências bibliográficas a respeito do assunto; incentivar as relações de ajuda mútua para compreender conceitos matemáticos; fornecer outros materiais de estudo complementares; disponibilizar espaços para que os estudantes aprofundem seus conhecimentos (bibliotecas, sala de monitoria ou consultoria, plantão de duvidas), entre outras formas de estudo.

O tutor deverá escolher o melhor momento para realizar institucionalização conceitual das transformações lineares, com base no estudo de apoio para o problema 1, entretanto esclarecemos que tal momento deverá ocorrer após os alunos iniciarem a pesquisa para encontrar possíveis soluções para o problema e terem contato com as noções matemáticas envolvidas.

Outro aspecto importante que deverá ser contemplado na institucionalização é a demonstração de que o modelo obtido realmente é uma Transformação Linear. Caso os diferentes modelos obtidos pelos estudantes não sejam Transformações Lineares, o tutor (professor) deverá mostrar aos estudantes quais propriedades não são satisfeitas, indicando ainda possíveis vantagens ou desvantagens em utilizar uma Transformação Linear para modelar o problema proposto.

Indicamos que com a solução acima, o tutor pode trabalhar com os conceitos: função de modo geral, especificando ainda a função linear, os conceitos de logaritmos, suas propriedades e aplicações, pode ainda trabalhar os conceitos de transformações lineares evidenciando a lei do crescimento, ou seja, a lei de potência, onde sua consistência nos remete a considerarmos os dados em largas escalas numéricas x e y, então é possível que exista uma lei de potência que exprima y em termos de x.

3.3. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (2) E ORIENTAÇÕES

Abaixo estamos propondo uma resolução para o problema utilizando a regressão linear, ou seja, determinando um modelo matemático linear, as possibilidades aqui mencionadas são encaminhamentos a ser proposto pelo tutor em suas consultorias.

É importante ressaltar aos estudantes aspectos importantes da dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, que as aulas são substituídas por consultorias, que cada integrante terão tarefas delegadas, eles terão ao seu dispor uma gama de recursos para auxiliá-los no encontro da solução para o problema da Microcefalia.

Os objetivos dessa dinâmica precisam estar claro aos estudantes, o tutor deve motivá-los para o estudo deste problema.

Ressaltamos que é importante fazer a leitura do problema, apontando os pontos importantes que podem ajudar os alunos na solução.

O tutor deve indicar bibliografias que podem auxiliar os estudantes, os termos próprios do problema pode ser feito um pequeno dicionário para o entendimento de forma geral desse problema.

Destacamos que esta proposta de solução será apresentada como motivação a aprendizagem de conceitos, conforme mencionados abaixo, cabe ao tutor ajudar no sentido de propor a análise do problema, o planejamento da pesquisa, o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema, a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

A dinâmica se dá por planejamento, para que não fuja aos objetivos almejados, é importante que o professor/tutor, conduza de forma a não interferir no processo de aprendizagem a menos que seja necessária sua interferência.

Cabe o tutor analisar as interpretações dos alunos, podendo indicar encaminhamentos a respeito do trabalho com conceitos envolvidos, transitando por outras áreas do conhecimento.

Talvez esta resolução não seja vislumbrada pelos estudantes, neste caso, o tutor pode propor esta solução socializando-a com os demais grupos.

Destacamos que a socialização ocorre por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos, com os demais grupos e com o tutor. A solução é apresentada por meio de relatório, constando toda a trajetória, apontando os aspectos vantajosos e também os menos favoráveis do percurso percorrido por todo o grupo, quais pesquisas foram realizadas, os resultados obtidos, os conhecimentos adquiridos por este encaminhamento. Salientamos que as soluções podem ser apresentadas aos demais membros da sala recomendando a validação das mesmas, tendo como ponto de partida os conhecimentos adquiridos.

Depois de apresentada alguns aspectos da dinâmica do PBL, ressaltaremos alguns conhecimentos prévios para esta solução, caso o tutor escolha este caminho. Dentre os conhecimentos prévios, destacamos a interpretação de dados apresentados em tabelas; a identificação de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, diferença entre incógnita e variável, definição de circunferência, potenciação, noções sobre a relação entre grandezas, taxa de variação e funções, se necessário o tutor pode acrescentar ou retirar alguns conhecimentos prévios, ou mesmo retomar o estudo de determinados conceitos ou conteúdos.

Lembrando que estamos propondo um caminho a ser percorrido, cabe ao tutor fazer adaptações de acordo com os objetivos e especificidades de cada turma ou curso, pois o problema permite explorar uma quantidade considerável de conceitos matemáticos e também de outras áreas.

Entre os conceitos matemáticos que podem ser explorados pelo tutor com este encaminhamento, destaca-se, o estudo de função afim, discussão dos coeficientes a e b, o comportamento da função (ser crescente ou decrescente), e taxa de variação; além de assuntos relacionados a Estatística como, Média e Regressão Linear.

Nossa intenção aqui é apenas sugerir caminhos a serem percorridos ou propostos pelo tutor, assim as sugestões não devem ser entendidas como uma receita, e sim como uma alternativa que pode ser integralmente ou parcialmente seguida.

Vale ressaltar a autonomia do tutor no sentido de propor um caminho mais adequado para sua turma, levando em consideração os conceitos a serem aprendidos na consultoria e no curso.

REGRESSÃO LINEAR

Outra possibilidade de encaminhamento para a solução do problema é a utilização da regressão linear, que consiste em determinar um modelo linear para o problema da microcefalia, em seguida destacaremos alguns conceitos matemáticos que podem ser abordados por meio deste procedimento.

	IDADE (x) anos	TAMANHO DA CABEÇA (cm) (y)	x.y	X²
	0	11	0	0
	1	14,7	14,7	1
	2	17,4	34,8	4
	3	18	54	9
	5	18,8	94	25
	10	21,6	216	100
	20	22,6	452	400
∑	41	124,1	865,5	539

Quadro 5 Idade/Tamanho da Cabeça Fonte: elaborado pela autora

Pretendemos encontrar um modelo na forma y= ax + b, para encontrarmos os coeficientes a e b n é a quantidade de amostra de dados indicados no quadro, no caso n= 7, temos:

$$a = \frac{n.\sum x.y - (\sum x).(\sum y)}{n.\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{7.865{,}5 - 41.124{,}1}{7.539 - (41)^2}$$

$$a = \frac{6058{,}5 - 5088{,}1}{3773 - 1681} = \frac{970{,}4}{2092} \simeq 0{,}5$$

$$a = 0{,}5$$

$$b = y - a.x; y = \frac{\sum y}{n} = \frac{124{,}1}{7} \simeq 17{,}7$$

$$y = 17{,}7\ ; x = \frac{41}{7} \simeq 5{,}8 \ \ x \simeq 5{,}8$$

$$b = 17{,}7 - 5{,}8\ .0{,}5 \quad b = 17{,}7 - 2{,}9 = 14{,}8$$

$$y = 0{,}5\,x + 14{,}8$$

Iremos construir o gráfico da função y= 0,5 x + 14,8 para isso, temos:

Idade (anos)	Tamanho da cabeça (cm)
0	14,8
1	15,3
2	15,8
3	16,3
4	16,8

Quadro 6 Idade/ Tamanho da Cabeça Fonte: Quadro elaborado pela autora

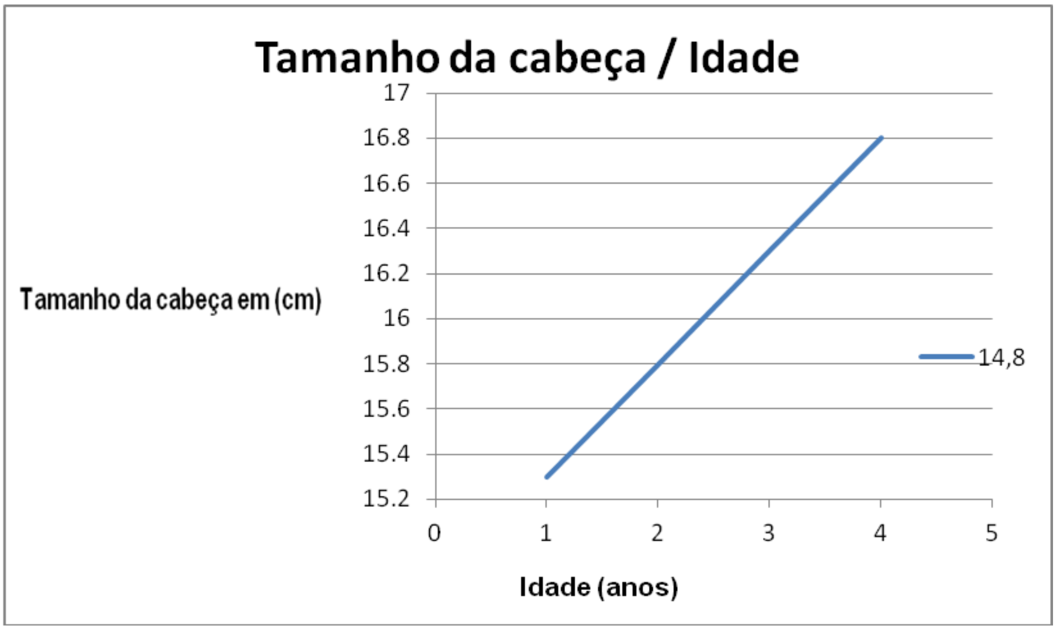


Figura 4- gráfico elaborado pela autora

O gráfico apresentado é um modelo que reduz a resolução do problema a uma função linear, assim é possível calcular em cm o tamanho da cabeça em relação à idade.

Podemos destacar alguns conceitos matemáticos que podem ser explorado se os estudantes optarem por está resolução, dentre eles, destacamos: O estudo de função afim, discussão dos coeficientes a e b, a função ser crescente ou decrescente; assuntos estatísticos como: Média, Regressão linear. Desta maneira está resolução pode auxiliar o tutor/professor, na formação dos conceitos acima destacado, por ser um problema que está presente em nossa sociedade e também fazer parte de problemas a serem encontrados por profissionais da saúde, o problema da Microcefalia encaixa perfeitamente nos preceitos do PBL.

Apontaremos algumas vantagens e desvantagens quando optamos pelo modelo de regressão e assim tornar a resolução do problema de modo linear, uma preocupação da estatística ao analisar dados, é a de criar modelos que explicitem estruturas do fenômeno em observação, o modelo de regressão é um dos métodos estatísticos mais usados para investigar a relação entre variáveis.

A análise de regressão pode ser usada como um método descritivo da análise de dados (como, por exemplo, o ajustamento de curvas) sem serem necessárias quaisquer suposições acerca dos processos que permitiram gerar os dados. Assim destacamos que, a regressão designa também uma equação matemática que descreva a relação entre duas ou mais variáveis.

Podemos destacar outras vantagens, como: fornecer informações estatísticas detalhadas sobre o modelo, permitir utilizar os parâmetros da regressão encontrados para efetuar previsões.

Falaremos sobre algumas desvantagens, como: o modelo escolhido deve ser coerente com o que acontece na prática, isso pode ser resolvido da seguinte maneira: o modelo escolhido deve ser condizente tanto no grau como no aspecto da curva, para representar em termos práticos, o fenômeno em estudo, o modelo deve conter apenas as variáveis que são relevantes para explicar o fenômeno. Nesse sentido o tutor deve orientar seus estudantes, no sentido de tomar cuidado quanto ao modelo a ser encontrada e as variáveis a ser considerada no modelo explorado.

3.4. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (3) E ORIENTAÇÕES

Nesta sugestão de tratamento matemático, o tutor pode rapidamente resgatar aspectos da dinâmica do PBL, destacando todo o processo de ajuda mútua e cooperação entre os integrantes do grupo, ressaltando a importância da participação de todos, para que o trabalho tenha excelência, e que de fato os auxiliem na construção dos conhecimentos necessários para a solução do problema.

O tutor deve orientar sobre possíveis discrepâncias de modelos exponenciais, quando se trata de dados reais, e que dependendo dos dados pode haver modelos diferentes que respondam o mesmo problema, de maneira a evidenciar que isso é comum quando se trata de dados reais. Neste sentido este problema de maneira geral é enriquecedor, pois não deixa com que o caráter real (que faz parte da dinâmica do PBL), se perca pelo caminho.

Aqui podem ocorrer às divisões de tarefas a serem pesquisadas pelos alunos, buscando resolver o problema, o planejamento é extremamente importante e pode contribuir com o êxito na resolução. O tutor pode contribuir com os estudantes, indicando referências bibliográficas a respeito de funções exponenciais e suas aplicações em modelos matemáticos, assim como trabalhos acadêmicos que os auxiliem, lembramos que o tutor tem o papel de mediar às discussões e intervir quando necessário.

É importante alertar os alunos sobre os dados apresentados no problema, discuti-los de maneira que possam entender o que estão retratando, orientá-los a pesquisarem como o problema da Microcefalia tem crescido em nosso país. E questioná-los: É possível intervir nesta realidade? Como? Porque os casos de Microcefalia têm aumentado? Quais políticas públicas podem ser feitas em curto prazo? Entre outros encaminhamentos de questões. Essas discussões e apontamentos devem contribuir com a busca de soluções.

Os conhecimentos prévios, se tratando da Matemática, englobam a potenciação e suas propriedades, suas aplicações, função linear e a construção do gráfico, leitura de dados em uma tabela, reconhecimento de grandezas inversamente proporcional.

Os conceitos matemáticos que serão explorados incluem o ensino de função exponencial, crescimento e decrescimento exponencial, discutir a taxa de variação, iniciar os estudos de logaritmos e suas propriedades.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Iremos propor a resolução utilizando o conceito de função exponencial, lembramos que $y = a^x$ é o modelo de uma função exponencial, mas para o nosso problema teremos que obter uma constante de acerto para o problema estudado, assim temos:

$y = c.a^x$, basta tomar x= 0 e y=11

$11 = c.a^0$ c= 11

Agora iremos utilizar os pontos x=1 e y=14,7, para descobrir o valor de a

$14{,}7 = 11.a^1$

$a = \frac{14{,}7}{11}$ $a \simeq 1{,}3$

$y = 11 * 1{,}3^x$

Agora apresentaremos o gráfico

IDADE	TAMANHO CABEÇA (cm)
0	11
0,5	12,54192968
1	14,3
1,5	16,30450858

Quadro 7 Idade/ tamanho da Cabeça Fonte: Quadro elaborado pela autora

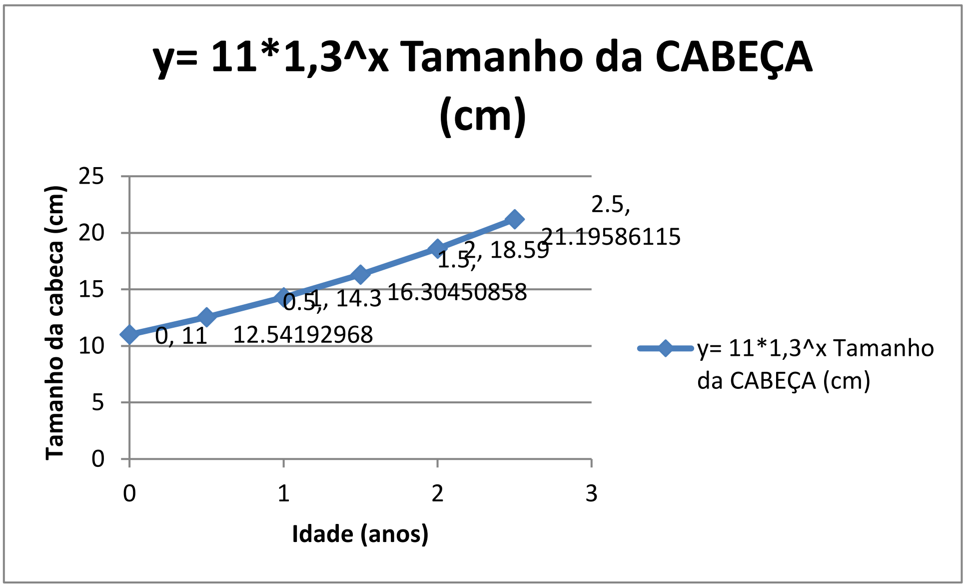


Figura 5- Gráfico elaborado pela autora

Nesta resolução proposta, o tutor pode explorar o conceito de função exponencial, discutindo com os alunos os assuntos: crescimento e decrescimento exponencial, iniciar os estudos de logaritmos. ‘É possível percebemos que um mesmo problema pode ter diversas abordagens diferenciadas, dependendo qual o caminho que a turma escolhe percorrer ou ao que o tutor encaminhe seus alunos para a mais coerente naquele determinado momento de sua aula, pois cabe ao tutor conduzir o problema para o caminho que o trará beneficio para seus alunos e seus aprendizados.

3.5. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (4) E ORIENTAÇÕES

Neste estudo o tutor e os estudantes poderão explorar o método dos mínimos quadrados aplicado ao ajuste de curvas e a relevância na busca por modelos matemáticos para uma determinada situação.

É imprescindível que haja diálogos entre os membros do grupo a respeito das primeiras reflexões, delegação de tarefas e planos de ação, registrar as informações necessárias para a resolução do problema.

Em encontros posteriores (consultorias) os estudantes poderão discutir e analisar as informações e materiais obtidos. Em seguida verificar se esses são relevantes e suficientes para resolver o problema?

Nesta solução como conhecimentos prévios, destacaremos: interpretar e analisar dados por meio de tabelas e noções a respeito de função.

Neste caso o tutor pode tanto iniciar ou aprofundar o estudo de conceitos matemáticos como: matrizes, operações e propriedades, tipos de matrizes (quadrada, transposta, matriz linha e coluna, identidade); sistemas lineares, classificação, discussão e diferentes métodos de resolução de sistemas lineares.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO AO AJUSTE DE CURVAS

O ajuste de curvas pelo método dos Mínimos Quadrados tem muitas aplicações, dentre elas, é determinar qual é a função que melhor expressa o tamanho da circunferência cefálica de uma pessoa conhecendo sua idade (em anos).

A tabela abaixo mostra a idade em anos, e o tamanho da cabeça em centímetros (cm):

IDADE (ANOS)	TAMANHO DA CABEÇA (CM)
0	11
1	14,7
2	17,4
3	18

Quadro 8 Idade/Tamanho da Cabeça Fonte: Quadro elaborado pela autora

Pretendemos modelar este problema a uma função do tipo: $y(x) = \alpha + \beta x$

Neste caso, iremos encontrar os valores de α e β de acordo com os dados da tabela acima, vamos escrever os dados na forma matricial, assim temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; y= \begin{pmatrix} 11 \\ 14,7 \\ 17,4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Vale ressaltar que A^t é denominada como matriz transposta de A.

Assim temos:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}; A^t \ y = \begin{pmatrix} 61,1 \\ 103,5 \end{pmatrix}$$

Montaremos um sistema com as incógnitas α e β:

$$\begin{cases} 4\alpha + 6\beta = 61,1 \\ 6\alpha + 14\beta = 103,5 \end{cases}$$

Reduzimos a matriz a um sistema 2 X 2, onde sua resolução pode ser feita pelo método da substituição, que neste caso, é o mais conveniente.

Desta maneira os valores de α e β são:

α=11,72 e β= 2,37

Com os valores acima calculados, podemos voltar a função: y(x)= α + βx

y(x)= 11,72 + 2,37x

O modelo acima nos remete a uma função linear, o que nos permiti construir seu gráfico conhecendo alguns valores. Assim temos:

FUNÇÃO	Y(X)= 11,72 + 2,37X
IDADE(ANOS)	TAMANHO CABEÇA (CM)
0	11,72
1	14,09
2	16,46
3	18,83

Quadro 9 Idade/ Tamanho da Cabeça Fonte: Quadro elaborado pela autora

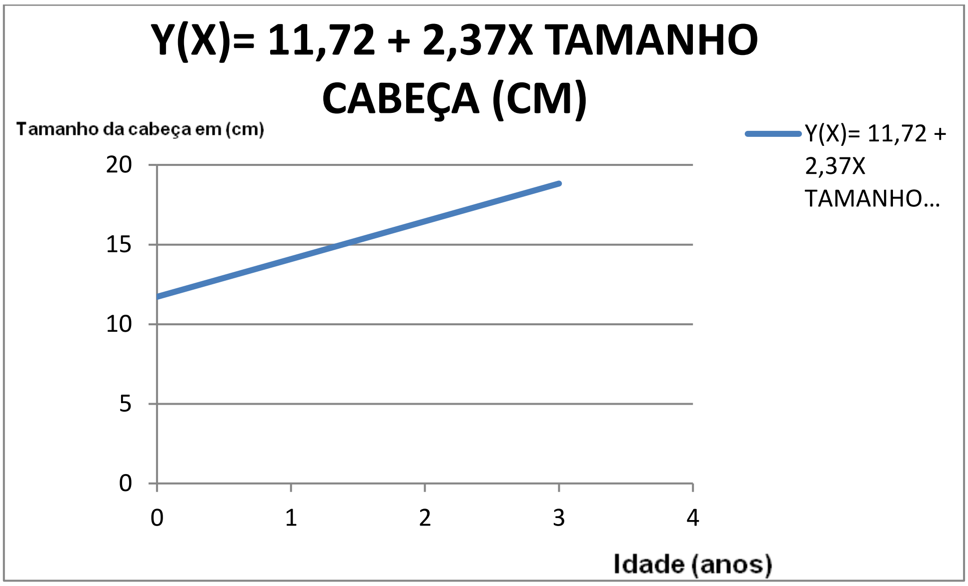


Figura 6- Gráfico Elaborado pela autora

Nesta solução, podemos explorar os estudos de Matrizes suas propriedades e definição, Operações envolvendo as Matrizes (adição, subtração e multiplicação), Sistemas Lineares e suas classificações, discussão de diferentes formas de resolver um sistema linear, podemos destacar os métodos da adição, substituição, escalonamento, uso de determinantes, entre outros métodos que o tutor achar mais conveniente.

Lembramos que estamos deixando como proposta alguns encaminhamentos de soluções, é evidente que diante da proposta do PBL pode surgir outras soluções trazidas pelos estudantes, elas deve, ser exploradas de forma a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dos grupos envolvidos na dinâmica que o PBL propõe a seus estudantes.

Desta maneira também pode surgir alguma solução que não seja adequada para o problema, esta deve ser discutida, porém o tutor pode ressaltar quais são os objetivos que serão almejados com tais problemas a serem explorados.

No PBL é preciso que os alunos entendam que cada problema a ser explorado, tem vários objetivos e expectativas de aprendizagens, envolvendo a inserção de novos conceitos ou até mesmo a aplicação de conceitos já estudados.

Problema 2

No problema 2 abordaremos o cálculo da dimensão fractal da irregularidade do contorno de células e estruturas que formam os tumores malignos.

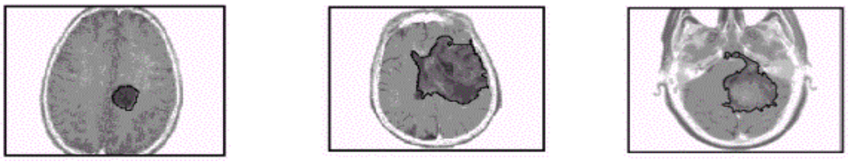


Figura 7 http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Podemos de alguma maneira tentar caracterizar qual estágio se encontra os tumores malignos no sistema nervoso central. As imagens acima foram adquiridas através de ressonância magnética, das quais foram comparadas imagens de cistos (tumores benignos), imagem de gliomas (tumores malignos) e imagens de lesões massivas. Com a técnica da dimensão fractal é possível obter uma melhor diferenciação entre tumores benignos dos malignos pelo fato destes possuírem características marcante através de maior irregularidade em seu contorno. Assim, extraindo-se a dimensão fractal destes contornos, pode-se classificar os tumores malignos dos benignos e, posteriormente, o estágio em que se encontra os tumores malignos.

Analisando as imagens a seguir, utilizando o processo de contagem das caixas, cada imagem gerará um sistema de pontos, que por sua vez dá origem a uma reta que pode ser observada na imagem 8 e 9. É possível construir um gráfico que pode ajudar no diagnóstico? Apresente-o.

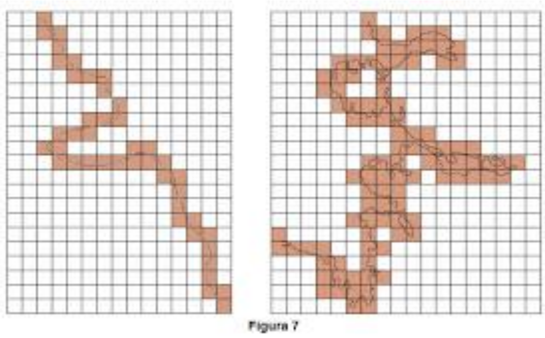


Figura 8 http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando salvar.html?m=1

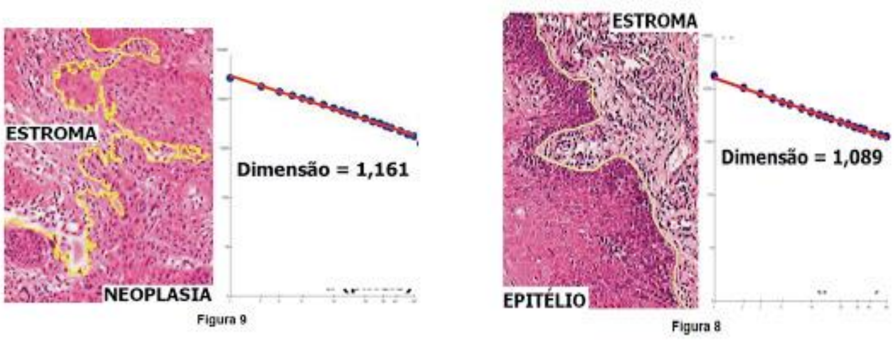


Figura 9 – Gráfico de Diagnóstico de tumores

http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Estudo de apoio para o Problema 2

O **tapete de Sierpinski** é construído cortando-se o nono central de um quadrado, cortando depois os centros dos oito quadrados mais pequenos que ficam, e assim por diante. O análogo tridimensional é a **esponja de Menger**, uma rede aparentemente sólida com uma superfície infinita e volume nulo.

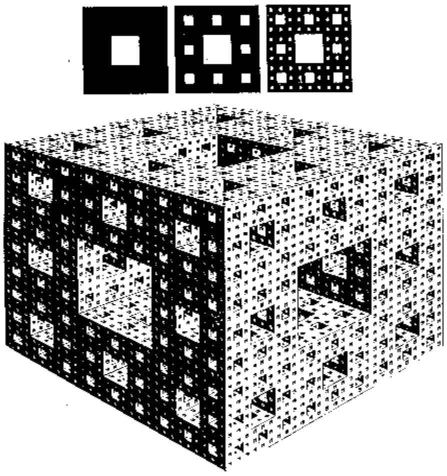


Figura 10 - J.Gleick,Ed.Gradiva,1994,p.139.Figura7-Tapete de Sierpinski

A partir da construção desses fractais, podemos introduzir a geometria fractal ou geometria da natureza em sala de aula.

A prática pedagógica utilizada atualmente no ensino da Matemática procura aproximar cada vez mais os fundamentos teóricos da realidade do aprendiz, correlacionando, para isso, conhecimentos empíricos a aspectos observados no mundo em que vivemos para construção do conhecimento.

Dentro desta perspectiva, trazer para a sala de aula atividades que ao mesmo tempo desenvolvam o raciocínio lógico-matemático e utilizem elementos do mundo concreto do aluno, satisfaz plenamente à expectativa que a metodologia aplicada impõe.

É importante ressaltar que as atividades a serem realizadas devem ser planejadas de forma a promover a efetiva participação de todo o grupo, levando, de uma forma cooperativa e homogênea, todos às conclusões esperadas.

A busca da interação entre um novo cotidiano–prático e participativo–e uma organização de conteúdos mais abrangente tornará possível a introdução de teorias desenvolvidas mais recentemente, por níveis acadêmicos superiores, gradativamente ao longo do desenvolvimento curricular da Matemática.

Reforçando a idéia de que alunos precisam experimentar a Matemática por caminhos diferentes do que aplicar algoritmos de papel e lápis a exercícios rotineiros, a Geometria Fractal vem permiti-los explorar os conceitos matemáticos trabalhando com as mãos, tanto na construção de modelos, quanto no desenho de quadrados consecutivas interações dos fractais clássicos.

Como exemplo de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula, podemos citar a construção do fractal triminó.

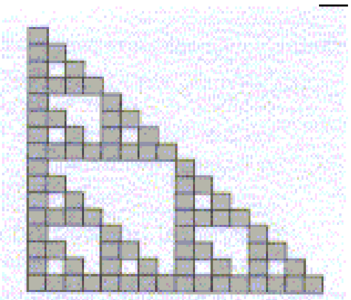


Figura 11- Fractal Triminó

Para se construir esse fractal triminó de nível3, deve-se pegar as pecinhas e, primeiramente fazer a conexão de 3 quadrados em forma de L,de modo que este será um fractal triminó de nível1.A partir daí, deve-se substituir cada peça quadrada por um triminó L, obtendo-se assim um fractal triminó de nível2. Repetindo o processo executado na obtenção do fractal triminó de nível2, obteremos o fractal triminó de nível3. Após a construção desse fractal pudemos explorar o número de peças que foi utilizado, perguntando qual seria o número de peças necessárias para se construir um fractal triminó de nível4?E de nível5?E de nível n? Facilmente aluno irá perceber que a fórmula é 3 elevado ao nível que se procura,então nível 1=3^1=3; nível 2=3^2=9; nível 3=3^3=27;....e nível n=3^n.

Uma outra sugestão é construir o cartão fractal(Triângulo de Sierpinski).

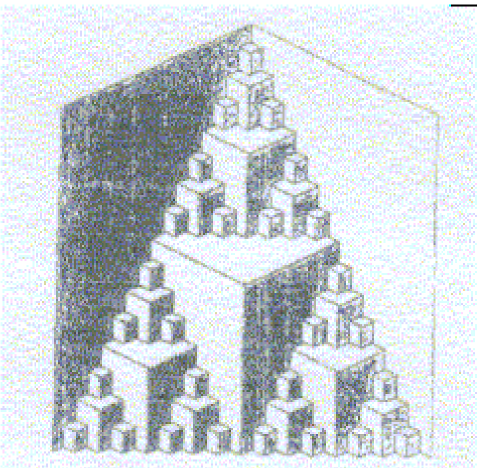


Figura 12- Cartão Fractal

Transcendendo as limitações impostas pela Matemática Clássica. Mandelbrot, em seu trabalho, ressaltou que os matemáticos foram, de certa forma, iludidos pela Natureza, que mostrou ter mais imaginação na diversidade de formas que apresenta. A percepção de tais formas levou esses matemáticos a estudá-las sob os aspectos que Euclides não alcançou, tomando-se, assim, um estudo das "formas sem formas" ou "morfologias dos amorfos". Foi aceitando este desafio que Benoit Mandelbrot concebeu e desenvolveu esta Geometria da Natureza e implementou o seu uso em inúmeras aplicações. A partir desta teoria descreveu vários dos irregulares e fragmentados modelos que encontramos em nossa volta através da família de formas que chamou *fractais*.

Assim desta maneira é possível apresentar o gráfico que pode ajudar um médico em seu diagnóstico.[23]

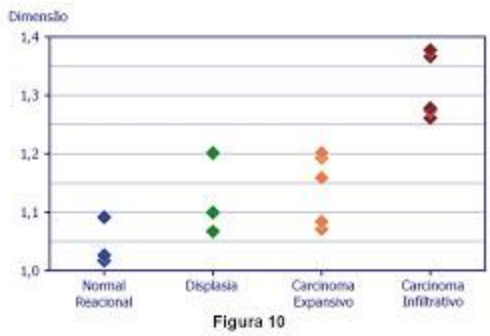


Figura 13- Gráfico de Diagnóstico http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Fractais- Contexto Histórico[34]

Já que estamos falando sobre os fractais cabe nos deixarmos claro ao leitor o que venha ser.

No final do século XIX e no início do século XX, múltiplos conjuntos de pontos do plano Euclidiano começaram a aparecer na matemática. Ainda que, fossem apenas curiosidades, estes conjuntos designados fractais, ganharam importância.

[3] O estudo do problema 2 foi retirado do Livro Álgebra Linear com Aplicações. Décima Edição. Howard Anton e Chris Rorres.

[4]Apresentando os fractais em sala de aula**.** Disponível em :<www.sbembrasil.org.br>files>trabalhos em 04 de Março de 2016.

Atualmente é reconhecido que estes conjuntos revelam fenômenos biológicos e físicos.

Muitos fractais podem ser transformados em fragmentos menores (que são semelhantes ao fractal maior). Vale ressaltar que quando um fractal é aumentado, mantém-se tão complexo quanto a figura original.

Quanto mais ampliado estiver um fractal, maior detalhe é possível distinguir. Na realidade, estas figuras resultam de múltiplas interações da aplicação de modelos matemáticos, sendo que o princípio de auto-semelhança resenta a chave para a criação de fractais.

Presentes na Natureza em diversas manifestações, os fractais têm ocupado os interesses e o estudo de inúmeros matemáticos, que, nas investigações, têm exposto resultados extraordinários e surpreendentes fenômenos.

A seguir veremos algumas imagens dos fractais na natureza.

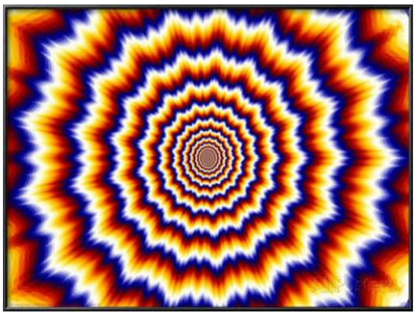



Figura 14- Exemplo de Fractais no cotidiano. Retirado de: aromadadoamor.blogspot.com

3.6. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO E ORIENTAÇÕES PARA O PROBLEMA 2[5]

Apresentaremos a seguir uma estratégia para o desenvolvimento de modelos matemáticos que possibilitem o estudo e diagnóstico de tumores malignos do ponto de vista matemático.

[5] Está solução foi uma adaptação do artigo de Vesterna, Kobiyama intitulado: A geometria fractal da rede de drenagem da bacia hidrográfica do Caeté, Alfredo Wagner-SC. 2010. Árvore vol.34 no.4 Viçosa July/Aug.2010

No problema 2 há questões envolvendo problemáticas na área da saúde, políticas públicas, entre outras. Podendo ser aplicado em cursos de Medicina, Enfermagem, Odontologia, entre outros.

Por se tratar de um problema que está relacionada com prática destes profissionais, ele não foge as características essenciais para a aplicação da metodologia que estamos propondo.

Primeiramente o tutor pode propor que os alunos pesquisem e tragam para os encontros tutoriais imagens de células que contém tumores de forma geral, motivando o estudo de aplicações dos fractais na medicina.

Os alunos em pequenos grupos de 4 ou 5 alunos, devem levantar os pontos de aprendizagem, neste caso o tutor pode sugerir caminhos a serem seguidos, indicar leituras, entre outros. Uma ferramenta matemática denominada contagem de caixas pode auxiliar no diagnóstico de tumores.

Imagine uma figura qualquer, por exemplo, a folha de uma planta e que sobre esta imagem, seja colocada numa malha quadriculada transparente, como a figura abaixo:

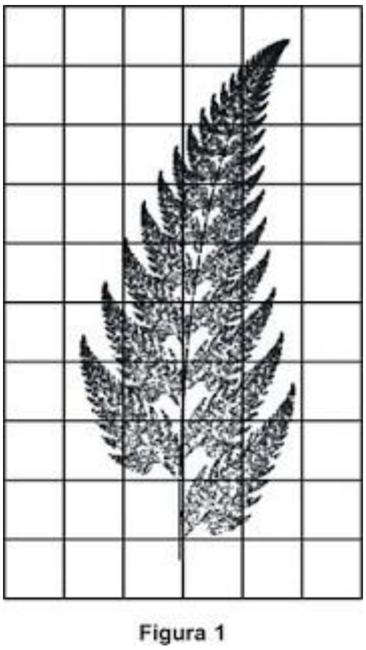


Figura 15 – Planta sobre malha quadriculada Fonte: Retirado de http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

A malha é composta de um número x de quadradinhos chamados de caixas, sendo que a medida do lado da caixa é y. Colocaremos sobre esta figura outras malhas do mesmo tamanho, porém mais finas, ou seja, malhas cujas caixas tenham medidas menores do que y. Observe a figura 2 a seguir:

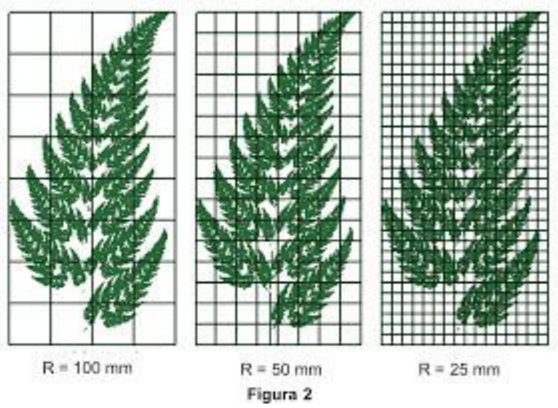


Figura 16- Planta sobre malha quadriculada. Fonte: extraído de http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Podemos contar quantas caixas de cada malha são necessários para cobrir a imagem. No primeiro caso, cada caixa tem 100 milímetros de lado sendo necessários 26 caixas para cobrir a imagem. Da folha; na segunda malha que possui caixas com lados medindo 50 milímetros são necessários 90 caixas; e finalmente, a terceira malha com caixas medindo 25 milímetros são necessários 315 caixas. Com isso temos três pontos, dentre, (100; 26), (50; 90), (25; 315). Podemos com os pontos gerados construir um gráfico, com o modelo a seguir y=ax, onde a é a inclinação ou coeficiente angular da reta. Esse coeficiente angular fornece também a dimensão do gráfico que pode ser inteira ou fracionária como geometria fractal. Iremos a seguir apresentar o gráfico:

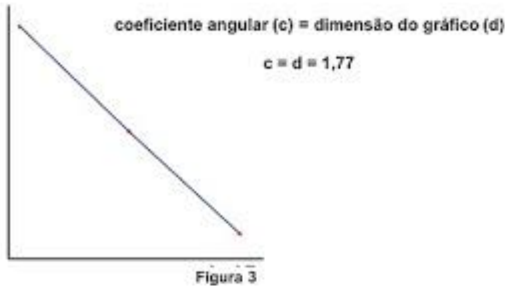


Figura 17- Gráfico do modelo matemático. Fonte: extraído de http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica- ajudando-salvar.html?

Esta ferramenta matemática pode ajudar no processo de diagnóstico de tumores malignos.

Como orientação para este encaminhamento, primeiramente os alunos em grupos devem fazer a leitura do problema, em seguida levantar os pontos de aprendizagem e delegar tarefas aos integrantes do grupo.

Indicamos como sugestão de estudo o processo de contagem de caixas, já que é um processo matemático que pode ajudar na resolução do problema. Como conhecimentos prévios, destacamos identificar informações explicitas e implícitas em gráficos, reconhecer grandezas inversamente proporcionais e grandezas diretamente proporcional.

Com este encaminhamento de estudo o tutor pode iniciar ou aprofundar conhecimentos a respeito de: função linear, crescimento e decrescente, o estudo da contagem de caixas com a utilização de malha quadriculada.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como considerações finais, iremos retomar as questões norteadoras desta pesquisa, apresentaremos possíveis respostas de acordo com o trabalho que desenvolvemos, destacando os principais aspectos de nossa aprendizagem com a pesquisa, além disso, indicaremos outras possibilidades de pesquisas como desdobramento da nossa e também limitações do nosso estudo, de acordo com os procedimentos metodológicos utilizados (pesquisa exploratória).

Tínhamos interesse em apontar as potencialidades teóricas da Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Nesse sentido, buscamos indicar a utilização desta metodologia em outras áreas do conhecimento, entre elas, Engenharia e Medicina. Nossa busca por pesquisas tiveram como base o banco de dissertações e teses da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Nível Superior). Realizamos estudos teóricos que justificassem nossa escolha, ressaltamos que exceto a pesquisa de Souza (2016), não encontramos outras, no ensino de Matemática, que utilizassem esta metodologia.

Os resultados das pesquisas encontradas indicavam êxito no uso do PBL na formação profissional. Destacamos que o PBL tem o potencial de poder tornar a aprendizagem mais significativa, por articular teoria e prática.

Buscamos mostrar quais desvantagens o uso do PBL pode apresentar no ensino e aprendizagem, salientamos que se trata de uma inovação no ensino, por isso é necessário cautela, como o trabalho dos alunos se dá por meio de tutorias substituindo as aulas, os objetivos precisam estar claros, a formação dos conceitos deve ter um olhar cuidadoso do professor/tutor, já que os estudantes são responsáveis por sua busca. As fontes a serem pesquisadas precisam ser seguras. Esses entraves podem ser superados pelo planejamento cuidadoso realizado pelo tutor.

Entendemos com esta pesquisa que o PBL pode ser uma proposta inovadora para o ensino de matemática, tornando a disciplina mais próxima da realidade profissional dos estudantes, por todo seu caráter real ou realístico, atendendo as demandas impostas por nossa sociedade.

Apresentamos como produto final problemas e orientações que podem nortear uma abordagem de conceitos matemáticos por meio da dinâmica do PBL.

Destacamos que existem desdobramentos do nosso estudo que podem ser explorados em outras pesquisas, como aplicabilidade dessas atividades em sala de aula e as potencialidades práticas do PBL, assim como possíveis entraves após sua aplicabilidade.

Por se tratar de um estudo pouco explorado, realizamos uma pesquisa exploratória para formular hipóteses operacionalizáveis.

Com este estudo observamos novas maneiras de inovar em sala de aula, desmistificando o ensino da matemática, por exemplo, permitindo superar o fato de que muitos estudantes não veem uma aplicação direta dos conceitos matemáticos que estudam, e que o PBL mostra uma maneira inovadora de abordar conhecimentos matemáticos por meio da prática profissional.

Outro aspecto relevante ao nosso aprendizado refere-se às peculiaridades e pontos em comuns de algumas metodologias ativas utilizadas no ensino de Matemática, no caso, a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática, além do PBL, pois precisávamos ter clareza a respeito dessas diferenças tanto para nós quanto para os leitores.

No começo tivemos muitas dificuldades por não encontrar pesquisas que retratassem a metodologia aqui proposta, no ensino de conceitos matemáticos. Encontramos algumas pesquisas utilizando o PBL nas áreas de Engenharia, Medicina e Biologia. Por se tratar de uma pesquisa que aborda um assunto relativamente inovador para o ensino de matemática, não encontramos pesquisas que nos auxiliassem, exceto Souza (2016).

Propor o PBL no ensino de matemática foi algo que julgamos inovador, porém diante das exigências impostas pela sociedade contemporânea, faz-se necessário buscar abordagens diferenciadas (metodologias ativas). Nesse sentido, nossa pesquisa poderá fomentar outros estudos sobre o tema.

Depois da escolha da metodologia a ser utilizada, nossa preocupação passou a ser a escolha do conteúdo matemático a ser abordado em nossa pesquisa, optamos por apresentar a possibilidade de diversos encaminhamentos de solução para um problema, o que está de acordo com a dinâmica do PBL e destacar em cada um deles os conceitos matemáticos que poderiam ser abordados, ou seja, partimos do problema para selecionar os conceitos e não o contrário.

Acreditamos que abordar conceitos matemáticos exclusivamente de maneira abstrata pode fazer com que o conhecimento matemático não seja tratado com a devida importância nos cursos universitários, assim propor uma “nova” metodologia pode trazer significados novos, sem deixar de lado a importância da formalização e rigor matemático.

O PBL tem muitas potencialidades, entre elas, a formação de um profissional que seja mais seguro em seu ambiente de trabalho, apresenta inovações, não tem receio em arriscar, são sujeitos autônomos.

O fato de o aluno construir seu conhecimento pode torná-lo mais significativo, o que é necessário para que ele possa entender e aplicar os conceitos abstratos da matemática na resolução de problemas.

Uma desvantagem que o PBL pode trazer está relacionada a alunos introspectivos, isso pode dificultar as tarefas ou até sua exposição perante o grupo, já que cada aluno tem uma tarefa, depois ele deverá compartilhar a conclusão da mesma com todo o grupo no qual está inserido.

Os alunos precisam entender que terão tarefas delegadas e que trabalhar em cooperação com o grupo será fundamental para o sucesso (resolução do problema).

Outra dificuldade que pode ocorrer está relacionada aos professores, já que é uma metodologia ainda pouco explorada no ensino de Matemática, pode trazer ao profissional certa resistência em sua utilização em sala de aula.

Acreditamos que o PBL tem muitas potencialidades que poderão beneficiar professores e estudantes, visto que conceitos matemáticos, abstratos com uma linguagem própria, podem ser abordados por meio de situações que estão diretamente relacionadas a determinadas áreas de atuação profissional, possivelmente não causando temor ou desinteresse por parte dos estudantes.

O ambiente de cooperação deve ser mantido por parte de seus integrantes, o caráter realístico dos problemas é o que traz mais motivação aos estudantes, pois eles vivenciarão a utilidade da disciplina e do conteúdo matemático em seu futuro profissional, e mais ainda a disciplina não perde seu rigor matemático.

O trabalho do tutor deve ser o de instigar, questionar e provocar em seus estudantes na motivação pela busca do conhecimento. De fato, utilizar o PBL em sala de aula é desafiador diante do cenário que hoje temos na educação brasileira, mas que pode contribuir de uma maneira positiva na formação profissional.

Nossa pesquisa deixa uma referência para outras pesquisas em Educação Matemática, para professores, pesquisadores em geral que se interesse por este assunto.

Nossa preocupação é a de que mais pessoas possam conhecer e de fato fazer uso desta metodologia, que se mostra eficiente em outras áreas do conhecimento.

Lembremos que em momento algum estamos criticando o método tradicional de ensino que perpetua até hoje, mas entendamos que existem outras possibilidades para construir o conhecimento de maneira democrática e que todos participem ativamente do processo.

Podemos perceber que existem muitas pesquisas que abordam as dificuldades enfrentadas por alunos na Graduação e que muitos optam pela desistência do curso ao se deparar com disciplinas de Matemática como Álgebra Linear ou Cálculo Diferencial e Integral. Temos o dever de tentar mudar este cenário desastroso, que causa grande evasão em cursos universitários.

O PBL tem diversas características, entre elas, o problema sempre precede a inserção de um novo conteúdo, mas não se trata de um simples problema, mas de algo real especifico de uma determinada comunidade ou até mesmo do ambiente de um determinado profissional. É importante ter recursos para pesquisas, livros, artigos, internet, entre outros, já que os estudantes terão que realizar diversos estudos e pesquisas para resolver um determinado problema.

A formação de um conceito de forma errônea também pode ser uma desvantagem, já que os alunos utilizam diversas fontes, entretanto é necessário verificar se as informações são seguras, cabendo ao tutor direcionar os alunos para que os mesmos percorram o caminho correto.

Muitos alunos estão acostumados com métodos mais tradicionais e trazê-los para outras metodologias pode causar resistência, eles podem no começo não se sentir a vontade com este tipo de aula, é preciso que o professor explicite os objetivos dessa metodologia e que indique quais resultados se espera alcançar, deixando claro o papel dos atores envolvidos.

Como o ensino tradicional perpetua por muito tempo, temos um impasse ao propor novos métodos de ensino, os resultados de pesquisas sugerem que ensinar Matemática de maneira exclusivamente abstrata não motiva alguns estudantes, pois esses não entendem naquele momento como a disciplina pode ajudar a resolver um problema do seu cotidiano profissional, assim ele poderá não valorizar a importância que ela tem diante do cenário tecnológico que está ao nosso redor.

Referências Bibliográficas

ARAÚJO, U. F; SASTRE, G. (orgs)**. Aprendizagem Baseada em problemas no ensino superior**. 2 ed. São Paulo: Summus, 2009.

BARBOSA, J.C. **Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como?.**Veritati, n.4, p. 73-80, 2004.

BARBOSA, J.C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24.,2001, Caxambu. Anais... Rio de Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BARUFI, M. C. B. **A Construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral.**1999. 184 f. Tese (Doutorado em Educação) –Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estrategia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, M.S. **Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira**.XIII CIAEM, Recife, Brasil, 2011.

BIEMBENGUT, M.S. **Modelagem Matemática & Resolução de Problemas, Projetos e Etnomatemática:Pontos Confluentes**. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.7, n.2, p.197-219, novembro 2014.

BUNGE, M. **Teoria e Realidade**. Tradução: Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva, 2008.

CASALE, A. **Aprendizagem Baseada em Problemas-desenvolvimento de competências para o ensino em engenharia**. 2013.162f.Tese (Doutorado em Engenharia de Produção.Universidade Federal de São Carlos. São Carlos.

CHIARI, A.S.S. **Ensino de Álgebra Linear e Tendências em Educação Matemática: Relações Possíveis**. XI ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba-PR- 18 a 21 de Julho de 2013. ISSN 2178-034X.

CHIARI, A.S.S. **Um Estudo sobre Álgebra Linear, Tecnologias Digitais e Educação a Distância Online**. EBRAPEM. 2013.

FILHO,E. E. ; RIBEIRO, L.R.C. **Aprendendo com PBL- Aprendizagem Baseada em Problemas: Relato de uma experiência em cursos de Engenharia da EESC- USP**. Revista Minerva, v.6, p-23-30, 2009.

FINO**,** C.N. (2001). **Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) implicações pedagógicas**. Revista Portuguesa da Educação, vol.4 n°2, PP. 273-291.

FIORENTINI, D. I**nvestigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos/ Dario Fiorentini, Sergio Lorenzato**, - 3. Ed.- Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FRATELLI**,** B.C.; MONTEIRO, M.S. **Dificuldades do Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear**. Universidade de São Paulo (USP). 2007.

GEMIGNANI, E. Y. M.Y.**Formação de professores metodologias ativas de ensino-aprendizagem: Ensinar para a compreensão.** Fronteiras da Educação [online], Recife, U.8, n.2, 2012. Disponível em http://www.fronteirasdaeducacao.org/index.php/fronteiras/article/view/14isNn2237-9703. Pesquisado em 11/01/2015 às 20 horas.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. Ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. Ed. – São Paulo: Atlas, 2008.

HUNGER, D; LEPRE, R.M. **Da necessária relação entre teoria e prática na formação acadêmica**. Jornal Unesp. São Paulo, mar 2013, ano XXVII, n.286. Disponível em HTTP://www.unesp.br/aci_ses/jornalunesp/acervo/286/forum-dagmar-hunger-rita-melissa>. Acesso em: 17 julho 2016.

JÚNIOR**,** A. G.; Espírito Santo, A. O**. A modelagem como caminho para "fazer ma temática" na sala de aula.** In: Anais do VII Congresso Norte/Nordeste de Educação em Ciências e Matemática, Belém, 8 a 11 de dez. 2004.

MACHADO, S.D.A.; BIANCHINI, B.L. **A Álgebra Linear e a Concepção de Transfo rmação Linear Construída por Estudantes de EAD**. Revemat: R. Eletr.de Edu. Ma tem.e ISSN 1981-1322, Florianópolis, v.07, n.2, p.69-89,2012.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa em mapas conceituais**. Porto Alegre: UFRGS. Textos de apoio ao professor de Física, v. 24, n. 6, 2013. Disponível em: < http://www.if.ufrgs.br/public/tapf/v24_n6_moreira_.pdf>. Acesso: 09 jul. 2016.

NUNES, R.S.R. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. 70 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)- Universidade do Porto

ONUCHIC, L.R. **A Resolução de Problemas na Educação Matemática: Onde estamos e para onde iremos?.** IV Jornada Nacional de Educação Matemática e XVII Jornada Regional de Educação Matemática. Universidade de Passo Fundo. 2012.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N.S.G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema. Rio Claro (SP), v.25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PEREIRA, P.S.; BEZERRA, R.C.; ROSA, P.R.; CONCEIÇÃO, K.P. **Apresentando os fractais em sala de aula**. Disponível em: www.sbembrasil.org.br>files>trabalhos. Acessado em 04 de Março de 2016.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problema**. Trad. Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Ja neiro: Editora: Interciência , 1978.

QUEIROZ, A. **PBL, Problemas que trazem soluções**. Revista Psicologia, Diversidade e Saúde, Salvador, dez. 2012.

REIS, F. da S. **A tensão entre o rigor e intuição no ensino de cálculo e análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.**2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

RIBEIRO, L.R.de C. **Aprendizagem baseada em problemas (PBL) na educação em engenharia**. Revista de Ensino de Engenharia, v.27, n.2, p. 23-32, 2008.

SANTOS, L.T.A.; MIRANDA, D.F. **A Matemática das Transformações Lineares Pl anas e Representações em um Curso de Engenharia Civil**. PUC Minas. 2013.

SCHMDT, Henk G. **Problem-based learning: Na Introduction**. Instructional Science 22: 247-250, 1994.

SCHMDT, Henk G..Foundation of problem-based-learning:some explanatory notes. **Medical Education.** Maastricht, v. 27, p. 422-432, 1993.

SCHMDT, Henk G.; LOYENS, S.M.M; GOG, T.V.; PAAS, F. **Problem-Based learning is Compatible with Human Cognitive Architecture: Commentary on Kirschner, Sweller, And Clarck (2006). Educational Psychologist,** v. 42, n. 2, p. 91–97, 2007.

SCHUBRING, G.**Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculos, transposicão)**. Zetetiké. Revista do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educacão Matemática. Vol.6, n°10. Campinas/SP, jul/dez,1998.

SILVEIRA, A.; FERREIRA, G.P.; SILVA, L.A. **A Evolução da Modelagem Matemática ao longo da História, o surgimento da Modelagem no Brasil e suas contribuições enquanto estratégia de ensino de Matemática**.Montevideo, Uruguay. 2013.

SOUZA, D.V.de. **O Ensino de Noções de Cálculo Diferencial e Integral por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas**. 2016.159f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)- Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 1. Tradução: EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

VESTENAL, L.R.; KOBIYAMA, M**.. A geometria da rede de drenagem da bacia hidrográfica do Caeté, Alfredo Wagner-SC**. Revista Árvore vol.34 no.4 Viçosa. July/Aug.2010.

APÊNDICE: PRODUTO FINAL

Gisele de Gouvêa

Orientador: Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca

REFLEXÕES ACERCA DO USO DA APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS NO ENSINO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

São Paulo | 2016

Introdução

A partir de nossos estudos vinculados à dissertação do curso de Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, *campus* São Paulo, apresentamos este material, considerando-o como o produto final da nossa pesquisa.

Sua elaboração apresenta sugestões de problemas contextualizados, reais ou realísticos, ligados às possíveis atuações profissionais de estudantes (de determinados cursos de graduação). Enfocamos que o caráter desses problemas é de fim aberto e mal estruturado e contemplam o estudo de alguns conceitos matemáticos, adotando como princípio norteador a Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL.

Este material é direcionado ao docente que tenha interesse em trabalhar com uma metodologia de ensino ativa e diferenciada, no caso, o PBL, o qual está associado ao desenvolvimento de competências conceituais e profissionais dos estudantes. Sugerimos também a leitura da dissertação na íntegra.

Apresentamos dois problemas no formato do PBL. Possuem estudos de apoio como complementação, os quais, assim como os problemas em si, podem ser adaptados conforme a realidade dos cursos ao qual estão vinculados (além da experiência de trabalho proveniente de cada tutor/professor). Além de possuírem possíveis encaminhamentos para sua resolução.

Nossas considerações em relação à dinâmica da sala de aula num contexto PBL, baseiam-se nas ideias de Ribeiro (2008). Mais adiante, apresentamos alguns encaminhamentos para a realização das sessões de tutoria, essenciais em uma proposta de ensino no formato do PBL.

3 Sugestões de problemas para abordar conceitos matemáticos por meio do PBL

Neste capítulo apresentaremos duas sugestões de problemas reais de acordo com os preceitos da Aprendizagem Baseada em Problemas, visando o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Tanto o problema 1, quanto o problema 2, poderão ser utilizados em cursos que tenham interesse na área de saúde, ou em políticas públicas, entre outros.

3.1. Orientações Gerais

As orientações feitas neste item são gerais, e versão sobre uma sugestão de dinâmica de acordo com os preceitos do PBL, por seu aspecto mais geral também serve para as diferentes sugestões de encaminhamentos (tratamento matemático e sugestão de abordagens de conceitos matemáticos) que apresentaremos na sequencia.

Inicialmente será fundamental que o tutor (professor) ressalte os principais aspectos envolvendo a dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, promovendo a conscientização a respeito dos objetivos da metodologia e do trabalho a ser feito na busca da solução (ou encaminhamento da resolução) do problema proposto. Todos os envolvidos precisam entender que o processo se dá por meio de tutorias e possíveis consultorias, as quais substituem as aulas convencionais, favorecendo um ambiente mais dinâmico e interativo.

Na dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, os alunos deverão ser organizados em pequenos grupos, em torno de quatro ou cinco pessoas, e o professor assume a postura de tutor ou mediador da aprendizagem.

O problema será apresentado aos grupos antes dos conceitos matemáticos que serão explorados. Cada grupo deverá eleger desde o início um coordenador e um relator (ou secretário). O coordenador tem a responsabilidade de conduzir as conversas em grupo, ou seja, deverá atuar como líder da equipe. O relator deverá registrar os pontos mais importantes das reuniões, além de registrar a indicação das tarefas de cada membro do grupo. Aconselha-se que exista rotatividade de papéis entre os participantes do grupo, buscando o desenvolvimento de atitudes e comportamentos essenciais às atuações profissionais.

As sessões tutoriais devem respeitar aspectos gerais, como: a análise do problema e o planejamento da pesquisa; o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema; a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

Em relação à análise do problema e planejamento da pesquisa, destacamos a apresentação geral a respeito do problema proposto. Objetiva-se ressaltar possíveis relações da situação proposta com as futuras realidades profissionais dos estudantes, isso se dá por meio da leitura coletiva do problema, apresentação do contexto e registro de possíveis palavras ou termos desconhecidos, esses deverão ser pesquisados posteriormente. O interesse pelo problema deve ser despertado e os grupos tendem a perceber que há lacunas em seus conhecimentos, logo, faz-se necessária a realização de pesquisas acerca do assunto abordado.

A partir daí os estudantes deverão iniciar um planejamento para buscar informações acerca do problema, organizar ações e meios para trocas de experiências entre os membros da equipe. Nesta etapa, será fundamental a elaboração de hipóteses e definições das estratégias para resolver o problema, considerando o tempo disponível para executá-las, esse tempo depende da carga horária da disciplina e do planejamento do tutor (professor). Pode-se sugerir também que os grupos elaborem um projeto de pesquisa, de acordo com os objetivos do tutor.

Na etapa que envolve as ações que levarão à resolução do problema deverão ocorrer estudos, pesquisas e intervenções, contando com possíveis consultorias de outros profissionais (ou professores de outras áreas do conhecimento).

Na Aprendizagem Baseada em Problemas, o plano de aulas dificilmente se restringe a um único momento, pois após o primeiro contato com o problema surgirão conjecturas e alguns planos de ação, os discentes precisam se reencontrar a fim de apresentar e discutir tudo o que foi desenvolvido ou pesquisado (durante um determinado período). Nos encontros intermediários os grupos falam sobre suas descobertas e, com embasamentos teóricos, compartilham suas informações com os outros membros da equipe.

O tutor analisará as interpretações dos estudantes e poderá indicar encaminhamentos a respeito do trabalho com conceitos envolvidos, mesmo que englobe outras áreas de conhecimento. Entretanto o tutor precisará analisar se as decisões adotadas pelos estudantes levarão à construção de conhecimentos relevantes. Previsões e análises das dificuldades também devem ser mapeadas pelo tutor, tanto em relação aos conhecimentos gerais como ao comportamento que cada grupo possa apresentar. Reiteramos que cada um desses apontamentos, analisados de modo processual, pretendem diagnosticar a aquisição de conhecimentos transdisciplinares e, precisam, assim, ser bem estruturados.

Na última etapa da dinâmica envolvendo a Aprendizagem Baseada em Problemas deverá ocorrer a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

A socialização ocorrerá por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos, com os demais grupos e com o tutor. Propõe-se a apresentação de um relatório no qual conste a trajetória do projeto desenvolvido, as pesquisas realizadas e os resultados obtidos, inclusive a indicações de conhecimentos adquiridos. Nessa etapa as soluções podem ser apresentadas aos demais membros da sala e recomenda-se a validação das mesmas, a partir dos conhecimentos adquiridos. Momento este em que há abertura para a exposição das ideias e troca de experiências com os outros grupos.

Em relação aos processos de avaliação das sessões, ressalta-se que eles podem ter caráter tanto processual quanto formativo. Pode-se considerar na avaliação: a produção e a análise dos relatórios; os aspectos pertinentes à autoavaliação; a avaliação individual dos membros da equipe; a apropriação dos conceitos estudados; dentre outro aspectos.

Os conhecimentos adquiridos são indicados pelos próprios estudantes. O tutor ao longo do processo deverá identificar se os novos conhecimentos realmente estão sendo construídos, isto é, verificar se os métodos de resolução e os conceitos matemáticos abordados estão sendo apreendidos significativamente, inclusive quanto à formalização de conceitos. A ideia é que esses estudantes notem o quanto a apreensão do problema pode colaborar para o desenvolvimento de suas competências conceituais, atitudinais e profissionais.

Além das orientações gerais indicadas nos parágrafos anteriores, o tutor poderá discutir aspectos relacionados aos modelos matemáticos e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, essa discussão será fundamental para os encaminhamentos que sugerimos no próximo item.

É importante destacar, por exemplo, que os modelos matemáticos ajudam a fazer estimativas ou previsões, no entanto, eles geralmente não representam literalmente os fenômenos modelados, ou seja, eles não traduzem a pura realidade, mas sim fazem aproximações, e tem suas limitações em relação aos fenômenos estudados.

“Todo modelo teórico é parcial e aproximativo: não apreende senão uma parcela das particularidades do objeto representado”. (BUNGE, 2008, pág. 30).

Assim como afirma Stewart (2015, pág. 22), entendemos que “um modelo matemático é uma descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real [...]”.

Ao modelar um fenômeno do mundo real, temos como propósito entendê-lo, e quiçá fazer previsões sobre seu comportamento futuro. Stewart ressalta que:

> Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física - é uma *idealização.* Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza. (STEWART, 2015, pág. 22)

Na sequência apresentaremos algumas sugestões de tratamento matemático, explorando diferentes conceitos. Não temos a pretensão aqui de sugerir que esses sejam os melhores ou os mais adequados para resolver os problemas propostos, já que são possíveis várias outras abordagens matemáticas, dependendo das escolhas do tutor e dos objetivos de cada curso. Buscaremos apenas ilustrar a potencialidade da Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino de noções matemáticas.

Problema 1

Microcefalia[6]

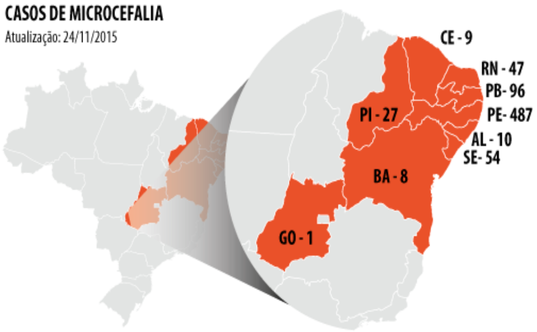


Figura 2 Casos de Microcefalia por RegiãoFonte:http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/orientacao-e-prevencao/xyz-microcefalia

O que é a Microcefalia?

Microcefalia é o nome que se dá quando uma criança tem a cabeça menor do que o considerado padrão. Não é exatamente uma doença, e sim um sinal de que o cérebro pode não estar crescendo como deveria.

É o crescimento do cérebro que faz o crânio crescer. Se o cérebro realmente não se desenvolve, a criança pode vir a ter deficiência intelectual e física, em variados graus. Mas é possível uma criança ter microcefalia e não ter atrasos.

É importante lembrar que o cérebro é um órgão ainda bastante misterioso e surpreendente, e são muitos os casos de problemas cerebrais em que as crianças se desenvolveram muito melhor do que previam os médicos.

Como a microcefalia é diagnosticada?

---

[6] Texto sobre a Microcefalia retirado de http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/orientacao-e-prevencao/xyz-microcefalia pesquisado em: 15 de Julho de 2016.

Ainda no útero, a microcefalia pode ser diagnosticada quando a medida da cabeça (perímetro cefálico) do feto, quando comparada com outras medidas, e com a idade gestacional, fica abaixo do esperado.

É importante considerar que a medição pode não ser exata, porque depende da habilidade do profissional, da posição do bebê e da qualidade do equipamento.

Quando o bebê nasce à microcefalia é diagnosticada com uma simples fita métrica.

As autoridades brasileiras estão determinando, para efeito de monitoramento, que serão considerados casos suspeitos de microcefalia recém-nascidos (desde que nascidos depois de 37 semanas) com perímetro cefálico de menos de 32 cm.

Apenas a medida não é suficiente para determinar se há má formação. É preciso levar em conta também:

- A circunferência cefálica dos pais (se os pais também tiverem a cabeça pequena, pode ser apenas uma característica hereditária).

- O fato de o bebê ter nascido de parto normal. É recomendável repetir a medida do perímetro cefálico três ou quatro dias depois do parto, porque a cabeça do bebê tem a capacidade de "afinar" para passa pelo canal do parto, e demora alguns dias para voltar ao normal.

- As proporções do corpo da criança. Uma criança de estrutura pequena tende a ter uma cabeça menor.

Diante dos fatos expostos a respeito da microcefalia, e de possíveis informações complementares, responda:

Quais serão os impactos do aumento considerável de diagnósticos de microcefalia nas políticas públicas nos próximos anos? E nas próximas décadas? Quais são as ações dos órgãos públicos em relação a essa nova realidade? É possível a partir de um modelo matemático afirmar ou suspeitar do diagnóstico de microcefalia? Justifique sua resposta à questão anterior utilizando argumentos matemáticos.

3.2. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (1) E ORIENTAÇÕES

TRANSFORMAÇÃO LINEAR[7]

Uma diretriz para o encaminhamento do problema 1 pode ser o estudo da lei do crescimento, considerando que desde o nascimento até atingir a idade adulta, diferentes partes do corpo crescem, cada uma com um fator de escala diferente.

Vamos considerar a relação, tamanho da cabeça (t), por altura do corpo (a). Utilizaremos como critério para a lei do crescimento o delineamento de uma razão entre essas duas grandezas (representado por r=t/a).

Observe o quadro que mostra a razão do tamanho da cabeça pela altura do corpo de uma pessoa durante sua vida. Complete a coluna “Tamanho da Cabeça (t) (cm)”.

Idade (anos)	Altura do corpo (a) (cm)	Tamanho da Cabeça (t) (cm)	Razão (r)
0	50	11	0,22
1	70	15	0,21
2	79	17	0,22
3	86	18	0,21
5	99	19	0,19
10	127	21	0,17
20	151	22	0,15

Quadro 2 Dados de uma pessoa. Fonte: Tabela adaptada de Nunes (2006). Geometria Fractal e Aplicações.

O fenômeno do crescimento não é proporcional, é possível compará-lo com a geometria fractal, que recebe o nome de lei de potência.

A lei de potência consiste em considerarmos os dados em largas escalas numéricas x e y, então é possível que exista uma lei de potência que exprima y em termos de x.

Considerando 10 como base do logaritmo, mas poderia ser qualquer outra.

$$logy = mlogx + b \iff 10^{logy} = 10^{logx^m} * 10^b \iff y = x^m * 10^b \iff y = cx^m, c = 10^b$$

---

[7]Esse Estudo de Apoio foi adaptado de NUNES (2006) INTITULADO: Geometria Fractal e Aplicações. Departamento de Matemática Pura Faculdade de Ciências da Universidade do Porto Janeiro/2006.

Destacamos que, m é o declive da reta e b é a ordenada na origem.

Esta equação descreve a lei de potência y em função de x, em que x é uma potência cujo expoente é o declive da reta.

Vamos mostrar como o procedimento acima apresentado pode ajudar a encaminhar a resolução do problema, para isso utilizaremos como modelo matemático $y = cx^m$, m = 1 e b = 0, o modelo será reduzido a y = cx, c é uma constante. Para adaptar o modelo matemático aos dados do quadro acima, utilizaremos como parâmetro a altura do corpo em cm e o tamanho da cabeça também em cm, mesmo o modelo sendo uma função linear vale destacarmos que dependendo dos valores que iremos atribuir para as grandezas x e y pode haver uma pequena discrepância entre funções lineares encontradas pelos estudantes, caberá ao tutor alertá-los sobre isso, afinal estamos trabalhando com valores reais. Para sabermos o valor da constante c na equação y = cx temos:

Altura do corpo (a) (cm) x	Tamanho da Cabeça (t) (cm) y
50	11
70	15
79	17
86	18

Quadro 3 Altura/ tamanho da Cabeça - Elaborado pela autora

Para encontrar o valor de c, iremos pegar os valores x = 50 e y = 11:

y= cx

11= 50c

c= 11/50   c= 0,22

Assim o modelo será y = 0,22 x, com isso apresentaremos o gráfico do modelo acima definido:

Altura do Corpo (cm) x	Tamanho da cabeça (cm) y
50	11
70	15,4
79	17,38
86	18,92

Quadro 4 Altura do Corpo/ tamanho da Cabeça -Fonte: Quadro elaborado pela autora

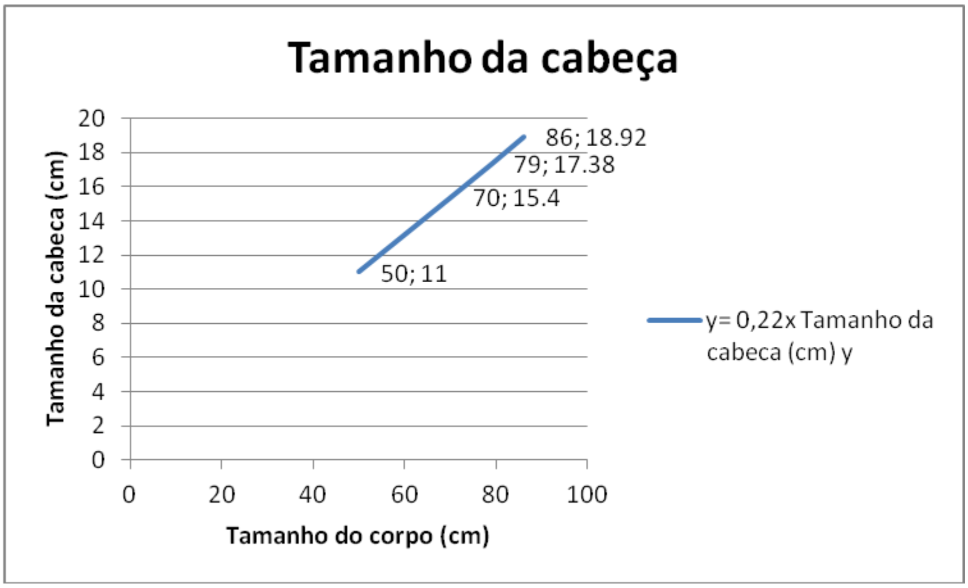


Figura 3- Gráfico elaborado pela autora

Mais especificamente no problema 1, além de aspectos relacionados à Matemática, também poderão ser exploradas questões relacionadas a área de Medicina, com problemáticas a respeito de saúde pública e políticas públicas, entre outras.

O problema será apresentado a cada grupo, que a princípio farão a leitura juntamente com o tutor, em seguida a seleção de termos desconhecidos que estão inseridos no problema para pesquisa posterior.

O tutor ainda poderá apontar questionamentos como: Qual a relevância desse tipo de problema para o poder público? Quais conhecimentos podem estar envolvidos nele? Quais ligações este problema apresenta com o futuro campo de atuação profissional dos estudantes?

Será fundamental que o tutor faça a sugestão do tratamento matemática do problema, caso os estudantes não vislumbrem essa possibilidade. Nesse caso poderão ser propostas as seguintes questões: Será possível desenvolver um modelo matemático para expressar um possível diagnóstico da Microcefalia?

O problema apresentado poderá envolver noções de Transformações Lineares. Conforme o direcionamento do estudo de apoio. Como sugestão de trabalho, o tutor poderá propor referências bibliográficas a respeito do assunto; incentivar as relações de ajuda mútua para compreender conceitos matemáticos; fornecer outros materiais de estudo complementares; disponibilizar espaços para que os estudantes aprofundem seus conhecimentos (bibliotecas, sala de monitoria ou consultoria, plantão de duvidas), entre outras formas de estudo.

O tutor deverá escolher o melhor momento para realizar institucionalização conceitual das transformações lineares, com base no estudo de apoio para o problema 1, entretanto esclarecemos que tal momento deverá ocorrer após os alunos iniciarem a pesquisa para encontrar possíveis soluções para o problema e terem contato com as noções matemáticas envolvidas.

Outro aspecto importante que deverá ser contemplado na institucionalização é a demonstração de que o modelo obtido realmente é uma Transformação Linear. Caso os diferentes modelos obtidos pelos estudantes não sejam Transformações Lineares, o tutor (professor) deverá mostrar aos estudantes quais propriedades não são satisfeitas, indicando ainda possíveis vantagens ou desvantagens em utilizar uma Transformação Linear para modelar o problema proposto.

Indicamos que com a solução acima, o tutor pode trabalhar com os conceitos: função de modo geral, especificando ainda a função linear, os conceitos de logaritmos, suas propriedades e aplicações, pode ainda trabalhar os conceitos de transformações lineares evidenciando a lei do crescimento, ou seja, a lei de potência, onde sua consistência nos remete a considerarmos os dados em largas escalas numéricas x e y, então é possível que exista uma lei de potência que exprima y em termos de x.

3.3. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (2) E ORIENTAÇÕES

Abaixo estamos propondo uma resolução para o problema utilizando a regressão linear, ou seja, determinando um modelo matemático linear, as possibilidades aqui mencionadas são encaminhamentos a ser proposto pelo tutor em suas consultorias.

É importante ressaltar aos estudantes aspectos importantes da dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, que as aulas são substituídas por consultorias, que cada integrante terão tarefas delegadas, eles terão ao seu dispor uma gama de recursos para auxiliá-los no encontro da solução para o problema da Microcefalia.

Os objetivos dessa dinâmica precisam estar claro aos estudantes, o tutor deve motivá-los para o estudo deste problema.

Ressaltamos que é importante fazer a leitura do problema, apontando os pontos importantes que podem ajudar os alunos na solução.

O tutor deve indicar bibliografias que podem auxiliar os estudantes, os termos próprios do problema pode ser feito um pequeno dicionário para o entendimento de forma geral desse problema.

Destacamos que esta proposta de solução será apresentada como motivação a aprendizagem de conceitos, conforme mencionados abaixo, cabe ao tutor ajudar no sentido de propor a análise do problema, o planejamento da pesquisa, o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema, a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

A dinâmica se dá por planejamento, para que não fuja aos objetivos almejados, é importante que o professor/tutor, conduza de forma a não interferir no processo de aprendizagem a menos que seja necessária sua interferência.

Cabe o tutor analisar as interpretações dos alunos, podendo indicar encaminhamentos a respeito do trabalho com conceitos envolvidos, transitando por outras áreas do conhecimento.

Talvez esta resolução não seja vislumbrada pelos estudantes, neste caso, o tutor pode propor esta solução socializando-a com os demais grupos.

Destacamos que a socialização ocorre por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos, com os demais grupos e com o tutor. A solução é apresentada por meio de relatório, constando toda a trajetória, apontando os aspectos vantajosos e também os menos favoráveis do percurso percorrido por todo o grupo, quais pesquisas foram realizadas, os resultados obtidos, os conhecimentos adquiridos por este encaminhamento. Salientamos que as soluções podem ser apresentadas aos demais membros da sala recomendando a validação das mesmas, tendo como ponto de partida os conhecimentos adquiridos.

Depois de apresentada alguns aspectos da dinâmica do PBL, ressaltaremos alguns conhecimentos prévios para esta solução, caso o tutor escolha este caminho. Dentre os conhecimentos prévios, destacamos a interpretação de dados apresentados em tabelas; a identificação de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, diferença entre incógnita e variável, definição de circunferência, potenciação, noções sobre a relação entre grandezas, taxa de variação e funções, se necessário o tutor pode acrescentar ou retirar alguns conhecimentos prévios, ou mesmo retomar o estudo de determinados conceitos ou conteúdos.

Lembrando que estamos propondo um caminho a ser percorrido, cabe ao tutor fazer adaptações de acordo com os objetivos e especificidades de cada turma ou curso, pois o problema permite explorar uma quantidade considerável de conceitos matemáticos e também de outras áreas.

Entre os conceitos matemáticos que podem ser explorados pelo tutor com este encaminhamento, destaca-se, o estudo de função afim, discussão dos coeficientes a e b, o comportamento da função (ser crescente ou decrescente), e taxa de variação; além de assuntos relacionados a Estatística como, Média e Regressão Linear.

Nossa intenção aqui é apenas sugerir caminhos a serem percorridos ou propostos pelo tutor, assim as sugestões não devem ser entendidas como uma receita, e sim como uma alternativa que pode ser integralmente ou parcialmente seguida.

Vale ressaltar a autonomia do tutor no sentido de propor um caminho mais adequado para sua turma, levando em consideração os conceitos a serem aprendidos na consultoria e no curso.

REGRESSÃO LINEAR

Outra possibilidade de encaminhamento para a solução do problema é a utilização da regressão linear, que consiste em determinar um modelo linear para o problema da microcefalia, em seguida destacaremos alguns conceitos matemáticos que podem ser abordados por meio deste procedimento.

	IDADE (x) anos	TAMANHO DA CABEÇA (cm) (y)	x.y	X²
	0	11	0	0
	1	14,7	14,7	1
	2	17,4	34,8	4
	3	18	54	9
	5	18,8	94	25
	10	21,6	216	100
	20	22,6	452	400
∑	41	124,1	865,5	539

Quadro 5 Idade/Tamanho da Cabeça Fonte: Tabela elaborada pela autora

Pretendemos encontrar um modelo na forma y= ax + b, para encontrarmos os coeficientes a e b, temos:

$$a = \frac{n.\sum x.y - (\sum x).(\sum y)}{n.\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{7.865{,}5 - 41.124{,}1}{7.539 - (41)^2}$$

$$a = \frac{6058{,}5 - 5088{,}1}{3773 - 1681} = \frac{970{,}4}{2092} = 0{,}5$$

$$a = 0{,}5$$

$$b = y - a.x; y = \frac{\sum y}{n} = \frac{124{,}1}{7} \simeq 17{,}7$$

$$y = 17{,}7 \; ; x = \frac{41}{7} \simeq 5{,}8 \;\; x \simeq 5{,}8$$

$$b = 17{,}7 - 5{,}8 .0{,}5 \quad b = 17{,}7 - 2{,}9 = 14{,}8$$

$$y = 0{,}5\,x + 14{,}8$$

Iremos construir o gráfico da função y= 0,5 x + 14,8 para isso, temos:

Idade (anos)	Tamanho da cabeça (cm)
0	14,8
1	15,3
2	15,8
3	16,3
4	16,8

Quadro 6 Idade/ Tamanho da Cabeça Fonte: Quadro elaborado pela autora

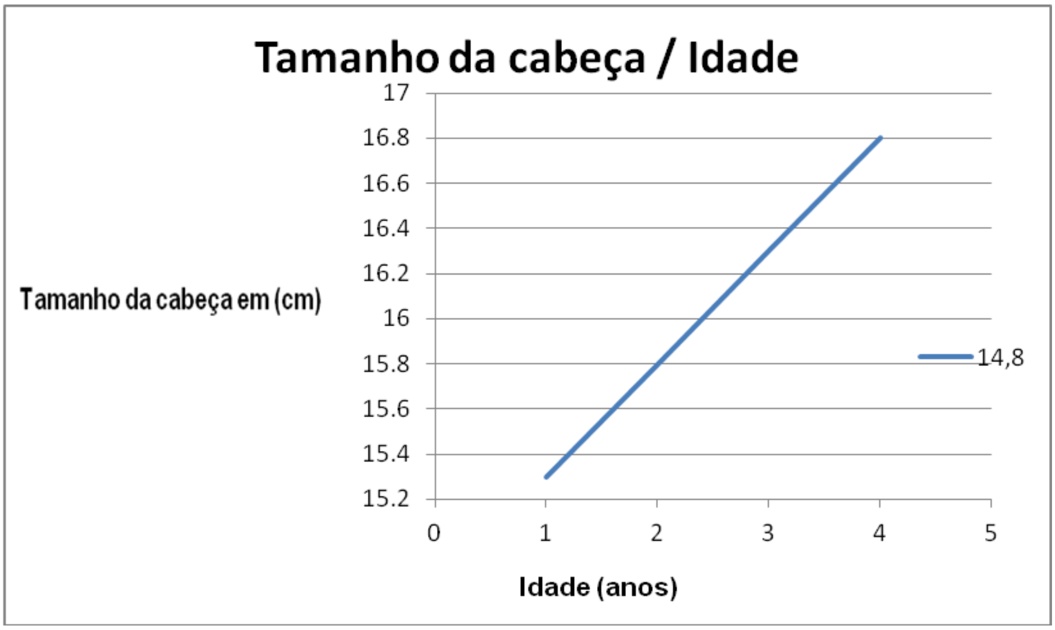


Figura 4- gráfico elaborado pela autora

O gráfico apresentado é um modelo que reduz a resolução do problema a uma função linear, assim é possível calcular em cm o tamanho da cabeça em relação à idade.

Podemos destacar alguns conceitos matemáticos que podem ser explorado se os estudantes optarem por está resolução, dentre eles, destacamos: O estudo de função afim, discussão dos coeficientes a e b, a função ser crescente ou decrescente; assuntos estatísticos como: Média, Regressão linear. Desta maneira está resolução pode auxiliar o tutor/professor, na formação dos conceitos acima destacado, por ser um problema que está presente em nossa sociedade e também fazer parte de problemas a serem encontrados por profissionais da saúde, o problema da Microcefalia encaixa perfeitamente nos preceitos do PBL.

Apontaremos algumas vantagens e desvantagens quando optamos pelo modelo de regressão e assim tornar a resolução do problema de modo linear, uma preocupação da estatística ao analisar dados, é a de criar modelos que explicitem estruturas do fenômeno em observação, o modelo de regressão é um dos métodos estatísticos mais usados para investigar a relação entre variáveis.

A análise de regressão pode ser usada como um método descritivo da análise de dados (como, por exemplo, o ajustamento de curvas) sem serem necessárias quaisquer suposições acerca dos processos que permitiram gerar os dados. Assim destacamos que, a regressão designa também uma equação matemática que descreva a relação entre duas ou mais variáveis.

Podemos destacar outras vantagens, como: fornecer informações estatísticas detalhadas sobre o modelo, permitir utilizar os parâmetros da regressão encontrados para efetuar previsões.

Falaremos sobre algumas desvantagens, como: o modelo escolhido deve ser coerente com o que acontece na prática, isso pode ser resolvido da seguinte maneira: o modelo escolhido deve ser condizente tanto no grau como no aspecto da curva, para representar em termos práticos, o fenômeno em estudo, o modelo deve conter apenas as variáveis que são relevantes para explicar o fenômeno. Nesse sentido o tutor deve orientar seus estudantes, no sentido de tomar cuidado quanto ao modelo a ser encontrada e as variáveis a ser considerada no modelo explorado.

3.4. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (3) E ORIENTAÇÕES

Nesta sugestão de tratamento matemático, o tutor pode rapidamente resgatar aspectos da dinâmica do PBL, destacando todo o processo de ajuda mútua e cooperação entre os integrantes do grupo, ressaltando a importância da participação de todos, para que o trabalho tenha excelência, e que de fato os auxiliem na construção dos conhecimentos necessários para a solução do problema.

O tutor deve orientar sobre possíveis discrepâncias de modelos exponenciais, quando se trata de dados reais, e que dependendo dos dados pode haver modelos diferentes que respondam o mesmo problema, de maneira a evidenciar que isso é comum quando se trata de dados reais. Neste sentido este problema de maneira geral é enriquecedor, pois não deixa com que o caráter real (que faz parte da dinâmica do PBL), se perca pelo caminho.

Aqui podem ocorrer às divisões de tarefas a serem pesquisadas pelos alunos, buscando resolver o problema, o planejamento é extremamente importante e pode contribuir com o êxito na resolução. O tutor pode contribuir com os estudantes, indicando referências bibliográficas a respeito de funções exponenciais e suas aplicações em modelos matemáticos, assim como trabalhos acadêmicos que os auxiliem, lembramos que o tutor tem o papel de mediar às discussões e intervir quando necessário.

É importante alertar os alunos sobre os dados apresentados no problema, discuti-los de maneira que possam entender o que estão retratando, orientá-los a pesquisarem como o problema da Microcefalia tem crescido em nosso país. E questioná-los: É possível intervir nesta realidade? Como? Porque os casos de Microcefalia têm aumentado? Quais políticas públicas podem ser feitas em curto prazo? Entre outros encaminhamentos de questões. Essas discussões e apontamentos devem contribuir com a busca de soluções.

Os conhecimentos prévios, se tratando da Matemática, englobam a potenciação e suas propriedades, suas aplicações, função linear e a construção do gráfico, leitura de dados em uma tabela, reconhecimento de grandezas inversamente proporcional.

Os conceitos matemáticos que serão explorados incluem o ensino de função exponencial, crescimento e decrescimento exponencial, discutir a taxa de variação, iniciar os estudos de logaritmos e suas propriedades.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Iremos propor a resolução utilizando o conceito de função exponencial, lembramos que $y = a^x$ é o modelo de uma função exponencial, mas para o nosso problema teremos que obter uma constante de acerto para o problema estudado, assim temos:

$y = c.a^x$, basta tomar x= 0 e y=11

$11 = c.a^0$ c= 11

Agora iremos utilizar os pontos x=1 e y=14,7, para descobrir o valor de a

$14{,}7 = 11.a^1$

$$a = \frac{14{,}7}{11} \quad a \simeq 1{,}3$$

$y = 11 * 1{,}3^x$

Agora apresentaremos o gráfico

IDADE	TAMANHO CABEÇA (cm)
0	11
0,5	12,54192968
1	14,3
1,5	16,30450858

Quadro 7 Idade/ tamanho da Cabeça Fonte: Quadro elaborado pela autora

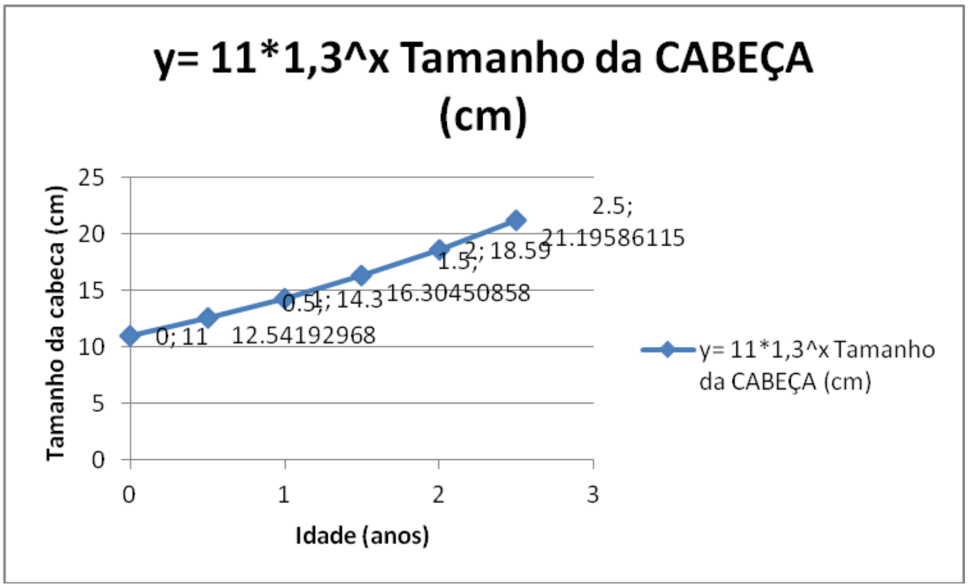


Figura 5- Gráfico elaborado pela autora

Nesta resolução proposta, o tutor pode explorar o conceito de função exponencial, discutindo com os alunos os assuntos: crescimento e decrescimento exponencial, iniciar os estudos de logaritmos. ‘É possível percebemos que um mesmo problema pode ter diversas abordagens diferenciadas, dependendo qual o caminho que a turma escolhe percorrer ou ao que o tutor encaminhe seus alunos para a mais coerente naquele determinado momento de sua aula, pois cabe ao tutor conduzir o problema para o caminho que o trará beneficio para seus alunos e seus aprendizados.

3.5. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (4) E ORIENTAÇÕES

Neste estudo o tutor e os estudantes poderão explorar o método dos mínimos quadrados aplicado ao ajuste de curvas e a relevância na busca por modelos matemáticos para uma determinada situação.

É imprescindível que haja diálogos entre os membros do grupo a respeito das primeiras reflexões, delegação de tarefas e planos de ação, registrar as informações necessárias para a resolução do problema.

Em encontros posteriores (consultorias) os estudantes poderão discutir e analisar as informações e materiais obtidos. Em seguida verificar se esses são relevantes e suficientes para resolver o problema?

Nesta solução como conhecimentos prévios, destacaremos: interpretar e analisar dados por meio de tabelas e noções a respeito de função.

Neste caso o tutor pode tanto iniciar ou aprofundar o estudo de conceitos matemáticos como: matrizes, operações e propriedades, tipos de matrizes (quadrada, transposta, matriz linha e coluna, identidade); sistemas lineares, classificação, discussão e diferentes métodos de resolução de sistemas lineares.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO AO AJUSTE DE CURVAS

O ajuste de curvas pelo método dos Mínimos Quadrados tem muitas aplicações, dentre elas, é determinar qual é a função que melhor expressa o tamanho da circunferência cefálica de uma pessoa conhecendo sua idade (em anos).

A tabela abaixo mostra a idade em anos, e o tamanho da cabeça em centímetros (cm):

IDADE (ANOS)	TAMANHO DA CABEÇA (CM)
0	11
1	14,7
2	17,4
3	18

Quadro 8 Idade/Tamanho da Cabeça Fonte: Quadro elaborado pela autora

Pretendemos reduzir este a problema a uma função do tipo: y(x) =α + βx

Neste caso, iremos encontrar os valores de α e β de acordo com os dados da tabela acima, vamos escrever os dados na forma matricial, assim temos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; y= $\begin{pmatrix} 11 \\ 14{,}7 \\ 17{,}4 \\ 18 \end{pmatrix}$

Vale ressaltar que A^t é denominada como matriz transposta de A.

Assim temos:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} ; \; A^t \; y = \begin{pmatrix} 61{,}1 \\ 103{,}5 \end{pmatrix}$$

Montaremos um sistema com as incógnitas α e β:

$$\begin{cases} 4\alpha + 6\beta = 61{,}1 \\ 6\alpha + 14\beta = 103{,}5 \end{cases}$$

Reduzimos a matriz a um sistema 2 X 2, onde sua resolução pode ser feita pelo método da substituição, que neste caso, é o mais conveniente.

Desta maneira os valores de α e β são:

α=11,72 e β= 2,37

Com os valores acima calculados, podemos voltar a função: y(x)= α + βx

y(x)= 11,72 + 2,37x

O modelo acima nos remete a uma função linear, o que nos permiti construir seu gráfico conhecendo alguns valores. Assim temos:

FUNÇÃO	Y(X)= 11,72 + 2,37X
IDADE(ANOS)	TAMANHO CABEÇA (CM)
0	11,72
1	14,09
2	16,46
3	18,83

Quadro 9- Idade/ tamanho da cabeça. Fonte: elaborado pela autora

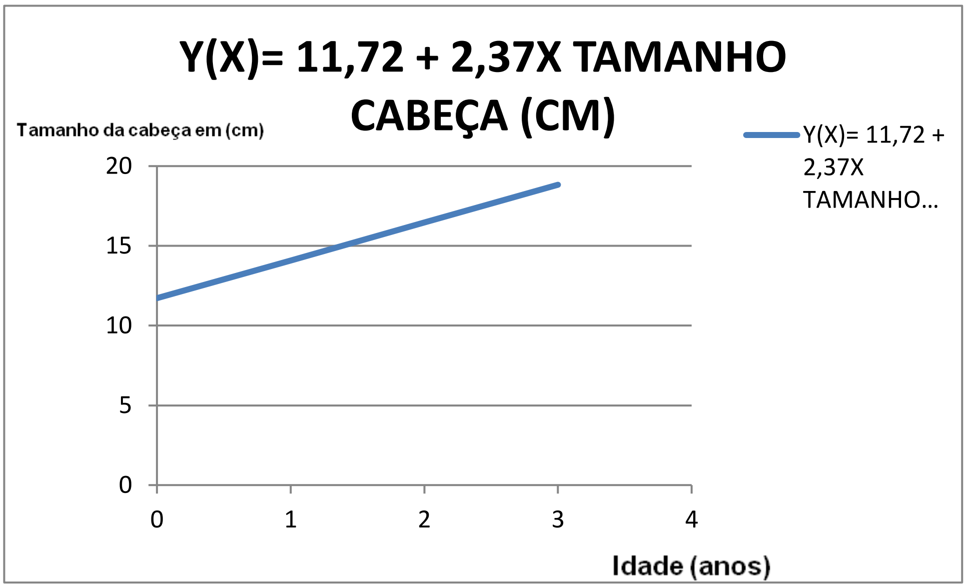


Figura 6- Gráfico Elaborado pela autora

Nesta solução, podemos explorar os estudos de Matrizes suas propriedades e definição, Operações envolvendo as Matrizes (adição, subtração e multiplicação), Sistemas Lineares e suas classificações, discussão de diferentes formas de resolver um sistema linear, podemos destacar os métodos da adição, substituição, escalonamento, uso de determinantes, entre outros métodos que o tutor achar mais conveniente.

Lembramos que estamos deixando como proposta alguns encaminhamentos de soluções, é evidente que diante da proposta do PBL pode surgir outras soluções trazidas pelos estudantes, elas deve, ser exploradas de forma a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dos grupos envolvidos na dinâmica que o PBL propõe a seus estudantes.

Desta maneira também pode surgir alguma solução que não seja adequada para o problema, esta deve ser discutida, porém o tutor pode ressaltar quais são os objetivos que serão almejados com tais problemas a serem explorados.

No PBL é preciso que os alunos entendam que cada problema a ser explorado, tem vários objetivos e expectativas de aprendizagens, envolvendo a inserção de novos conceitos ou até mesmo a aplicação de conceitos já estudados.

Problema 2

No problema 2 abordaremos o cálculo da dimensão fractal da irregularidade do contorno de células e estruturas que formam os tumores malignos.

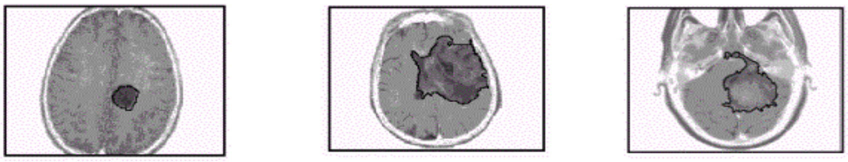


Figura 7 http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Podemos de alguma maneira tentar caracterizar qual estágio se encontra os tumores malignos no sistema nervoso central. As imagens acima foram adquiridas através de ressonância magnética, das quais foram comparadas imagens de cistos (tumores benignos), imagem de gliomas (tumores malignos) e imagens de lesões massivas. Com a técnica da dimensão fractal é possível obter uma melhor diferenciação entre tumores benignos dos malignos pelo fato destes possuírem características marcante através de maior irregularidade em seu contorno. Assim, extraindo-se a dimensão fractal destes contornos, pode-se classificar os tumores malignos dos benignos e, posteriormente, o estágio em que se encontra os tumores malignos.

Analisando as imagens a seguir, utilizando o processo de contagem das caixas, cada imagem gerará um sistema de pontos, que por sua vez dá origem a uma reta que pode ser observada na imagem 8 e 9. É possível construir um gráfico que pode ajudar no diagnóstico? Apresente-o.

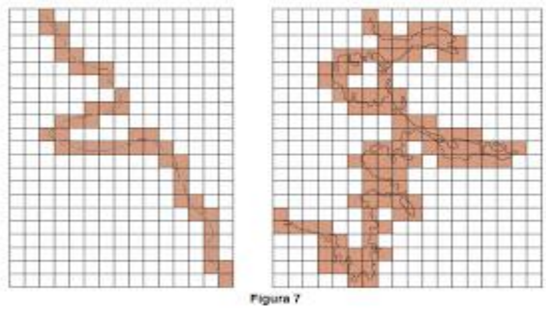


Figura 8 http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando salvar.html?m=1

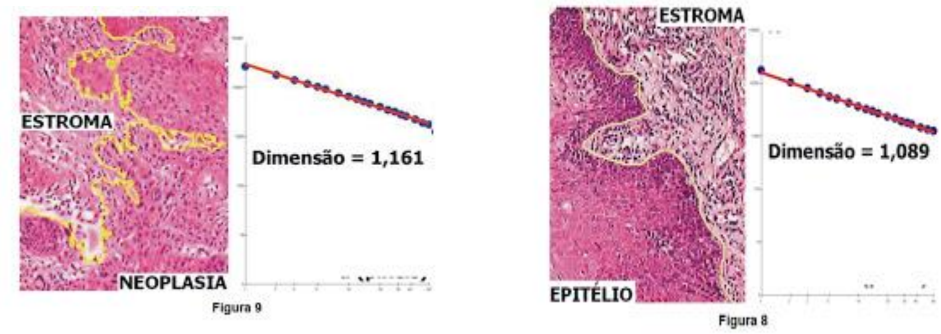


Figura 9 – Gráfico de Diagnóstico http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Estudo de apoio para o Problema 2

O **tapete de Sierpinski** é construído cortando-se o nono central de um quadrado, cortando depois os centros dos oito quadrados mais pequenos que ficam, e assim por diante. O análogo tridimensional é a **esponja de Menger**, uma rede aparentemente sólida com uma superfície infinita e volume nulo.

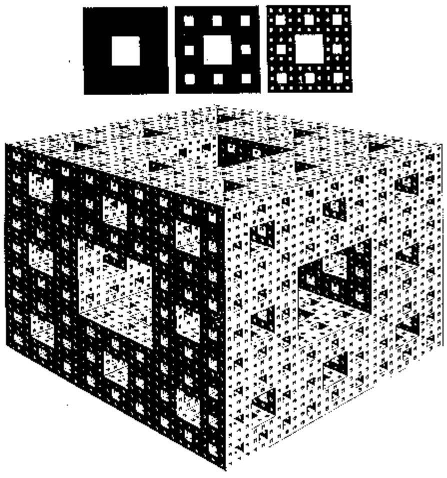


Figura 10- J.Gleick,Ed.Gradiva,1994,p.139.Figura7-TapetedeSierpinski

A partir da construção desses fractais, podemos introduzir a geometria fractal ou geometria da natureza em sala de aula.

A prática pedagógica utilizada atualmente no ensino da Matemática procura aproximar cada vez mais os fundamentos teóricos da realidade do aprendiz, correlacionando, para isso, conhecimentos empíricos a aspectos observados no mundo em que vivemos para construção do conhecimento.

Dentro desta perspectiva, trazer para a sala de aula atividades que ao mesmo tempo desenvolvam o raciocínio lógico-matemático e utilizem elementos do mundo concreto do aluno, satisfaz plenamente à expectativa que a metodologia aplicada impõe.

É importante ressaltar que as atividades a serem realizadas devem ser planejadas de forma a promover a efetiva participação de todo o grupo, levando, de uma forma cooperativa e homogênea, todos às conclusões esperadas.

A busca da interação entre um novo cotidiano–prático e participativo–e uma organização de conteúdos mais abrangente tornará possível a introdução de teorias desenvolvidas mais recentemente, por níveis acadêmicos superiores, gradativamente ao longo do desenvolvimento curricular da Matemática.

Reforçando a idéia de que alunos precisam experimentar a Matemática por caminhos diferentes do que aplicar algoritmos de papel e lápis a exercícios rotineiros, a Geometria Fractal vem permiti-los explorar os conceitos matemáticos trabalhando com as mãos, tanto na construção de modelos, quanto no desenho de quadrados consecutivas interações dos fractais clássicos.

Como exemplo de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula, podemos citar a construção do fractal triminó.

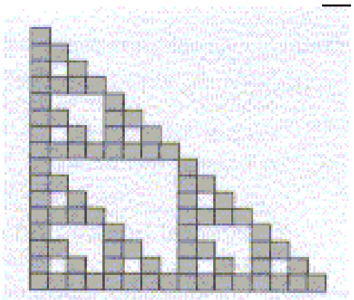


Figura 11- Fractal Triminó

Para se construir esse fractal triminó de nível3, deve-se pegar as pecinhas e, primeiramente fazer a conexão de 3 quadrados em forma de L,de modo que este será um fractal triminó de nível1.A partir daí, deve-se substituir cada peça quadrada por um triminó L, obtendo-se assim um fractal triminó de nível2. Repetindo o processo executado na obtenção do fractal triminó de nível2, obteremos o fractal triminó de nível3. Após a construção desse fractal pudemos explorar o número de peças que foi utilizado, perguntando qual seria o número de peças necessárias para se construir um fractal triminó de nível4?E de nível5?E de nível n? Facilmente aluno irá perceber que a fórmula é 3 elevado ao nível que se procura,então nível $1=3^1=3$; nível $2=3^2=9$; nível $3=3^3=27$;....e nível $n=3^n$.

Uma outra sugestão é construir o cartão fractal(Triângulo de Sierpinski).

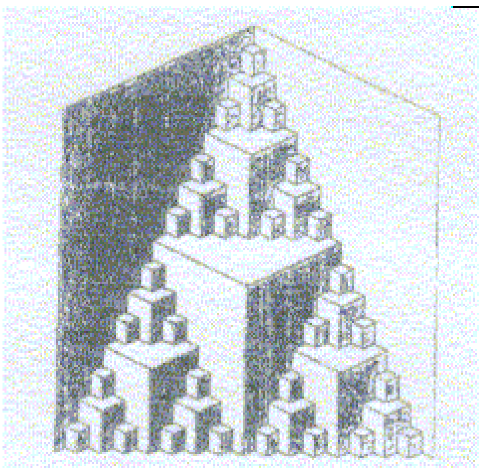


Figura 12- Cartão Fractal

Transcendendo as limitações impostas pela Matemática Clássica. Mandelbrot,em seu trabalho, ressaltou que os matemáticos foram, de certa forma iludidos pela

Natureza que mostrou ter mais imaginação na diversidade de formas que apresenta. A percepção de tais formas levou esses matemáticos a estudá-las sob os aspectos que Euclides não alcançou, tomando-se, assim, um estudo das “formas sem formas” ou “morfologias dos amorfos”. Foi aceitando este desafio que Benoit Mandelbrot concebeu e desenvolveu esta Geometria da Natureza e implementou o seu uso em inúmeras aplicações. A partir desta teoria descreveu vários dos irregulares e fragmentados modelos que encontramos em nossa volta através da família de formas que chamou *fractais*.

Assim desta maneira é possível apresentar o gráfico que pode ajudar um médico em seu diagnóstico.[28]

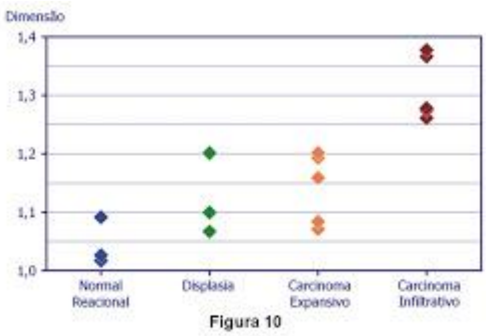


Figura 13- Gráfico de Diagnóstico http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Fractais- Contexto Histórico[39]

Já que estamos falando sobre os fractais cabe nos deixarmos claro ao leitor o que venha ser.

No final do século XIX e no início do século XX, múltiplos conjuntos de pontos do plano Euclidiano começaram a aparecer na matemática. Ainda que, fossem apenas curiosidades, estes conjuntos designados fractais, ganharam importância. Atualmente é reconhecido que estes conjuntos revelam fenômenos biológicos e físicos.

---

[8] O estudo do problema 2 foi retirado do Livro Álgebra Linear com Aplicações. Décima Edição. Howard Anton e Chris Rorres.

[9]Apresentando os fractais em sala de aula. Disponível em :<www.sbembrasil.org.br>files>trabalhos em 04 de Março de 2016.

Muitos fractais podem ser transformados em fragmentos menores (que são semelhantes ao fractal maior). Vale ressaltar que quando um fractal é aumentado, mantém-se tão complexo quanto a figura original.

Quanto mais ampliado estiver um fractal, maior detalhe é possível distinguir. Na realidade, estas figuras resultam de múltiplas interações da aplicação de modelos matemáticos, sendo que o princípio de auto-semelhança resenta a chave para a criação de fractais.

Presentes na Natureza em diversas manifestações, os fractais têm ocupado os interesses e o estudo de inúmeros matemáticos, que, nas investigações, têm exposto resultados extraordinários e surpreendentes fenômenos.

A seguir veremos algumas imagens dos fractais na natureza.

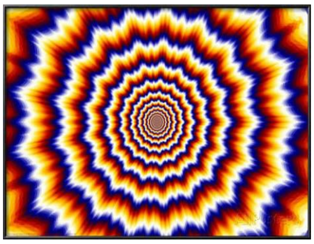



Figura 14- Exemplo de Fractais no cotidiano. Retirado de: aromadadoamor.blogspot.com

3.6. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO E ORIENTAÇÕES PARA O PROBLEMA 2[10]

Apresentaremos a seguir uma estratégia para o desenvolvimento de modelos matemáticos que possibilitem o estudo e diagnóstico de tumores malignos do ponto de vista matemático.

No problema 2 há questões envolvendo problemáticas na área da saúde, políticas públicas, entre outras. Podendo ser aplicado em cursos de Medicina, Enfermagem, Odontologia, entre outros.

[10] Está solução foi uma adaptação do artigo de Vesterna, Kobiyama intitulado: A geometria fractal da rede de drenagem da bacia hidrográfica do Caeté, Alfredo Wagner-SC. 2010. Árvore vol.34 no.4 Viçosa July/Aug.2010

Por se tratar de um problema que está relacionada com prática destes profissionais, ele não foge as características essenciais para a aplicação da metodologia que estamos propondo.

Primeiramente o tutor pode propor que os alunos pesquisem e tragam para os encontros tutoriais imagens de células que contém tumores de forma geral, motivando o estudo de aplicações dos fractais na medicina.

Os alunos em pequenos grupos de 4 ou 5 alunos, devem levantar os pontos de aprendizagem, neste caso o tutor pode sugerir caminhos a serem seguidos, indicar leituras, entre outros. Uma ferramenta matemática denominada contagem de caixas pode auxiliar no diagnóstico de tumores.

Imagine uma figura qualquer, por exemplo, a folha de uma planta e que sobre esta imagem, seja colocada numa malha quadriculada transparente, como a figura abaixo:

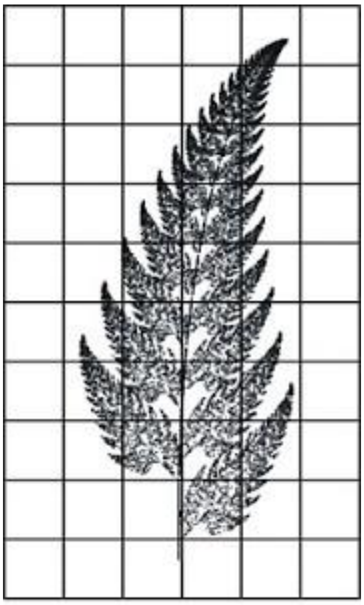


Figura 1

Figura 15 – Planta sobre malha quadriculada. Fonte: Retirado de http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

A malha é composta de um número x de quadradinhos chamados de caixas, sendo que a medida do lado da caixa é y. Colocaremos sobre esta figura outras malhas do mesmo tamanho, porém mais finas, ou seja, malhas cujas caixas tenham medidas menores do que y. Observe a figura 2 a seguir:

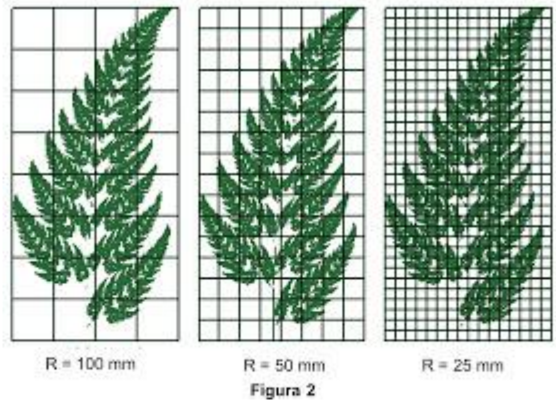


Figura 16- Planta sobre malha quadriculada Fonte: extraído de http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Podemos contar quantas caixas de cada malha são necessários para cobrir a imagem. No primeiro caso, cada caixa tem 100 milímetros de lado sendo necessários 26 caixas para cobrir a imagem. Da folha; na segunda malha que possui caixas com lados medindo 50 milímetros são necessários 90 caixas; e finalmente, a terceira malha com caixas medindo 25 milímetros são necessários 315 caixas. Com isso temos três pontos, dentre, (100; 26), (50; 90), (25; 315). Podemos com os pontos gerados construir um gráfico, com o modelo a seguir y=ax, onde a é a inclinação ou coeficiente angular da reta. Esse coeficiente angular fornece também a dimensão do gráfico que pode ser inteira ou fracionária como geometria fractal. Iremos a seguir apresentar o gráfico:

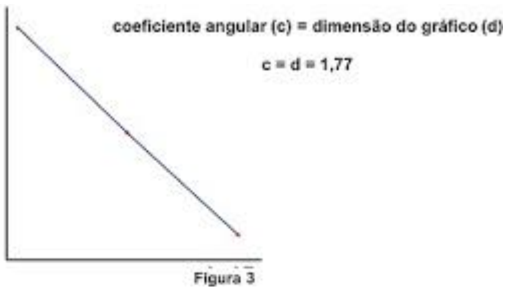


Figura 17- Gráfico do modelo matemático. Fonte: extraído de http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica- ajudando-salvar.html?

Esta ferramenta matemática pode ajudar no processo de diagnóstico de tumores malignos.

Como orientação para este encaminhamento, primeiramente os alunos em grupos devem fazer a leitura do problema, em seguida levantar os pontos de aprendizagem e delegar tarefas aos integrantes do grupo.

Indicamos como sugestão de estudo o processo de contagem de caixas, já que é um processo matemático que pode ajudar na resolução do problema. Como conhecimentos prévios, destacamos identificar informações explicitas e implícitas em gráficos, reconhecer grandezas inversamente proporcionais e grandezas diretamente proporcional.

Com este encaminhamento de estudo o tutor pode iniciar ou aprofundar conhecimentos a respeito de: função linear, crescimento e decrescente, o estudo da contagem de caixas com a utilização de malha quadriculada.