SEIJI NIWA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE LOGARITMOS UTILIZANDO OS CONCEITOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Graziela Marchi Tiago

SÃO PAULO

2016

N655u Niwa, Seiji.
Uma proposta de ensino de logaritmos utilizando os conceitos de modelagem matemática / Seiji Niwa. São Paulo: [s.n.], 2016.
126f.

Orientadora: Profª. Dra. Graziela Marchi Tiago.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2016.

1. Aplicações da matemática 2. Educação Matemática 3. Modelagem matemática 4. Logaritmos I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. II. Título

CDU 370.0

SEIJI NIWA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE LOGARITMOS UTILIZANDO OS CONCEITOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada e aprovada em 01 de março de 2016 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Profa. Dra. Graziela Marchi Tiago
IFSP – Câmpus São José dos Campos
Orientadora e Presidente da Banca

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Carlos Ricardo Bifi
Faculdade de Tecnologia de São Paulo
Membro da Banca

À Minha Família

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Profa. Dra. Graziela Marchi Tiago, pela sua orientação e mais do que isso, sua dedicação em meio a diversos contratempos conseguiu com muita seriedade dar todo aporte para que houvesse a conclusão.

À Profa. Dra. Mariana M. P. A. Baroni, por suas preciosas dicas e sugestões, sempre se disponibilizando quando solicitada.

Ao Prof Dr. Rogério Ferreira da Fonseca pelas sugestões e observações essenciais a esse trabalho dadas em relação ao olhar da Educação Matemática e pela presença na Banca de qualificação e defesa deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Carlos Ricardo Bifi pelas ótimas sugestões apontadas e imensa organização e clareza em seus apontamentos. Agradeço também a participação na Banca de qualificação e defesa deste trabalho.

Aos Prof. Dr. Armando Traldi Júnior e Profa. Dra. Andrea Ribari Yoshizawa por aceitarem fazer parte do grupo de professores suplentes para a Banca avaliadora deste trabalho.

Aos professores que tive em toda minha formação acadêmica, desde o berçário até o curso de mestrado.

À minha família pela compreensão e apoio incondicional.

Aos meus amigos.

Aos colegas de curso.

À escola Perspecitva Objetivo, ao Colégio Miranda e ao Colégio Rio Branco pela compreensão e confiança fornecida para que este trabalho pudesse ser concretizado.

Em especial a minha namorada Denise Tieko Ferreira Clementino, por acompanhar de perto toda esta trajetória, sempre dando o aporte necessário.

O professor está para o aluno tal qual o mestre para o discípulo, quando alunos veem seu professor como mestre entendem o real valor de um orientador em sua vida.

Luis Alves

RESUMO

Esta pesquisa de cunho teórico tem por objetivo principal apresentar uma proposta de ensino de logaritmos utilizando as ideias da Modelagem Matemática por meio de fases para uma possível aplicação para turmas de Licenciatura em Matemática. Em nossa pesquisa percebemos que embora tenha um número significativo de trabalhos sobre ensino de logaritmos, poucas utilizam a Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino, fato este que foi uma das motivações da pesquisa. Sobre o movimento histórico da Modelagem Matemática apresentaremos as ideias iniciais, desde a utilização deste conceito na Educação Matemática até a aplicação dela no ensino. Analisamos diferentes ideias de pesquisadores desta grande área até chegarmos a um consenso de utilizar a ideia da Modelagem Matemática por meio de fases proposta por Beltrão. Na parte final elaboramos uma sequência didática com uma análise de cada exercício proposto contendo também diversas sugestões de trabalhos que servirão de subsídio ao professor que sentir necessidade de reforçar determinado assunto.

Palavras-chaves: Aplicações da Matemática; Educação Matemática; Modelagem Matemática; Logaritmos.

ABSTRACT

This dissertation presents an imprint of theorical research which the main objective is presents a teaching proposal of logarithms using ideas of Mathematical Modeling. In our research we realized that although a significant number of research in logarithms of education, few use Mathematical Modeling as a teaching metedology, and this fact motivated us in our research. About the historical movement of Mathematical Modeling we are going to present the initial ideas from the use of this concept in Mathematics Education to the aplication of this concept in teaching. We analyzed different ideas of researchers in this area until we reach a consensus to use the idea proposed by the Mathematical Modeling through phases. In the last part we developed a teaching sequence with an analysis of each exercise proposed in order to get it ready so it can be applied by any teacher whose goal is the logarithms teaching.

Keywords: Mathematics Applications; Mathematics Education; Mathematics Modelling; logarithms.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

Pág.

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO

A procura por diferentes metodologias de ensino de Matemática que se diferenciem do ensino tradicional é algo comum e recorrente na prática docente. A concepção que temos sobre a metodologia de ensino tradicional é a mesma adotada por Baldino *apud* Silva (1996) onde segundo ela a denominação “metodologia tradicional” foi atribuída a essa autora desde o ano de 1989 nas discussões no Seminário de Matemática e Educação Matemática (SMEM) na UNESP, *campus* Rio Claro. Nessa metodologia existe a crença de que o aluno aprende durante a observação do professor que deve ensinar mostrando. Em relação à metodologia adotada pelo professor deve considerar que o mais abstrato é mais fácil para o aluno organizar as ideias.

A exemplo de pesquisas de diferentes metodologias de ensino temos Rossi (2010) que elabora uma sequência didática para abordar logaritmos utilizando atividades cuja problemática envolve situações reais, Santos (2014) que utiliza os conceito da Modelagem Matemática no ensino da função seno, Vidigal (2014) que utiliza a metodologia da resolução de problemas para abordar logaritmos, entre outros.

Esta busca por diferentes metodologias de ensino deu força para a Modelagem Matemática, que ao ser aplicada ao ensino se torna uma metodologia mais atrativa por apresentar um processo de ensino-aprendizagem voltado para a realidade dos estudantes e se tornando assim menos abstrato. Diversas pesquisas e trabalhos subsidiam tal afirmação como em Burak (1987), Spina (2002), Santos (2014), entre outros.

A pesquisa de metodologias de ensino diferenciadas foi uma das motivações que levaram à Modelagem Matemática aplicada ao ensino. Em minha prática docente questionei por diversas vezes sobre o motivo dos estudantes carregarem consigo uma inquietação que era ignorada sobre alguns conteúdos matemáticos. A exemplo disso, destaco os logaritmos que acabam gerando grande dificuldade no entendimento por conta de alguns fatores que podem ser a causa do problema como a falta de envolvimento dos estudantes no processo por diferentes motivos que foram abordados em outras pesquisas que serão citadas na sequência.

As pesquisas que citaremos a seguir, apontam como principal motivação para a pesquisa a dificuldade dos estudantes e até mesmo de professores com a abordagem dos logaritmos. Como em Oliveira (2005), Ferreira e Bisognin (2007), Merichelli e Allevato (2010), Rossi (2010), Vidigal (2014), entre outros. Nestes trabalhos, temos que o fator principal que causa a dificuldade é a abordagem do tema ser feito de maneira tradicional, ou seja, a apresentação dos conceitos é dada sem que haja a alguma justificativa e conexão com a realidade dos estudantes.

Além das dificuldades dos estudantes com relação aos logaritmos e a dificuldade no ensino causada pela metodologia adotada, outro fator determinante na escolha do tema de pesquisa foi a importância dos logaritmos para o processo de formação do estudante. Segundo pesquisas como as de Rossi (2010) e Vidigal (2014), os logaritmos são um grande elo de ligação da matemática com diversas disciplinas que para alguns estudantes podem parecer desconexas da Matemática. A exemplo disso, existem aplicações dos logaritmos no cálculo de pH de substâncias (química), nas escalas de mensuração de terremotos (física/geografia), no cálculo do tempo ou da intensidade de emissão de radioatividade de substâncias (química/física), na gasometria arterial que faz a mensuração dos níveis de gás carbônico (medicina), etc. Caso minha prática docente não fosse questionada em algum momento, todas essas abordagens que poderiam servir de motivação para os estudantes no estudo de logaritmos seriam ignoradas.

Diante destas inquietações verificamos que a prática pedagógica no que diz respeito ao ensino de logaritmos pode ser repensada. Restringir-se a técnicas de memorização com a aplicação de diversos exercícios propostos em grande parte dos livros didáticos faz com que tenhamos uma análise superficial. Com isso surge então uma primeira questão a ser respondida: qual o potencial que uma metodologia de ensino diferenciada da tradicional pode apresentar?

Silva e Basso (2012), apresentam um artigo que faz parte da pesquisa de mestrado que envolve o ensino de funções, funções exponenciais e logarítmicas através de situações-problema do cotidiano. A pesquisa destes autores não envolve a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, mas apresenta uma característica comum à nossa pesquisa: uma proposta de ensino que se diferencie do ensino tradicional. Nesta sequência elaborada, no momento em que o objetivo é introduzir o conceito de função exponencial e logarítmica, a atividade é iniciada com a apresentação da função exponencial como um modelo matemático utilizado para descrever o crescimento ou decrescimento de fenômenos da natureza e no funcionamento de juros compostos. Em relação a função logarítmica, foi destacada a aplicação no cálculo da intensidade dos terremotos, altura de determinadas plantas, pH de soluções químicas, entre outras. Destacamos o seguinte trecho sobre uma das conclusões dos autores:

> observa-se que o conteúdo que envolvia as situações-problema despertou o interesse dos estudantes, pois eles não consideravam a possibilidade do logaritmo ser aplicado em diversas situações da vida cotidiana. Essa motivação foi um dos combustíveis para que os alunos percebessem a importância do estudo dos logaritmos na escola. (SILVA e BASSO, 2012, p. 180)

No trecho destacado, os autores constataram que situações-problema que envolvem o cotidiano dos estudantes despertam maior interesse e faz com que a importância do conceito matemático seja percebida. O seguinte trecho complementa a ideia anterior:

> A presente pesquisa demonstrou que a apresentação de situações problema envolvendo o conceito de função, funções exponenciais e logarítmicas, juntamente com o desenvolvimento das atividades em grupo, possibilitou uma aula de matemática mais produtiva em termos de construção do conhecimento, pois os alunos interagiram intensamente entre si durante o encaminhamento das resoluções, confrontando hipóteses, evidenciando a formação e manipulação de esquemas e a construção dos registros de representações semióticas para os conceitos matemáticos. (SILVA e BASSO, 2012, p. 184-185)

Com isso, percebemos que as pesquisas sobre o ensino de conteúdos matemáticos que se diferenciam do método tradicional, apresentam resultados expressivos e demonstram uma melhora no processo de ensino-aprendizagem.

Diante destas conclusões, das inquietações e a pesquisa de novas metodologias de ensino, buscamos encontrar possíveis caminhos que pudessem suprir nossas necessidades. Portanto utilizamos as ideias da Modelagem Matemática aplicada ao ensino para elaboração de nossa proposta, tendo como objetivo principal a utilização dos conceitos de Modelagem Matemática por meio de fases aplicada ao processo de ensino-aprendizagem de logaritmos com a sugestão de aplicação em cursos superiores de Licenciatura em Matemática. Vale lembrar que este é um material de apoio que servirá como um subsídio para o professor, podendo ser alterado e ajustado conforme as suas necessecidades.

A seguir, apresentaremos uma visão geral de nosso trabalho descrevendo o conteúdo de cada um dos capítulos que virão na sequência.

O capítulo 2 é a revisão bibliográfica direcionada em três tipos de pesquisas: as que abordam o ensino de logaritmos, algumas pesquisas sobre o ensino de conteúdos matemáticos que utilizam os conceitos de Modelagem Matemática segundo Bassanezi (2002) e por fim, pesquisas que trazem a Modelagem Matemática por meio de fases aplicada ao ensino, seguindo as ideias de Beltrão (2009).

No capítulo 3 será apresentada a metodologia de pesquisa adotada neste trabalho e os principais referenciais teóricos utilizados para a realização da mesma. Este trabalho se caracteriza como sendo uma pesquisa teórica ou ensaio teórico, segundo as definições dadas por Severino (2007) e Fiorentini (2012). Apesar de possuir essa característica, vale ressaltar que, segundo Barbosa (2001), podemos dizer que também possui uma essência no empirismo, visto que ele é pautado em experiências vividas dentro do ambiente escolar. Em relação aos referenciais teóricos, adotaremos as ideias de Bimbengut (2009) para descrever os aspectos históricos da Modelagem Matemática e as ideias de Bassanezi (2002) e Beltrão (2009) serão utilizadas como principais referências teóricas quanto às definições dadas para a Modelagem Matemática e a forma que se dá a aplicação destas ideias no processo de ensino-aprendizagem de logaritmos.

Na sequência, ainda no capítulo 3, apresentaremos alguns obstáculos que podem surgir durante o processo de ensino baseado na Modelagem Matemática. Os obstáculos aqui elencados são exemplos trazidos pelo próprio autor referenciado, no caso, Bassanezi (2002). A apresentação destes obstáculos serviu de motivação especial para a procura de diferentes trabalhos que pesquisaram a Modelagem Matemática com outra perspectiva. Nessa perspectiva que apresentaremos os resultados obtidos por Beltrão (2009), onde o processo de Modelagem Matemática foi adaptado para que se minimizasse o potencial surgimento dos obstáculos que será tema do capítulo seguinte.

No capítulo 4, apresentaremos a tese de Beltrão (2009), cujo tema central é o ensino do cálculo diferencial e integral utilizando-se dos conceitos de Modelagem Matemática de Bassanezi (2002) com as adaptações necessárias para a transposição das barreiras elencadas no capítulo anterior. Em sua proposta de ensino, Beltrão (2009) aplica a Modelagem Matemática no ensino de cálculo em etapas, denominadas por ela de Fases. Todo procedimento elaborado por essa autora segue os conceitos da Modelagem Matemática e são pensados para minimizar os obstáculos citados por Bassanezi (2002).

Ainda no capítulo 4 apresentaremos nossa justificativa da escolha feita por seguir o trabalho de Beltrão (2009) como nosso principal referencial. Essa justificativa se dá principalmente pelo fato defendido por ela que as barreiras citadas por Bassanezi (2002) realmente existem e, além disso, caso nos deparemos com elas, o tempo disponibilizado pode ser muito curto para a transposição dos mesmos.

No capítulo 5 será apresentada a nossa proposta de ensino de logaritmos pautada na Modelagem Matemática por meio de fases, segundo Beltrão (2009). Neste capítulo, apresentaremos nossa proposta que sugerimos a utilização em cursos superiores de Licenciatura em Matemática nas disciplinas iniciais que tratam dos conteúdos da Matemática do ensino básico.

O capítulo 6 será um complemento do anterior, pois nele apresentaremos as respostas esperadas em cada uma das atividades propostas e as possíveis intervenções que o professor poderá adotar caso haja a necessidade diante de um número expressivo de erros.

No capítulo 7, faremos a explanação sobre nossas perspectivas futuras e nossas considerações finais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta a revisão bibliográfica dos temas envolvidos no nosso trabalho. A revisão foi dividida em: trabalhos que buscavam metodologias alternativas de ensino de logaritmos, pesquisas em Modelagem Matemática aplicadas ao ensino de diferentes conteúdos em Matemática e propostas de ensino utilizando a Modelagem Matemática por meio de fases.

Com relação aos trabalhos sobre o ensino de logaritmos, destacamos as pesquisas de Oliveira (2005), Ferreira e Bisognin (2007), Merichelli e Allevato (2010), Rossi (2010), Vidigal (2014), cuja seleção foi realizada a partir da caraterística comum apresentada que é a proposta de ensino diferenciada da metodologia tradicional.

Oliveira (2005) faz uma pesquisa sobre o ensino de logaritmos baseado em uma sequência de atividades que tem como foco principal o trabalho com a história da matemática. Além da busca do conceito de logaritmos na história, faz uma analogia com a música para que mostre a potencialidade que este estudo apresenta. Ela tinha como um dos pressupostos concluir se a abordagem feita com a história da matemática poderia colaborar para uma formação mais profunda e não necessariamente a apresentação da demonstração de teoremas de modo mecânico.

Em suas conclusões, Oliveria (2005) diz que esse pressuposto se confirma durante as atividades propostas principalmente na fala dos estudantes. A autora confirma que o trabalho pedagógico no ensino de logaritmos utilizando-se de diferentes metodologias não devem se limitar à exploração mecânica mas sim explorar situações e aplicações do conteúdo. Reforçando a ideia da utilização de uma sequência didática utilizando o contexto histórico, a autora relata que essa abordagem histórica trás à tona as discussões sobre conceitos, propriedades e até mesmo aplicações desse conteúdo mas não se deve desconsiderar os conhecimentos prévios.

Ferreira e Bisognin (2007) apresentam um artigo que trata do ensino de logaritmos por meio de outra metodologia: a engenharia didática. Vale ressaltar que neste trabalho, embora não faça uso da Modelagem Matemática aplicada ao ensino como seu aporte teórico, a engenharia didática faz uso de problemas reais e do cotidiano dos estudantes na elaboração de suas atividades.

Uma das hipóteses destes autores era a de que o ensino de logaritmos partindo de situações concretas permite a elaboração de conjecturas, o que traz uma motivação para o estudo daquele determinado conteúdo e consequentemente, um sucesso na aprendizagem. Nessa sequência didática, dividida em quatro fases, os autores exploraram os conhecimentos prévios necessários para o entendimento dos logaritmos em sua primeira etapa, depois faz uma abordagem histórica sobre o tema, apresentam problemas reais que utilizarão os logaritmos como ferramenta para a resolução dos mesmos e por fim a conclusão da pesquisa.

Os autores concluem que a abordagem histórica dos logaritmos contribuiu para o processo, pois isso fez com a hipótese apresentada inicialmente sobre uma das utilizações dos logaritmos na simplificação dos cálculos fosse confirmada. Outro aspecto relevante observado nesta pesquisa foi o empenho dos estudantes em procurar novas aplicações dos logaritmos o que confirma a ideia de que novas metodologias podem instigar a procura de novos conhecimentos e a construção do dele por parte dos estudantes.

Com a mesma ideia de Ferreira e Bisognin (2007), Rossi (2010) faz uma sequência de atividades para o ensino de logaritmos em que o aporte teórico utilizado é a engenharia didática. Segundo Rossi (2010), essa sequência baseada na engenharia didática é constituída por folhas de atividades que buscam maior autonomia possível por parte dos estudantes. Além das atividades, existe o recurso da aula expositiva, utilização do computador e calculadora.

A sequência utilizada por Rossi (2010) foi pensada para 15 aulas de 50 minutos cada e separada em 10 momentos divididos de acordo com o objetivo da aula. Em seu primeiro encontro, foi utilizada uma atividade cujo objetivo era a apresentar o conceito de logaritmos seguindo a abordagem histórica, apresentando a relação existente entre as progressões aritmética e geométrica. Utilizando as ideias do primeiro momento, o segundo encontro serviu para a contrução da definição de logaritmos. Nos dois encontros da sequência, a autora utilizou exercícios de livros didáticos e aproveitou um momento para a reflexão sobre as atividades. Feito isso, a autora apresentou as propriedades dos logaritmos em uma aula e na sequência apresentou o conceito de função logarítmica. Finalizado estes momentos, a autora aplicou mais uma folha de atividades com objetivo de apresentar algumas aplicações que existem dos logaritmos. Por fim, no último momento houve a aplicação de uma avaliação dissertativa.

Ao fim da sequência didática, a autora concluiu que em relação ao ano que não utilizou esta sequência, houve uma melhora significativa nos resultados ressaltando a aceitação por parte dos estudantes de uma metodologia diferenciada. Outro aspecto importante citado pela autora foi que embora a elaboração da sequência tenha sido trabalhosa, a aplicação das atividades otimizou o tempo das aulas pois a durante a elaboração, a preocupação com a autonomia para a resolução foi o foco principal.

Outro trabalho encontrado sobre ensino de logaritmos foi de Vidigal (2014). Nele o autor faz uma junção de todas as ideias citadas até o momento: procura um ensino de logaritmos diferente do tradicional, onde esse ensino será baseado em uma sequência de atividades com um tratamento histórico para que haja o que ele denomina por (re)significação do conceito. Além da proposta apresentar este tratamento histórico, em suas atividades são propostas problemáticas reais e com certo teor interdisciplinar.

Vidigal (2014) apresenta uma sequência composta por 6 atividades que devem ser aplicadas em uma ordem pré-determinadas, sendo que elas possuem diferentes níveis de dificuldade. Inicialmente é utilizada uma atividade com objetivo de investigar a relação existente entre a função exponencial e os logaritmos. Depois, duas atividades que discutem a invenção dos logaritmos, propriedades e as condições de existência. Por fim, três atividades que apresentam aplicações destes conceitos na geografia, química e física.

Para uma análise da eficácia dessa sequência, o autor fez uso de um questionário a ser respondido sem a identificação para que evitasse ao máximo uma intimidação ou indução ao resultado positivo nas respostas dos estudantes. Dentre as perguntas feitas, as respostas dadas indicam que após a sequência o interesse nas aulas de cálculo aumentou e foi considerada por todos os estudantes como “muito boas” ou “ótimas”. Outro aspecto observado em suas conclusões, foi o conhecimento que eles possuíam antes e depois da sequência sobre a aplicação do conceito de logaritmos na geografia, química e física. Em todos os casos, embora houvesse um conhecimentos prévio sobre a escala Richter, a escala de pH e a propagação do som, os estudantes apontaram que não conheciam a relação entre estes assuntos e os logaritmos.

A pesquisa de Oliveira (2014) trata a respeito da abordagem da função logarítmica em alguns livros didáticos. A autora faz uma triagem de livros didáticos que tratam sobre as funções exponenciais e logarítmicas de forma contextualizada e além disso, apresentam as justificativas das fórmulas e propriedades existentes.

A autora fez uma análise de dez livros didáticos de Matemática do Ensino Médio com relação a maneira que o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas é trabalhado. Classificou em “boa motivação” ou “motivação inadequada” as questões apresentadas pelos livros assim como a contextualização dos exemplos. Os exemplos ou atividades classficados como “inadequados” são aqueles que a abordagem da problemática é elabora de através problemas fictícios. Além da análise da apresentação destes conteúdos, ela faz também uma proposta de novos exercícios.

Nessa análise dos livros didáticos, concluiu que dentre os dez livros analisados, apenas três deles apresentavam boas motivações no estudo de equações exponenciais.

Após a triagem de pesquisas sobre o ensino de logaritmos, buscamos nos aprofundar em uma das metodologias propostas que foi a Modelagem Matemática. Porém, mesmo na pesquisa sobre Modelagem Matemática mantivemos um critério específico que foi procurar os trabalhos que seguiam as ideias de Bassanezi (2002). Selecionamos este autor pois, como apontado em Niwa *et al* (2014) houve um grande número de pesquisas posteriores a este autor que o referenciavam, como em: Burak (1987), Catarina de Oliveira Corcol Spina (2002), Tatiana Soares Cipriano (2013).

Em Burak (1987), o autor utiliza os conceitos de Modelagem Matemática para o ensino de diversos conteúdos que vão desde a divisão de números até as operações com frações para um grupo de estudantes da 5ª série do ensino fundamental.

Em seu trabalho, Burak (1987) aponta que a Educação Matemática estava em um momento de crise. O ensino de Matemática era destituído de significado pois era dado ênfase na memorização de fórmulas e mecanismos padronizados. O “como fazer” era o objetivo principal, deixando de lado o “por que fazer”, o que faz com que o estudante se torne um elemento passivo e dependente do professor. Segundo o autor, este tipo de ensino contribui ainda mais para a aversão dos estudantes. Diante disso, faz uma proposta de ensino diferenciada com a Modelagem Matemática aplicada em sua metodologia.

Segundo Burak (1987), a Modelagem Matemática foi uma boa solução encontrada para transposição da “crise”, embora tenha concluído que é algo muito desafiador, visto que existem alguns empecilhos em sua implementação. Dentre os empecilhos citados por este autor, Bassanezi (2002) classifica como sendo os “obstáculos instrucionais”, “obstáculos para os professores” e “obstáculos para os estudantes”. Em linhas gerais os obstáculos apresentados são o cumprimento de um currículo obrigatório nas escolas e o estranhamento dos professores e estudantes diante de uma nova metodologia. No capítulo 3 apresentaremos com mais detalhes os obstáculos aqui elencados.

O trabalho de Spina (2002) foi a dissertação de mestrado entitulada “Modelagem Matemática no processo de ensino-aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o ensino médio”. Neste trabalho, a autora faz uma introdução a respeito do ensino de Cálculo Diferencial e Integral na educação básica citando os motivos que levaram a exclusão deste conteúdo no Ensino Médio. Além dessa apresentação, a autora cita a importância deste conteúdo nesta etapa de formação pois permite maior possibilidade de um trabalho interdisciplinar do professor. A metodologia de ensino aplicada segue o mesmo modelo da obra de Basssanezi (2002).

Spina (2002) defendeu a ideia de que o estudo do cálculo diferencial integral na educação básica permite uma abordagem mais ampla na questão do ensino interdisciplinar, o que foi confirmado em suas conclusões. Para isso, a autora elabora uma sequência baseada nos conceitos da Modelagem Matemática segundo Bassanezi (2002). Em sua sequência, o tema gerador foi a abelha, utilizando um filme para que fosse dado início ao processo. Conteúdos como cálculo de áreas e volumes, uma parte da trigonometria, progressões, funções entre outros foram trabalhados durante essa sequência. Assim como relatado nas conclusões de Burak (1987) sobre os obstáculos, Spina (2002) aponta a dificuldade encontrada com cumprimento do programa de conteúdos previamente colocados na ementa do curso e para que não houvesse comprometimento com a pesquisa e com a sequência do curso dos estudantes, a autora optou por realizá-la fora do período das aulas regulares.

Tatiana Soares Cipriano apresenta uma dissertação de mestrado profissional apresentada no ano de 2013, cujo título é “Modelagem Matemática como Metodologia no Ensino Regular: Estratégias e Possibilidades” apresenta um caráter semelhante da nossa pesquisa pois, a autora optou por não aplicar suas atividades. Isso ocorreu para que houvesse um maior envolvimento na elaboração da sequência didática. Em relação à metodologia de ensino aplicada, também utilizou as ideias da Modelagem Matemática segundo Bassanezi (2002).

Em seu trabalho, Cipriano (2013) elaborou um material pedagógico composto por seis problemas que buscam incentivar a utilização dos conceitos de Modelagem Matemática por professores que não a conhecem e portanto, contribuir com a pesquisa em Educação Matemática. Neste material a autora faz a proposta de seis problemas que são divididos em diferentes séries do ensino fundamental e médio para que houvesse a passagem por todos os níveis da educação básica.

Dentre os trabalhos citados anteriormente, observamos que em todos eles foi apontado que diante da proposta de Modelagem Matemática aplicada ao ensino, segundo Bassanezi (2002), todos eles se depararam com a dificuldade do cumprimento da ementa do curso ou com o estranhamento dos estudantes nesta metodologia diferenciada.

Para que em nossa pesquisa não tivéssemos a mesma dificuldade apontada por estes trabalhos, procuramos outras perspectivas acerca da Modelagem Matemática aplicada ao ensino para a transposição destes obstáculos ou para a minimização deles. Como sugestão de transposição deles, encontramos o trabalho de Beltrão (2009). Na proposta desta autora, o processo de Modelagem Matemática é realizado por meio de fases que foram elaboradas e pensadas com o intuito de minimizar o aparecimento dos obstáculos citados nos trabalhos anteriores. Esta perspectiva de Beltrão (2009) será apresentada com maiores detalhes no capítulo 4 deste trabalho. Na sequência apresentaremos autores que utilizaram esta proposta de Modelagem Matemática por meio de fases. A exemplo disso temos Cristina Maria Brucki (2011) e Ricardo Ferreira Santos (2014).

O trabalho de Maria Cristina Brucki é do ano de 2011 e o título é “O uso de Modelagem no ensino de função exponencial”. Neste trabalho cujo tema central é o ensino baseado na metodologia da Modelagem Matemática, a autora faz uma proposta com o intuito de ensinar funções exponenciais fazendo uma analogia com o termo geral de uma progressão geométrica.

A introdução do tema é feita através de dois textos que trazem com tema central a radioatividade e usinas nucleares e suas consequências para o ambiente. Após a leitura do texto são feitas perguntas relacionadas à meia-vida do césio 137, utilizado na usina de Fukushima no Japão. Com isso, a autora buscou introduzir a ideia de função exponencial. Após a relização destas etapas, a autora apresenta outro texto para introduzir o tema de progressões geométricas para ao final destas atvidades, fizesse a analogia destes dois conceitos.

Em suas conclusões, Brucki (2011) aponta sua indagação feita foi sobre a possibilidade de envolver estudantes em um processo de ensino-aprendizagem de determinado conteúdo matemático utilizando Modelagem Matemática, se isso seria possível ou não. Ela concluiu que isso ocorreu de maneira significativa pois os estudantes se sentiram motivados a responderem questionamentos a respeito de situações reais, como a questão das usinas nucleares e se a implantação delas no Brasil seria viável.

Uma conclusão obtida pela autora com relação a utilização da Modelagem Matemática em sala de aula, é que embora haja o impedimento com relação aos obstáculos citados por diversos trabalhos e a preocupação do tempo utilizado pelo professor ser extenso, a autora confirma em sua pesquisa que embora a preparação das atividades seja uma trabalho árduo, a aplicação delas e o resultado obtido é compensado. Para uma maior precisão, a autora diz que para a realização destas atividades, ela utilizou de duas aulas com duração de 50 minutos cada.

A seguir, apresentaremos a pesquisa de Ricardo Ferreira Santos de 2014. O título de sua dissertação é “O uso da Modelagem para o ensino da função seno no ensino médio”. Em sua proposta, o autor faz referências à Modelagem Matemática segundo Bassanezi (2002) e Beltrão (2009) e ressalta que, assim como realizado por Beltrão, a modelagem aplicada por meio de fases minimizou o surgimentos dos obstáculos citados por diversas pesquisas.

Em seu trabalho, Santos (2014) propõe uma sequência didática que é baseada nos conceitos de Modelagem Matemática por meio de fases, descrita por Beltrão (2009). Uma característica que devemos destacar neste trabalho realizado por Santos (2014) são os obstáculos que existem durante a aplicação da Modelagem Matemática nos cursos regulares. Percebemos que os trabalhos citados neste capítulo apontam sobre a existência destes obstáculos e que para contorná-los, uma das soluções mais comuns é aplicação da sequência fora do período regular das aulas o que não foi diferente na pesquisa de Santos (2014).

Em suas conclusões, Santos (2014) aponta que um resultado obtido com a Modelagem Matemática por meio de fases foi a execução completa das três principais etapas: investigação, levantamento de dados e validação. Nestes três aspectos, ressalta que houve um grande envolvimento dos estudantes o que trouxe como consequência satisfação em seu trabalho realizado.

Após a leitura e reflexão de todos os trabalhos citados neste capítulo, podemos perceber que apesar de existirem pesquisas sobre o ensino de logaritmos e pesquisas sobre a Modelagem Matemática aplicada ao ensino, poucas utilizam estes dois temas concomitantemente. Diante disso, buscamos neste trabalho a junção destas ideiais e além disso em nosso material apresentaremos aos professores sugestões de interveção que poderá ser utilizada caso ocorra erros prejudiciais para a sequência didática.

A seguir, apresentaremos nossa metodologia e os referenciais teóricos utilizados.

3 METODOLOGIA E REFERENCIAIS TEÓRICOS

Neste capítulo vamos explanar sobre a metodologia proposta nesta dissertação, que optamos por ser uma pesquisa ou ensaio teórico, sendo que nos baseamos nas pesquisas de Severino (2007) e Fiorentini (2012).

Após a apresentação da metodologia de pesquisa faremos uma descrição sobre Modelagem Matemática, apresentado os aspectos históricos, discutindo sobre como se deu sua implementação no ensino e os principais pesquisadores na área, seguindo pesquisa realizada por Biembengut (2009).

3.1. A pesquisa teórica

O nosso trabalho se caracteriza por ser um *ensaio teórico* ou *pesquisa teórica* que, segundo Fiorentini (2012): “o pesquisador, neste tipo de estudo, não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou um ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica”.

Na figura 1, apresentaremos a estrutura que uma investigação pode seguir. No caso, existe algo que “inquieta” o pesquisador e isso determina o problema de pesquisa. Para se chegar a uma solução/conclusão sobre o problema o pesquisador pode optar por uma pesquisa de campo/laboratório ou uma pesquisa teórica. Como nosso trabalho é caracterizado por uma pesquisa teórica, aprofundaremos nossas ideias sobre esse tópico.

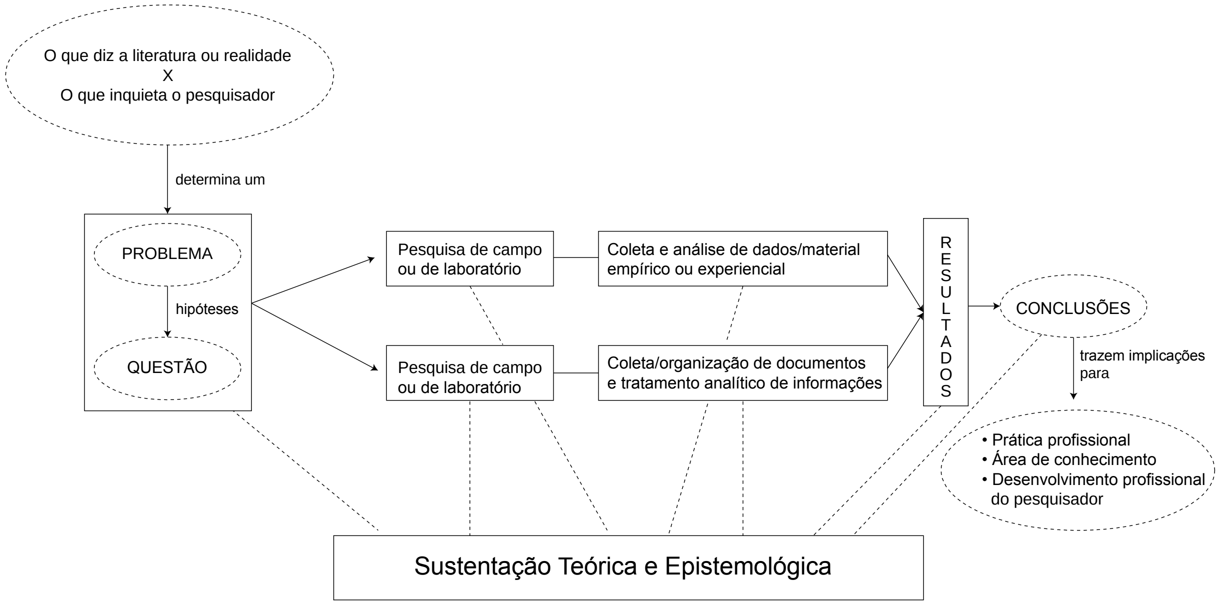


Figura 1 – Estrutura de uma investigação
Fonte: Fiorentini (2012).

Na pesquisa teórica, a coleta de dados tradicionalmente feita na pesquisa de campo ou de laboratório é substituída pela pesquisa bibliográfica onde o pesquisador fará a seleção e o tratamento da informação de acordo com suas necessidades. Os resultados são o que determinam suas conclusões que podem trazer implicações para a prática profissional, a área de conhecimento ou o desenvolvimento do profissional.

Encontramos em Severino (2007) que o ensaio teórico se caracteriza como sendo: “bem desenvolvido, formal, discursivo e concludente, consistindo numa exposição lógica e reflexiva e em argumentação rigorosa com alto nível de interpretação e julgamento pessoal” (Severino, 2007, p. 206). Ainda em Severino (2007), neste tipo de estudo, o pesquisador defende seu ponto de vista sem que haja a necessidade de se apoiar em uma documentação empírica.

Seguindo as ideias de Barbosa (2001) podemos dizer que este trabalho não se trata de uma pesquisa puramente teórica, pois embora tenha toda sua essência embasada pela *pesquisa teórica*, ela não se constitui integralmente neste aspecto, pois estamos subsidiados por pesquisas práticas e experiências pessoais na prática do ensino de matemática.

Esta proposta de atividades para o ensino de logaritmos utilizando Modelagem Matemática embora tenha todas as características de *pesquisa teórica*, não se torna integralmente teórica, pois possui sua essência em experiência profissional e práticas no ensino, além de apresentar todas as possibilidades de aplicação nesta área.

3.2. Modelagem matemática como metodologia de ensino

Em nossa pesquisa bibliográfica encontramos diversas metodologias de ensino que tem como objetivo, tornar o processo de ensino-aprendizagem mais próximo da realidade dos estudantes, por exemplo: Ferreira e Bisognin (2007), Merichelli e Allevato (2010).

Procuramos dentre as diversas metodologias, alguma que não tivesse como protagonista do processo o professor, ou seja, alguma metodologia que trouxesse a participação efetiva dos estudantes neste processo, pois concordamos com o seguinte provérbio de Burak (1987) apud Confúcio:

> Eu ouço, e eu esqueço,
> Eu vejo, e eu lembro,
> Eu faço, e eu entendo.

Nota-se no trecho destacado que devemos buscar métodos que envolvam os estudantes, deixando-os que façam para que entendam e não apenas ouçam ou vejam para que se esqueçam ou apenas lembrem.

Para contextualizarmos apresentaremos as ideias de Bassanezi (2002), cuja concepção de Modelagem Matemática é:

> arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. … a aprendizagem por meio da modelagem facilita na combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações. E mais, com este material, o estudante vislumbra alternativas no direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmica (BASSANEZI, 2002, p. 16).

Essas ideias coincidem com o nosso pensamento quanto a forma que pode ser feito o ensino de Matemática em seus diferentes níveis. Problemas que serão resolvidos utilizando-se de ferramentas matemáticas e portanto, o ensino da Matemática se torna intrinsecamente ligado à realidade e às aplicações no mundo real.

3.2.1 Aspectos Históricos

A *priori*, vamos descrever como surgiu essa metodologia de ensino e quem foram os precursores quanto a implementação dela no processo de ensino-aprendizagem no Brasil.

Segundo Biembengut (2009), a discussão sobre Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino ocorre por volta dos anos de 1958 e 1965, nos Estados Unidos. No ano de 1968 em um simpósio na Suíça houve uma discussão sobre a maneira que era feito o ensino de matemática e concluiu-se que os problemas propostos não poderiam ser padronizados e comuns, mas sim, problemas que estimulassem o raciocínio e a criação de modelos matemáticos. Ainda segundo a autora, no Brasil, Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Carlos Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazetta e Eduardo Sebastini, são pesquisadores que iniciaram os estudos sobre ensinar matemática por meio da modelagem.

Dentre os pesquisadores citados anteriormente, destaca-se Aristides Camargo Barreto como sendo, possivelmente, o primeiro professor/pesquisador que realizou experiências em sala de aula. Aristides tomou conhecimento sobre o tema durante o curso de engenharia na década de 60. Quando ele se tornou professor da PUC-RJ, em meados da década de 70, pensou nessa aplicação utilizando modelagem matemática em sala de aula.

Em Cipriano (2013), é relatado que na década de 60, Ubiratan D'Ambrosio, professor pesquisador da *Brown University, University of Rhode Island*, e na *State University of New York*, tomou ciência de um movimento na Europa e Estados Unidos e em 1972, com apoio da Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (Unesco) e da Organização dos Estados Americanos (OEA), D'Ambrosio implantou a proposta discutida na Europa e EUA aqui no Brasil. Dentro dessa proposta destacamos a criação do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na UNICAMP, em 1974.

Após a criação do curso de mestrado por D'Ambrósio, destacaremos um orientando dele, Rodney Carlos Bassanezi, que concluiu seu mestrado neste curso e foi orientado por D'Ambrosio em seu doutorado.

3.2.2 Modelo e Modelagem Matemática: Rodney Carlos Bassanezi

Rodney Carlos Bassanezi, embora sua formação inicial não seja na área de ensino, se torna um grande pesquisador em Modelagem Matemática e com o passar do tempo, traz contribuições para a área de ensino, aplicando a Modelagem Matemática.

Em uma de suas obras, Bassanezi (2002) discorre de forma precisa e sucinta sobre seu objetivo: fazer com que estudantes de todos os níveis, docentes e as pessoas em geral, aprendam a gostar de Matemática. Para isso, deve-se rever os modelos de educação praticados. O autor defende que o ensino de matemática deve ser menos alienado e mais comprometido com a realidade.

Após apresentar suas justificativas sobre a utilização da modelagem matemática para tornar o processo de ensino-aprendizagem menos alienado devido à solução de situações-problema do mundo real com a linguagem matemática, ainda defende que esse processo alia a teoria com a prática, motivando os estudantes a buscarem o entendimento da realidade que os cerca, para que nela, busquem os meios necessários para agir e transformá-la. Com isso, conclui-se que, além de uma estratégia de ensino, a modelagem matemática é também um método científico, que ajudará o estudante a exercer seu papel de cidadão.

Apresentada as justificativas da escolha da modelagem matemática como um método científico e uma estratégia de ensino que aplicada pode tornar o processo menos alienado, Bassanezi (2002) apresenta sua definição de modelo:

> Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela — o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros

> considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo (BASSANEZI, 2002, p. 19)

Ainda, segundo o autor, a definição dada, pode gerar diversas interpretações, portanto, devemos nos pautar em dois aspectos definidos por ele, os quais são os modelos que são relativos à representação de um sistema, que seria o modelo objeto e o modelo teórico.

Segundo ele, modelo objeto:

> é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc.), conceitual (fórmula matemática), ou simbólica. A representação por esses modelos é sempre parcial, deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou do objeto modelado. Um modelo epidemiológico (sistema de equações diferenciais) que considera o grupo de infectados como sendo homogêneo, onde todos os seus elementos têm as mesmas propriedades é um exemplo de modelo objeto; um desenho para representar o alvéolo usado pelas abelhas é também um modelo deste tipo. (BASSANEZI, 2002, p. 19-20)

Ainda em Bassanezi (2002), modelo teórico é:

> aquele vinculado a uma teoria geral existente — será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características de um sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais). (BASSANEZI, 2002, p. 20)

Portanto, define o Modelo Matemático como sendo um conjunto de símbolos e relações matemáticas que descrevem de alguma forma o objeto em estudo.

Adotaremos os conceitos e definições dadas por Bassanezi (2002), e concluímos que, segundo ele, Modelagem Matemática é:

> Um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A **modelagem consiste**, essencialmente, **na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual**. (BASSANEZI, 2002, p. 24. Grifo nosso)

Para que a Modelagem Matemática possa ser efetivamente aplicada no processo de ensino-aprendizagem, o autor indica alguns procedimentos a serem adotados; procedimentos que serão aprofundados na próxima seção.

3.2.3 Etapas da Modelagem Matemática

Segundo Bassenezi (2002), o processo de modelagem matemática apresenta cinco etapas, sendo elas:

1. Experimentação;
2. Abstração;
3. Resolução;
4. Validação;
5. Modificação.

Na obra de Bassanezi (2002) ele apresenta a figura 2 que ilustra as etapas citadas anteriormente.

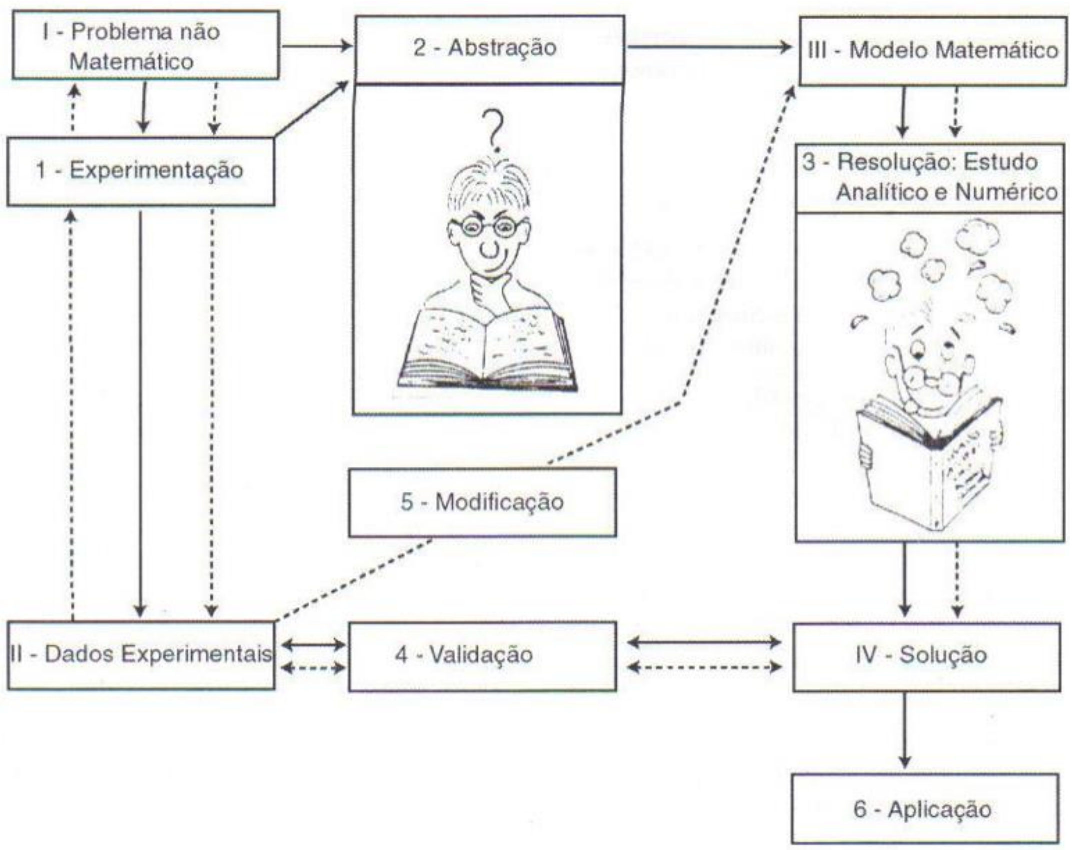


Figura 2 – Esquema de uma modelagem
Fonte: Bassanezi (2002)

Em sua obra, Bassanezi (2002) aponta que experimentação é:

> Uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados. Os métodos experimentais, quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa. A adoção de técnicas e métodos estatísticos na pesquisa experimental podem dar maior grau de confiabilidade dos dados obtidos. (BASSANEZI, 2002, p. 26-27)

Neste excerto, percebe-se que esta etapa se torna essencial para o modelador que tem como objetivo a obtenção de um novo modelo matemático.

Na “abstração” ocorre o levantamento de hipóteses, seleção de variáveis e a problematização. Consequentemente, nesta etapa deve ocorrer a formulação do(s) modelo(s) matemático(s).

A “resolução” é a etapa em que as hipóteses são levantadas na linguagem natural, são substituídas pela linguagem Matemática. Nesta etapa, há uma “tradução” dos termos utilizadas na linguagem natural para a matemática. Esta tradução será a solução do problema que iniciou todo o processo.

Na “validação” ocorre a aceitação ou não do modelo criado anteriormente. Nesta etapa, as hipóteses devem ser confrontadas com os dados levantados inicialmente da realidade. O nível de aproximação das previsões feitas que vão determinar a validação ou não.

Caso não haja a validação, a etapa da “modificação” servirá para que sejam revistas as hipóteses levantadas no início e os modelos utilizados na resolução. Será verificado se existe coerência nos modelos matemáticos e se realmente é válido. Nesta etapa será modificada os possíveis equívocos cometidos.

Em todo esse processo descrito por Bassanezi (2002), para a realização devem ser considerados alguns obstáculos. Os obstáculos que o próprio autor menciona serão discutidos na sequência.

3.2.4 Obstáculos da Modelagem Matemática

Na obra de Bassanezi (2002), após apresentar a proposta de aplicação da Modelagem Matemática no ensino, o autor relata sobre os obstáculos apresentados por pesquisas posteriores e vivenciados por ele.

Na figura 3 a seguir, apresentamos três tipos de obstáculos citados por Bassanezi (2002):

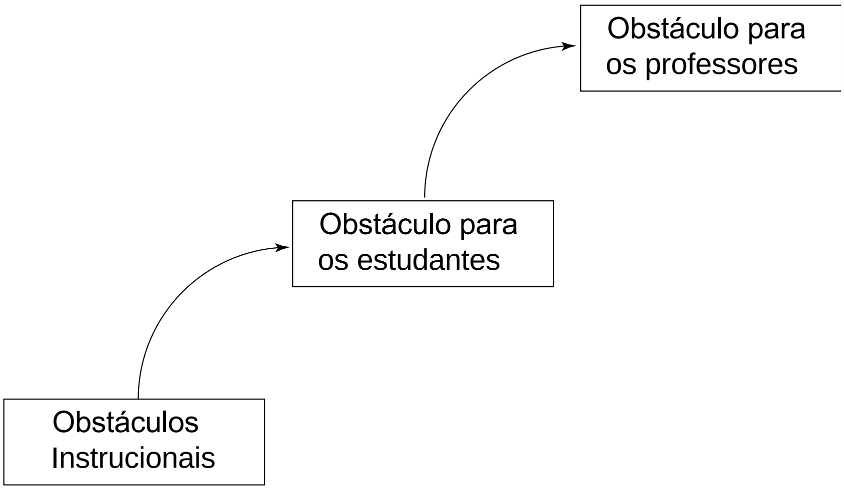


Figura 3 – Obstáculos do processo de Modelagem Matemática.
Fonte: Elaborada pelo autor.

O obstáculo classificado como instrucional é caracterizado principalmente na aplicação em cursos regulares onde o programa de curso deve ser cumprido e desenvolvido na íntegra. O processo de Modelagem Matemática pode se tornar longo e demorado o que pode impedir o cumprimento do programa. Ainda em Bassanezi (2002), o autor diz que alguns professores pensam que as conexões com as outras ciências que possivelmente podem ocorrer com a Modelagem Matemática, podem distorcer a estética, a beleza e universalidade da Matemática.

O obstáculo para os estudantes é causado pelo estranhamento de um ensino diferenciado do tradicional. Segundo Bassanezi (2002), isso pode gerar uma certa apatia, tendo como consequência uma criação de um bloqueio por parte dos estudantes. Outro fator que pode causar essa apatia e um obstáculo por parte dos estudantes ocorre quanto ao tema escolhido para a Modelagem Matemática que pode não ser motivador.

Para os professores, o obstáculo é caracterizado quanto a insegurança causada pela sensação de não estar habilitados a trabalhar com a Modelagem Matemática em sua prática. Esta insegurança acaba tornando o processo de preparação da aula mais demorado e trabalhoso.

Ainda no obstáculo dos professores, Bassanezi (2002) apresenta outro fato que pode ocorrer: situações não previstas durante o processo de modelagem. Modelos selecionados podem não resolver a situação proposta ou até mesmo chegar em conclusões que não faziam parte do objetivo do curso. Com isso, retorna o obstáculo instrucional, em que o cumprimento do programa se torna inviável.

4 TRANSPONDO OS OBSTÁCULOS

Com os obstáculos da Modelagem Matemática elencados anteriormente, nos dedicamos na busca de novos referenciais e até mesmo de novas metodologias que nos auxiliassem nessa transposição dos obstáculos.

Nesta busca, encontramos ainda sob a perspectiva da Modelagem Matemática que havíamos estudado, outra autora chamada Maria Eli Puga Beltrão. Ela faz um trabalho com a Modelagem Matemática por meio de faes aplicada ao ensino de cálculo diferencial e integral em um curso de Tecnologia de Alimentos. Esta autora também se baseia em nas ideias de Bassanezi (2002), porém, em sua metodologia de ensino faz uma alteração que evitou e contornou o surgimento dos obstáculos citados pelo próprio Bassanezi.

Diante disso, adoratemos as ideias de Beltrão (2009) sobre a Modelagem Matemática aplicada ao ensino como nosso principal aporte teórico.

4.1 Maria Eli Puga Beltrão

Na sua tese, a autora traz uma proposta que faz a junção entre a teoria e a prática da Modelagem Matemática no ensino. Na parte teórica, faz uma pesquisa bibliográfica sobre a Modelagem Matemática e a criação de cursos de tecnologia. Nessa pesquisa bibliográfica, a autora concluiu sobre a "vitalidade da Modelagem e Aplicações como linha de pesquisa na Educação Matemática, bem como suas potencialidades para o ensino" (Beltrão, 2009, p. 8). Esse pensamento vai ao encontro do pensamento exposto por Bassanezi (2002), o qual procura mostrar a importância e eficácia do processo de ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.

Em sua pesquisa empírica, Beltrão faz a implementação da Modelagem Matemática na disciplina de Cálculo no curso de Tecnologia de Alimentos em uma Faculdade de São Paulo. Neste aspecto, a autora pôde concluir que, os estudantes se envolveram mais no processo, demonstrando mais interesse em estudar a disciplina e principalmente na aplicação do conteúdo e complementa com a seguinte ideia:

> No entanto, esses dados também mostraram como é necessário o rompimento com contratos didáticos estabelecidos, com hábitos e concepções que reforçam a ideia de que a Matemática é desvinculada da realidade (BELTRÃO, 2009, p. 8).

Em sua metodologia de ensino, Beltrão apresenta uma proposta que difere da metodologia de ensino de Bassanezi. A diferença crucial se dá pelo tema a ser modelado. Beltrão (2009) assumi que o obstáculo causado pelo tempo que os professores possuem para o cumprimento do curso e os conhecimentos prévios dos estudantes são obstáculos intransponíveis. Portanto, nesse ponto há a divergência do pensamento de Beltrão (2009) e Bassanezi (2002). Segundo Santos (2014), tanto Bassanezi como Dionísio Burak defendem que a escolha do tema gerador de um modelo matemático deve ser uma atribuição dos estudantes e os conhecimentos prévios devem orientar o professor nesse processo de construção.

Para Beltrão (2009), antes de se iniciar a Modelagem Matemática propriamente dita, se faz necessário a aplicação de uma atividade diagnóstica que servirá de base para o professor dar seguimento à suas etapas.

Na primeira fase, existem três subfases a serem cumpridas. Na primeira subfase, ocorre a apresentação do conteúdo com uma abordagem histórica, em que o professor deve reforçar que a construção daquele conhecimento foi fruto de muito trabalho. Na segunda subfase, o professor apresenta aos estudantes algumas possíveis aplicações do conteúdo, onde há uma pergunta norteadora: “onde vou usar isto?”. Na terceira subfase o professor apresenta as definições, as propriedades importantes e alguns exemplos. Nesse ponto, o uso da aula expositiva torna-se ainda um bom recurso para o professor.

Na segunda fase é o momento que o professor solicita aos estudantes que apresentem modelos ou aplicações diferentes do apresentado pelo professor. Nesta etapa ocorre uma participação efetiva do estudante no processo, envolvendo-o nele. O professor poderá intervir na discussão com o intuito de enriquecer. É nessa fase que o professor alimenta uma discussão que abranja tanto o tema modelado, (apresentado como aplicação) quanto, principalmente, a Matemática nele envolvida.

Beltrão fala nas especificidades, pois esse processo de modelação matemática foi pensado em cursos superiores, não para a Educação Básica.

Na terceira fase, os estudantes trabalham de forma muito similar à segunda fase, e mais intensamente no processo. Ao invés de apresentarem modelos prontos pertinentes a sua área, os estudantes devem criar novos modelos, tendo que realizar a etapa da primeira fase para um tema central novo.

4.2 Modelagem Matemática na perspectiva de Beltrão (2009)

Na perspectiva de Beltrão (2009) o processo da Modelagem Matemática é realizado por meio de fases pensadas para que minimizem ao máximo os possíveis obstáculos citados anteriormente.

Antes de dar início ao processo de ensino por meio de fases, é necessário o levantamento de possíveis defasagens de determinados conteúdos que servirão de base para a continuidade do processo. Após a aplicação e análise dos conhecimentos prévios necessários que se iniciará o processo por meio de fases que são divididas em três etapas, sendo que a primeira é subdividida em mais três.

Na figura 4 apresentada a seguir temos um esquema com as etapas envolvidas neste processo. Após a apresentação do esquema faremos a explanação das fases e subfases envolvidas.

Modelagem Matemática por fases

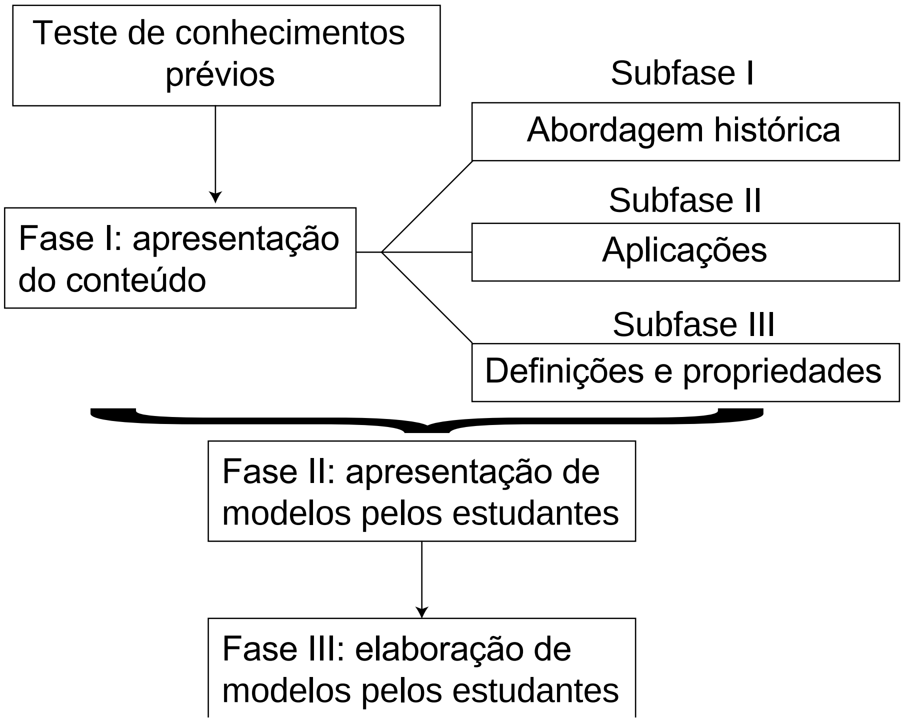


Figura 4 – Esquema de modelagem por meio de fases.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Teste de conhecimentos prévios

Inicialmente, aplica-se uma atividade diagnóstica que também pode ser referenciada como teste de conhecimentos prévios. Nesta etapa, o professor aplicará um teste em formato de avaliação com o intuito de observar e prever como será o andamento do processo de ensino. Caso algum conteúdo escolhido apresente uma certa dificuldade, o professor deverá retomá-lo.

Fase I: apresentação do conteúdo pelo professor

Nesta fase, há uma subdivisão em três subfases:

- **Primeira**: apresentação do conteúdo através de uma abordagem histórica, com o intuito de motivar os estudantes. Nesta etapa, é importante salientar que o conteúdo matemático e o desenvolvimento de toda ciência ali envolvida, não foi fruto de um trabalho simples, com o objetivo de despertar nos estudantes a vontade de aprofundar o conhecimento de determinado conteúdo;

- **Segunda**: exploração das possíveis aplicações. Nesta subfase, deverá ser respondida a pergunta: “onde eu vou usar isto?”. Ficará como atribuição ao professor apresentar situações-problema em que a solução seja feita através de um modelo matemático. Para tal, deverá fazer todo o processo de construção do modelo até a etapa de validação;
- **Terceira**: apresentação de definições e propriedades importantes daquele conteúdo e exemplos. Nesta subfase, o professor apresenta as definições matemáticas, ou seja, é o momento da formalização do conteúdo. Além das definições pertinentes, também deve-se apresentar as propriedades que existem e, por fim, apresentação de exemplos, que se possível, sejam direcionados a fenômenos específicos ao curso.

Na proposta da autora na terceira subfase, quando cita os exemplos direcionados a fenômenos específicos do curso, deve-se ressaltar que ela trabalhou com um grupo de estudantes do curso de Tecnologia de Alimentos, o que não impede a aplicação em outros cursos.

Fase II: estudantes apresentarão situações que envolvem o conteúdo matemático em estudo

Nesta fase, o trabalho principal é do estudante. Nela, deverá trazer para aula modelos ou aplicações diversificadas do conteúdo trabalhado e uma das propostas da autora, é que sejam sempre voltados às especificidades do curso em questão.

Durante a apresentação dos estudantes, o professor direcionará a discussão, enriquecendo os tópicos apresentados, mostrando a matemática ali envolvida.

Fase III: estudantes elaboram situações expressas por modelos ou aplicações

Nesta fase, os estudantes ainda são os princiapais atuantes da aula. Deverão aplicar os conceitos da Modelagem Matemática em um tema escolhido por eles. Diante de um tema ou situação-problema, os estudantes farão a construção de todo o processo da Modelagem Matemática, validada por modelos matemáticos que encaminharão para a solução do mesmo.

4.3 Modelagem Matemática

Após a análise do processo de modelagem matemática segundo Bassanezi (2002) e Beltrão (2009), percebemos que há uma diferença nas ideias dos dois autores na etapa inicial do processo.

Na segunda etapa de Bassanezi (2002), definida por “Abstração”, ocorrerá a formulação de hipóteses, seleção de variáveis, a problematização e simplificação. Entende-se então que, essa formulação de hipóteses, pode gerar diversos problemas e consequentemente a diversos modelos matemáticos. Para Bassanezi, essa diversidade de temas pode ser muito produtivo em momentos específicos, mas não pensando no processo de ensino-aprendizagem de cursos regulares onde há um currículo a ser cumprido. Vale ressaltar que no capítulo 2 listamos os diversos obstáculos apontados por Bassanezi (2002).

O autor ressalta que um dos obstáculos encontrados pelos educadores ao trabalhar com a Modelagem Matemática é justamente nessa etapa, pois a “Abstração” é muito pessoal, onde cada um dos estudantes possui um tipo de pensamento e raciocínio, ou seja, o surgimento de temas variados, com possíveis modelos variados, se torna quase que um evento certo.

Com isso em mente, os professores optam por não trabalhar com a Modelagem Matemática com receio de que não consigam dar conta do conteúdo programático, ou seja, optam pelo ensino classificado como “tradicional” para conseguirem terminar o conteúdo proposto.

Neste mesmo ponto, Bassanezi (2002) diz que dentre os diversos temas que podem surgir, o professor pode se sentir inseguro em não conseguir determinar um modelo matemático para a solução da situação. Pode ocorrer de não haver um modelo pré-determinado, causando possíveis constrangimentos.

No trabalho de Beltrão (2009), para minimizar o surgimento desses problemas, ela sugere que na primeira etapa, seja iniciada com uma contextualização histórica, e seja salientada a importância do conteúdo a ser modelado e a construção dele não se deu de forma rápida e instantânea. Como o conteúdo e o tema central já estão pré-estabelecidos é possível que o professor não se sinta inseguro.

Após essa etapa inicial, o processo se torna muito semelhante para os dois autores, se diferenciando no final. Para Bassanezi, o final do processo se dá na validação/modificação, em que o modelo matemático pode ser validado, caso as relações utilizadas sejam matematicamente válidas, caso contrário, é feita uma modificação e por fim, validado. Para Beltrão, o fim do processo se dá com os estudantes elaborando novos modelos matemáticos, ou seja, há uma criação de novos modelos matemáticos por parte dos estudantes com o auxílio do professor.

Podemos então, definir que, para o processo de ensino de um determinado conteúdo, mesmo em diferentes níveis de escolaridade, para contornar os diversos obstáculos que podem surgir durante o processo de Modelagem Matemática aplicada ao ensino, a proposta de Beltrão se mostra mais pontual e eficaz para o nosso objetivo.

5 PROPOSTA DE ENSINO DE LOGARITMOS

Seguindo as fases propostas por Beltrão (2009), apresentaremos algumas sugestões de atividades que poderão ser utilizadas pelos professores que tenham como objetivo a prática da Modelagem Matemática no ensino de logaritmos.

A sequência de atividades apresentadas foram pensadas para turmas de Licenciatura em Matemática.

Atividade de teste de conhecimentos prévios

Inicialmente, como é proposto pelo referencial adotado, é necessário que façamos um teste de conhecimentos prévios, que também é denominado como atividade diagnóstica. Nela, temos como objetivo elencar alguns conteúdos que julgamos ser essenciais para o bom andamento do curso.

Para o nosso trabalho, selecionamos os seguintes temas:

- porcentagem;
- potenciações e propriedades;
- equações exponenciais;
- decaimento radioativo;
- meia-vida;

O conhecimento de porcentagem se faz necessário pois, quando for aplicada a atividade da Fase I – subfase II, em que o professor apresentará as possíveis aplicações do logaritmo no cotidiano dos estudantes, uma das abordagens pode ser pensada na Matemática Financeira, mais especificamente, em problemas que envolvem juros. A porcentagem se faz essencial nesse cálculo.

Ainda na Fase I – subfase II, a introdução dos juros compostos será feita com o auxílio das exponenciais, portanto, o conhecimento das potenciações e suas propriedades também se faz necessário.

Os conceitos, ainda que não formalizados com tanto rigor, de decaimento radioativo e meia-vida, se fazem necessários pois, o professor pode pensar na Fase

I – subfase II, em um problema que traz questões que envolvem o decaimento radioativo, ou atividade da massa radioativa de determinada substância.

O teste de conhecimentos prévios se encontra na íntegra no final do trabalho como Apêndice B.

Fase I – subfase I: contextualização histórica

Segundo Beltrão (2009), neste momento o professor fará uma apresentação dos aspectos históricos do tema escolhido. Em nosso trabalho, foi proposta a discussão sobre o contexto histórico e o motivo que levou a invenção dos logaritmos.

Para tal, escolhemos um livro didático que poderá ser utilizado e um artigo escrito por Eloi da Silva Pereira:

- Matemática Contextos e Aplicações. Volume único. Autor: Luiz Roberto Dante. Editora Ática: 2009;
- “A importância do logaritmo para a sociedade” de Eloi da Silva Pereira, publicado nos anais do X ENEM em 2010.

O livro didático selecionado, foi escolhido após a leitura do trabalho de Patrícia Rodrigues da Silva Rossi, cujo título da dissertação é: “Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática”, publicado em 2010. Em seu trabalho, embora não utilize a metodologia de ensino proposta por Bassanezi (2002) ou Beltrão (2009), há uma análise de alguns livros didáticos com o intuito de verificar como é feita a abordagem histórica, apresentação das definições e como eram propostos os problemas. No nosso caso, observamos apenas o primeiro item: verificar quais livros apresentam um contexto histórico na apresentação dos logaritmos.

Dentre os 4 livros analisados pela autora, o único que apresenta essa abordagem histórica é o escolhido por nós. Segundo Rossi (2010):

> É feita uma abordagem histórica em que o autor traz a origem dos logaritmos e sua utilidade na época e justifica que atualmente os logaritmos não têm o mesmo papel de quando foi criado, mas

> continua sendo muito importante para a resolução de equações exponenciais (Rossi 2010, p. 31).

Como na sequência de atividades exploraremos o conceito de logaritmos através de problemas de equações exponenciais, pensamos que este livro em específico possa trazer grande contribuição.

O artigo selecionado para uma possível utilização tem como título: “A importância do logaritmo para a sociedade”. Escolhemos este trabalho, por apresentar uma contextualização histórica do momento vivido durante a criação dos logaritmos e faz um breve comentário sobre as possíveis aplicações e utilizações deles.

Pensamos que essa escolha traz grande contribuição para a sequência pois, segundo Beltrão (2009), nesta etapa do processo é necessário a valorização do conteúdo a ser trabalhado no sentido de que devemos mostrar que o logaritmo foi fruto de muita pesquisa. Além disso, com a apresentação desse artigo, esperamos que haja um certo teor de curiosidade dos estudantes sobre o que está por vir.

O artigo adaptado para a utilização se encontra no fim deste trabalho como Apêndice C.

Fase I – subfase II: apresentação de possíveis aplicações

Nesta etapa, o professor apresenta aos estudantes as possíveis aplicações do conteúdo. Segundo Beltrão (2009), é imprescindível que os professores respondam o seguinte questionamento: “onde é que eu vou usar isso?”.

Apresentaremos duas sugestões que podem ser utilizadas na sequência.

Na primeira, atividade que pode ser vista no Apêndice D, apresentamos uma aplicação das funções exponenciais, que será um norteador para a explanação dos logaritmos. Nesta atividade abordamos o tema de *doping* no esporte.

A atividade poderá ser iniciada com a leitura de uma matéria de jornal, onde explicará o fato ocorrido com esse atleta. Após a leitura será abordado o tema do uso de substâncias anabolizantes utilizados principalmente em academias. Feito a discussão em sala, os estudantes deverão responder algumas questões direcionadas a esse conceito com o intuito de observarem como que essas substâncias agem em nosso organismo.

Buscamos também trabalhar com a construção de gráfico, que servirá de base para a resposta da questão seguinte, onde o objetivo é mostrar a tendência desse tipo de função. Nessa questão o objetivo é que com a curva obtida, haja uma discussão sobre que tipo de função podemos relacionar com esta curva.

Espera-se dos estudantes o envolvimento tanto na resolução, como também na pesquisa. Procuramos associar o conceito estudado na atividade diagnóstica com a atividade trabalhada nesta fase. Com isso, o professor consegue justificar o trabalho feito desde o primeiro momento, valorizando cada etapa da Modelagem Matemática.

Independente da linha de pesquisa sobre a Modelagem Matemática, tanto em Bassanezi (2011) e em Beltrão (2009), ambos defendem a ideia de que os problemas devem ser reais ou realísticos, ou seja, não devemos fazer uso de situações demasiadamente artificiais. Para tal, fizemos uma proposta com dados reais retirados de diversas fontes especificadas em cada momento.

Ao término da realização desta etapa, o professor apresentará a definição matemática dos logaritmos e aproveitará para explorar as propriedades operatórias. Durante a explanação desse tema, é muito importante fazer uma associação entre as equações exponenciais já resolvidas na atividade anterior, fazendo a ressalva de que, nela as bases das potenciações eram as mesmas, já na atividade seguinte, temos bases diferentes.

Fase I – subfase III: apresentação da definição e propriedades

Nesta fase do processo, um recurso que pode ser utilizado é a aula expositiva. O professor, com suas notas de aulas que podem ser retiradas de algum livro didático, apresentará a definição do logaritmo.

Antes da apresentação das propriedades operatórias, espera-se do professor, o aprofundamento das condições de existência na definição de logaritmos. Para esta etapa, deixaremos como sugestão, a aplicação da atividade proposta por Vidigal (2014) ou a leitura e utilização do livro “Logaritmos” do autor Elon Lages Lima da Sociedade Brasileira de Matemática.

Sobre as atividades de Vidigal (2014), as utilizadas em nossa proposta encontram-se no Apêndice D. A atividade selecionada consiste na introdução do conceito de logaritmo segundo Napier no século XVII, em que faz uma analogia com a ideia de progressão aritmética e a progressão geométrica. Através de dois quadros apresentados, o estudante segue um procedimento previamente lido com o professor para que calcule então alguns logaritmos. A cada exercício resolvido, é apresentada uma definição ou propriedade operatória. Na sequência, após a apresentação da definição e das propriedades operatórias, haverá a discussão sobre as condições de existência.

Fase II: estudantes apresentando outras aplicações

Como optamos por um trabalho teórico, ou seja, não houve a proposta de solicitar aos estudantes uma pesquisa de outras possibilidades de aplicações dos logaritmos em problemas reais, nesta etapa, optamos por apresentar possibilidades de referências que o professor pode sugerir aos estudantes durante o processo de ensino.

Segue uma lista de possíveis fontes para essa proposta. No apêndice F deste trabalho, apresentaremos cada uma das atividades na íntegra.

- Vidigal (2014), em sua dissertação de mestrado, apresenta diversas atividades que poderiam ser utilizadas como fonte de busca;
- Rossi (2010), no trabalho de mestrado, apresenta diversas atividades que poderiam ser utilizadas como fonte de busca de exemplos reais.

Fase III: estudantes elaboram situações expressas por modelos ou aplicações

Em nosso trabalho, por se tratar de uma pesquisa teórica, nesta etapa onde os estudantes deverão elaborar uma situação em que haja uma aplicação ou a criação de um novo modelo, optamos por apresentar um texto sobre smartphones e dele, elaboramos uma sequência de perguntas que poderiam ser propostas pelos estudantes, retomando o exemplo trabalhado na Fase I – subfase II (Apêndice B).

Nesta atividade, buscamos outra situação real em que a Matemática servirá de base para a solução do problema. Durante a elboração, tínhamos em mente que a Modelagem Matemática é “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (Bassanezi, 2002, p. 24).

No problema, a proposta é apresentar uma matéria que apresenta um lançamento de um *smartphone*. Essa proposta foi pensada pelo momento que vivemos em sala de aula, com a utilização de forma desordenada e talvez até exagerada dos smartphones pelos estudantes.

Aproveitamos o lançamento recente de um modelo muito desejado por uma marca cujo o preço é muito acima das outras. A proposta é apresentar essa leitura onde é dado o lançamento do aparelho, preço praticado pelas lojas e o quanto é desejado por um grande número de pessoas.

Propusemos então, uma situação onde uma pessoa queira adquirir o aparelho, porém, não possui o valor integral para a aquisição. Como não foi feita a aplicação em sala, propusemos então, que esta atividade seja realizada ou em uma sala onde possa existir a consulta a internet ou que seja realizada previamente, pois os estudantes deverão pesquisar qual o valor pedido no aparelho na data da realização da atividade.

Diante dos dados obtidos pelos estudantes, o problema será o cálculo do tempo necessário para que os estudantes consigam adquirir este aparelho, sabendo-se que não possuem o valor integral do mesmo e que quisessem aplicar uma quantia de dinheiro em uma aplicação bancária, para depois adquiri-lo.

6 ANÁLISE DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo, faremos uma análise quanto ao objetivo que temos e as respostas que esperamos em cada momento da aplicação das atividades diante do processo.

Assim como em toda proposta de ensino, espera-se que os estudantes acertem todas as questões e assim, haja o entendimento de todos, porém existem pesquisas que apontam algumas consequências desses erros cometidos pelos estudantes e como que uma análise deles pode contribuir para a qualificação do ensino de matemática, como pode ser observado no trabalho de Cury (2010).

Neste trabalho Cury (2010) aponta que existem diversas pesquisas que tratam da análise de erros, no entanto, não estabelecem isso como uma abordagem de pesquisa e ensino.

Antes de tratar sobre a análise de possíveis erros que podem aparecer durante uma atividade, destacamos a concepção da autora para a palavra “erro”:

> proponho que se entenda como erro, na resolução de uma questão, o que não corresponde à produção esperada de um aluno (ou professor) que já deve ter tido contato com os conteúdos apresentados na referida questão ou com estratégias de resolução de problemas em Matemática. É, portanto, um referencial que toma como suposta verdade o conhecimento institucional, ou seja, o que a instituição “Escola” espera ver apresentado por alunos (ou professores) de um determinado nível de ensino, em suas produções escritas em Matemática. (Cury, 2010, p. 2)

Diante disto apresentaremos em nossa proposta possíveis sugestões de respostas que esperamos dos estudantes e as demais que poderão ocorrer, deixaremos como sugestão a leitura de alguns trabalhos que subsidiarão o trabalho do professor para uma intervenção naquele momento.

Segundo Borasi (1996) *apud* Cury (2010), existem três objetivos para o uso dos erros, sendo a remediação, a descoberta ou a pesquisa. Para a prática docente, a remediação se torna mais atrativa, pois a preocupação com as dificuldades do estudante é recorrente no cotidiano do professor. Diante desta preocupação e da nossa proposta de ensino, destacamos o seguinte trecho:

> a (falsa) crença de que a repetição vai fazer com que a falta de compreensão sobre o tópico em questão fará com que o aluno entenda e não mais cometa o mesmo erro. No entanto, se essa idéia fosse correta, não teríamos os erros sistemáticos, pois, detectados e remediados por uma nova explicação, já teriam sido eliminados. que a falta de compreensão sobre o tópico em questão vai fazer com que o aluno entenda e não mais cometa o mesmo erro. (Cury, 2010, p. 8)

Portanto, para não insistirmos no erro do estudante e para não cairmos na “falsa crença” citada por Cury (2010), em nossa proposta, a cada atividade listaremos uma sequência de trabalhos que poderão servir de subsídio para o professor que detectar determinados erros por parte dos estudantes.

Caso você leitor queira observar as atividades na íntegra, sem as sugestões de respostas e intervenções, elas se encontram no final do trabalho em apêndices indicados em cada uma das fases.

Atividade de teste de conhecimentos prévios (Apêndice B)

Na questão 1 do teste, temos como objetivo esclarecer eventuais dúvidas em relação ao cálculo de porcentagens simples, pois pensamos ser um conhecimento essencial no cálculo de juros ou até mesmo de meia-vida que serão propostos nas fases que seguem.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

1. Calcular as seguintes porcentagens:
    a. 10% de 500

       50
    b. 12% de 100

       12
    c. 210% de 12

       25,2
    d. 0,5% de 50

       0,25

Após o exercício 1, destacaremos o trabalho de Feltes (2007), em que um dos objetivos foi analisar os erros cometidos por estudantes do Ensino Fundamental e Médio. No trabalho dessa autora, ela elencou alguns conteúdos dentre os quais destacamos no momento o cálculo de porcentagens. Em uma de suas análises, ela observou que alguns erros cometidos pelos estudantes eram constantes.

Dentre as conclusões obtidas por Feltes (2007), destacamos que um dos erros mais frequentes eram relacionados às operações entre conjuntos e a dificuldade com a aplicação das propriedades de potenciação e radiciação.

Visto que em nosso trabalho apresentaremos uma sequência que poderá ser trabalhada em sala, uma sugestão de intervenção caso ocorram erros indesejáveis, são os trabalhos de Lopes (2013) ou o de Dias (2008). Em ambos, os autores fazem um estudo sobre o ensino de porcentagens utilizando problemas reais que se conectam com o cotidiano do estudante.

A questão 2, servirá de base para a resolução de questões sobre equações exponenciais. Isso ocorrerá pois, para a resolução de equações exponenciais, utilizaremos a decomposição do número em fatores primos, para que utilizemos a definição de que se as bases das potenciações são iguais, basta igualarmos os expoentes.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

2. Decomponha os números a seguir em uma potenciação de um único número e um expoente, seguindo o exemplo:

   Exemplo:

   $8 = 2^3$

   a. 27

      $27 = 3^3$

   b. 343

      $343 = 7^3$

   c. 1000

      $1000 = 10^3$

d. 1024

$1024 = 2^{10}$

Como sugestão de intervenção do professor caso ele sinta necessidade, deixaremos a leitura do trabalho de Oliveira (2014), onde a autora fez uma análise de dez livros didáticos de Matemática do Ensino Médio com relação a maneira que o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas é trabalhado. A autora classifica em “boa motivação” ou “motivação inadequada” as questões apresentadas pelos livros. A autora classifica em “boa motivação” as questões que apresentam uma boa contextualização dos exemplos e as inadequadas apresentam exemplos com informações incorentes, fictícias ou erradas. Além da análise da apresentação destes conteúdos, ela faz também uma proposta de novos exercícios.

Nessa análise dos livros didáticos, concluiu que dentre os dez livros analisados, apenas três deles apresentavam boas motivações no estudo de equações exponenciais.

Na questão 3, temos como objetivo a verificação do conceito envolvido nas equações exponenciais. O estudante deverá transformar a frase escrita na língua portuguesa, em uma expressão matemática cuja linguagem é algébrica.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

3. Para os enunciados a seguir, resolva tentando utilizar o conceito de equações (passe para a linguagem matemática).

   Exemplo: 2 elevado a que número resulta em 8?

   $2^x = 8$

   $2^x = 2^3$

   $x = 3$

   Portanto, 2 elevado a 3 é igual a 8.

   a. 3 elevado a que número resulta em 81?

   $3^x = 81$

   $3^x = 3^4$

   $x = 4$

Portanto, 3 elevado a 4 é igual a 8.

b. 8 elevado a que número resulta em 2?

$8^x = 2$

$(2^3)^x = 2$

$2^{3x} = 2^1$

$3x = 1$

$x = 1/3$

Portanto, 8 elevado a 1/3 é igual a 2.

c. 81 elevado a que número resulta em 3?

$81^x = 3$

$(3^4)^x = 3$

$3^{4x} = 3^1$

$4x = 1$

$x = 1/4$

Portanto, 81 elevado a 1/4 é igual a 3.

Assim como ocorrido na questão 2, deixaremos como sugestão de intervenção do professor a leitura e utilização do trabalho de Oliveira (2014) no que diz respeito ao conteúdo de equações exponenciais.

Na questão 4, tanto no exemplo como no item “a”, buscamos a indagação dos estudantes a respeito do motivo de não haver uma resposta de imediato, assim como houve no exercício anterior. Essa indagação será explorada na questão seguinte, onde será proposto ao estudante que disserte sobre as hipóteses que ele tem sobre o porquê de não chegar a uma conclusão.

Nos itens “b” e “c” desta questão, trabalhamos com as potenciações de base 10, para que já seja dado, intuitivamente, uma das propriedades dos logaritmos.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

4. Para os enunciados a seguir, resolva tentando utilizar o conceito de equações (passe para a linguagem matemática), se possível.

   Exemplo: 10 elevado a que número resulta em 2?

$10^x = 2$

$x = ?$

Com os conhecimentos que temos até o momento, não foi possível chegar em uma resposta.

a. 10 elevado a que número resulta em 3?

$10^x = 3$

$x = ?$

Com os conhecimentos que temos até o momento, não foi possível chegar em uma resposta.

b. 10 elevado a que número resulta em 81?

$10^x = 81$

$10^x = 3^4$

$x = ?$

Com os conhecimentos que temos até o momento, não foi possível chegar em uma resposta.

c. 10 elevado a que número resulta em 100?

$10^x = 100$

$10^x = 10^2$

$x = 2$

Portanto, 10 elevado a 2 é igual a 100.

Nesta questão proposta, devemos levar em consideração uma possível resposta que pode ser dada através do raciocínio por aproximação. O estudante pode pensar nas aproximações conhecidas como no item “a” da questão 4: sabe-se que 10^1 é 10, portanto, para obter o resultado 3 é necessário escolhermos um expoente menor que 1. Com isso, poderá pensar em 10^0, mas chegará ao resultado 1 (um). Portanto, saberá que o expoente é um número entre zero e um. O estudante pode não chegar a uma conclusão exata, mas pode tentar aproximações com números decimais com o auxílio de uma calculadora ou concluir que o resultado será um número decimal maior que zero e menor que um.

No último exercício, assim como mencionado anteriormente, temos o objetivo de verificar como os estudantes dissertarão sobre a dificuldade encontrada no exercício 4. Diante dessa dificuldade, iniciaremos a discussão sobre o conceito de logaritmos, quando trabalharemos com as equações exponenciais de bases diferentes.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

5. Com relação ao exercício anterior, explique brevemente, com suas palavras:
    a. o problema que nos deparamos ao tentar resolver o exercício 4 comparando com o exercício 3?

       Esta questão não possui uma resposta certa ou errada, porém, esperamos que os estudantes percebam que, a dificuldade encontrada nos itens “a” e “b” da questão 4, são as bases das potenciações. No item “b”, os estudantes ainda têm condições de transformar o número 81 em uma potenciação de base 3, porém, na igualdade aparece a base 10, o que não podemos utilizar a definição de igualar os expoentes.
    b. Você percebe alguma relação entre eles?

       A relação que espera-se que seja observada, é a utilização do conceito do exercício 3, pois nele utiliza-se a decomposição em fatores primos das potenciações.

Nas últimas questões propostas, nosso principal objetivo é analisar o quão preparado o estudante está em relação ao cálculo de equações exponenciais. Para isso salientamos que será imprescindível que os conhecimentos e aplicações de propriedades operatórias das potenciações e radiciações estejam bem fixados nos estudantes.

Novamente fazendo a leitura do trabalho de Feltes (2007), destacamos a análise da autora realizada nos erros cometidos pelos estudantes na aplicação das propriedades da potenciação e radiciação. Em uma de suas conclusões, a autora destaca que:

> os erros mais frequentes foram os das classes C – que envolve os erros em operações com conjuntos numéricos – e E, em que os

> estudantes desconsideram o expoente da potência ou não entendem a propriedade que envolve expoente negativo. (Feltes, 2007, p. 73)

Tendo em vista que segundo o trabalho de Feltes (2007) os erros na aplicação de propriedades da potenciação e radiciação podem ocorrer, o professor deverá estar preparado para esse tipo de situação.

Caso ele se depare com essa situação, deixamos como sugestão para o professor que apresente novamente as propriedades pertinentes e aplique-as no exercício proposto. Deixaremos como sugestão nesta etapa os trabalhos de Feltes (2007) e Oliveira (2014). Vale ressaltar que nas intervenções necessárias, o professor deverá ralizar a abordagem da maneira distinta da tradicional e não cometer a prática da repetição, retomando assim a ideia de Cury (2010), onde a autora diz que se a repetição resolvesse o problema do erro, eles não seriam comuns e recorrentes.

Fase I – Subfase I (Apêndice C)

Após a discussão da etapa denominada “Teste de conhecimentos prévios” e feita as devidas ponderações se necessário, o professor poderá dar início ao processo de Modelagem Matemática segundo a proposta de Beltrão (2009). Nesta etapa do processo, recomenda-se que o professor dê início a aula com uma breve introdução e faça a leitura junto com os estudantes, explicando para todos que o objetivo dessa leitura é fazer uma introdução dos logaritmos. O texto por si só, tratará sobre a origem e também será apresentada algumas aplicações que serão trabalhadas na etapa seguinte.

Fase I – Subfase II (Apêndice D)

Terminada a leitura do texto que trata da origem e de algumas aplicações dos logaritmos, temos a subfase II onde o objetivo é aprofundarmos uma aplicação do modelo matemático a ser trabalhado. Em nossa proposta buscamos uma aplicação do conceito de meia-vida no esporte. Abordamos esse tema pois, pensamos que um trabalho interdisciplinar que faça uma ligação dos conceitos discutidos entre diversas disciplinas torna essa aprendizagem mais próxima da realidade dos estudantes.

Na atividade, a proposta é fazer a leitura e discussão em conjunto com o grupo todo de estudantes. Após a leitura e discussão, a resolução da atividade se dá inicialmente com uma questão sobre o conceito de meia-vida. Nosso objetivo com ela é mostrar aos estudantes que um conceito aprendido na disciplina de Física ou Química pode ser conectado com a Matemática. Caso os estudantes não se recordem de tal conceito, apresentaremos a seguir uma possível resposta que o professor poderá discutir com os estudantes. Com o conceito em mente, esperamos dos estudantes uma reflexão quanto a relação existente entre estes dois temas: meia-vida e os exames anti-doping.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

1-) Escreva o que você conhece sobre *meia-vida* e qual a relação existente entre meia-vida e a questão do *doping* apontada pelos textos.

Nessa questão esperamos que a relação que os estudantes citem nesta questão é a relação existente entre duas grandezas: o tempo (meia-vida) e a atividade de determinada substância no corpo do atleta.

Após realizada a discussão sobre a analogia existente entre os dois conceitos, enunciamos que o atleta ingeriu 100 mg da substância dopante e apresentaríamos o tempo de meia-vida e perguntaríamos se, ao fim dos 30 dias, ainda haverá a presença desta substância no corpo do atleta para a realização do teste.

Com relação aos erros que possivelmente podem ocorrer, deixaremos como sugestão para o professor a leitura do trabalho de Brucki (2011). Nesta pesquisa, o professor que perceber um número expressivo de erros, pode utilizar as atividades apresentadas na página 70 deste presente trabalho.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

2-) De acordo com o primeiro texto, sabe-se que o atleta fez uso da substância *drostanolona*, comprovado por exames realizados posteriormente. Dado que essa substância possui um tempo de meia-vida de aproximadamente 48 horas, imagine a seguinte situação:

O atleta ingeriu 100 mg dessa substância no início do dia 10 de janeiro e que o teste antidoping tenha sido realizado apenas um mês depois, ou seja, passados 30 dias. Podemos afirmar que neste teste não havia mais a presença desta substância em seu organismo?

Considere que após a ingestão no dia 10 de janeiro, não houve mais nenhuma outra aplicação dessa substância e que o teste tenha sido realizado na manhã do fim dos 30 dias.

Nesta questão, esperamos que, dentre os diversos raciocínios que possam existir, que os estudantes cheguem à conclusão de que, embora o valor seja relativamente baixo, ainda exista a presença dessa substância.

Para o professor que achar necessário reforçar este conceito, deixamos também a sugestão da leitura de Brucki (2011) a mesma atividade citada na questão anteior. Neste trabalho, a autora elabora duas atividades que tratam da função exponencial com a problemática da utilização de usinas nucleares nos países, abordando o conceito de função exponencial com uma analogia com as progressões geométricas e fazendo uso de diversas representações para a função com enfoque na abordagem gráfica.

A questão 3, foi pensada utilizando-se a ideia do exercício anterior, porém, na execução desta, induziremos o pensamento do grupo de estudantes para a utilização de um quadro para a formalização do raciocínio, pois no quadro o estudante conseguirá observar o que ocorre com cada uma das grandezas com o passar do tempo.

No segundo item desta questão, propusemos a elaboração de um gráfico, com o intuito favorecer a observação e o levantamento de hipóteses com a visualização gráfica, o que a pesquisa de Brucki (2011) comprova.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

3-) Complete o quadro a seguir:

Quadro 1 – Fase I (subfase II) – Resolução do exercício 3

Número de meias-vidas	**Tempo**	**Quantidade de substância em mg**
0	0 hora	100
1	48 horas	*50*
2	96 horas	*25*
3	*144 horas*	*12,5*
4	*192 horas*	*6,25*
5	*240 horas*	*3,125*
6	*288 horas*	*1,5625*

Faça um gráfico que relacione a quantidade dessa substância no corpo com o tempo. Como sugestão deixaremos a utilização do Microsoft Excel.

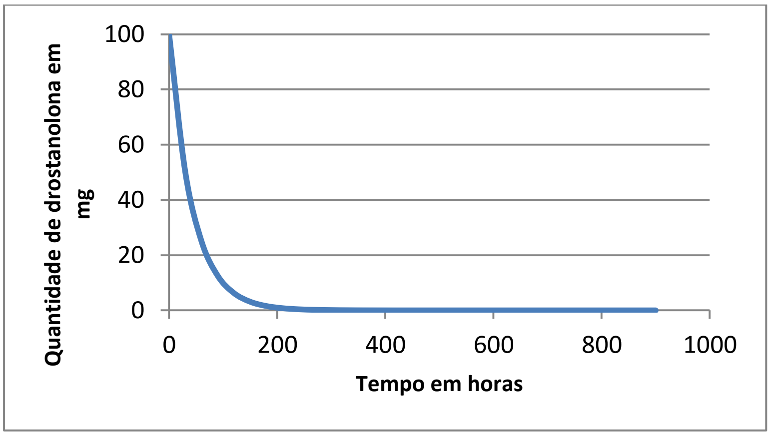


Figura 5 – Quantidade de drostanolona pelo tempo.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta questão, um trabalho que poderá subsidiar o professor caso sinta necessidade, de acordo com os erros cometidos, deixaremos como sugestão a leitura do trabalho de Ferreira e Bisognin (2007). Neste artigo, destacamos o trabalho realizado por estes autores na “1ª atividade”. Nela os autores trabalham o conceito de funções exponencias baseando-se também no gráfico.

A próxima questão tem como objetivo a elaboração de uma equação genérica, que sirva de base para os estudantes em qualquer situação que trate do mesmo assunto.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

4-) A partir do quadro, vamos reescrevê-lo de maneira que em todas as lacunas da quantidade de substância apareçam o valor inicial e o número de meias-vidas.

Quadro 2 – Fase I (subfase II) – Resolução do exercício 4

Número de meias-vidas	**Tempo**	**Quantidade de substância em mg**
0	0 hora	$100 \cdot 0{,}5^{0}$
1	48 horas	$100 \cdot 0{,}5^{1}$
2	96 horas	$100 \cdot 0{,}5^{2}$
3	*144 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{3}$
4	*192 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{4}$
5	*240 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{5}$
6	*288 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{6}$

Obs.: Vale ressaltar nesta questão que o professor, durante a execução, deve deixar explícita a ideia utilizada em cada lacuna, principalmente do significado existente em cada parte: o 100 representa a quantidade inicial, o 0,5 da base representa a metade e o expoente é representado pelo número de meias-vidas.

Vale ressaltar que esta questão deve ser trabalhada de forma cautelosa por parte do professor. Não podemos considerar que logo de início os estudantes consigam fazer essa relação das multiplicações e de potênciações. Portanto, deixaremos como uma sugestão de leitura para o professor, antes de iniciar o trabalho com esta questão, o trabalho de Oliveira (2014). Nos capítulos anteriores, fizemos um breve resumo sobre esta pesquisa, mas neste momento, destacaremos a página 20 deste trabalho, quando a autora caracteriza um livro didático que apresenta uma abordagem semelhante a esta como uma “boa motivação para o uso da função exponencial”.

A questão 5, para finalizarmos a ideia do conceito de logaritmos, propusemos uma situação em que o estudante se depará com um obstáculo semelhante ao que encontrou no exercício do teste de conhecimentos prévios.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

5-) Com esse novo quadro é possível fazer previsões da quantidade de substância ou do tempo decorrido ou o número de meias-vidas que desejamos encontrar. Você conseguiria elaborar um quadro para determinarmos após quantas meias-vidas haverá a quantia de 0,01220703 mg?

Quadro 3 – Fase I (subfase II) – Resolução do exercício 5

Número de meias-vidas	**Tempo**	**Quantidade de substância em mg**
0	0 hora	100
1	48 horas	*50*
2	96 horas	*25*
3	*144 horas*	*12,5*
4	*192 horas*	*6,25*
5	*240 horas*	*3,125*
6	*288 horas*	*1,5625*
7	*336 horas*	*0,7812*
8	*384 horas*	*0,3906*
9	*432 horas*	*0,1953*
10	*480 horas*	*0,0976*
11	*528 horas*	*0,0488*
12	*576 horas*	*0,0244*
13	*624 horas*	*0,0122*

Fase I – Subfase III (apêndice E)

Neste momento, os estudantes já tem conhecimento sobre os logaritmos, porém ainda não conhecem as condições de existência e as propriedades operatórias. Para isso, propusemos a aplicação das atividades extraídas de Vidigal (2014).

Essas atividades, dentre diversas outras possibilidades, foram selecionadas pois a resolução será realizada de forma experimental para os estudantes. Além dos resultados que são induzidos pelas perguntas feitas, as conclusões retiradas são as condições de existência e as propriedades operatórias.

Antes de iniciar a atividade, será apresentado um texto retratando novamente a história dos logaritmos e como foi criado o conceito através de conhecimentos das progressões aritmética e geométrica.

O estudante deverá fazer uma analogia com o exercício já resolvido no teste de conhecimentos prévios, onde era induzido a resolver equações exponenciais com a decomposição do número em potenciações de mesma base.

Segue uma das atividades propostas no trabalho:

Quadro 4 – Fase I (subfase III) – Resolução do exercício 1

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Para cada termo da progressão geométrica, o termo correspondente na progressão aritmética será o seu logaritmo na base 2 (pois a razão da progressão geométrica é 2). Ou seja, o logaritmo na base 2 de 512 é 9.

Com base nessa associação qual é:

a) o logaritmo de 2048 na base 2?

Para chegar a resposta o estudante deverá verificar que número se encontra acima do 2048 no quadro apresentado, chegando em 11 como resposta.

b) o logaritmo de 1/2 na base 2?

Nesta pergunta o estudante não conseguirá fazer a analogia de imediato, pois quando solicitado o valor 1/2, ele deverá seguir para a esquerda do quadro, não para a direita, retornando dois termos chegando em –1 na PA e 1/2 na PG.

Na sequência das atividades realizadas, será dada a formalização do conceito de logaritmo, onde a linguagem matemática daquilo que foi calculado será apresentada.

Após a formalização, há uma proposta de alguns exercícios que o estudante deverá resolver utilizando a definição.

Ainda com o auxílio do quadro dado inicialmente, o professor vai introduzir as propriedades operatórias dos logaritmos. A ideia será a transformação de produtos em somas e de maneira análoga, transformar divisões em subtrações. Segue proposta:

Faça a multiplicação 2 × 512 e procure o resultado no quadro. Agora responda qual a relação existente entre os valores dos logaritmos na base 2 dos números multiplicados e o logaritmo também na base 2 do número obtido na multiplicação?

Quando o estudante resolve a multiplicação obtém como produto o número 1024. Feito isso, deverá calcular o logaritmo de 2, o logaritmo de 512 e por fim, o logaritmo de 1024 e perceber que a relação existente é que o logaritmo de 1024 é igual a soma dos logaritmos de 2 e 512.

De maneira análoga deverá proceder para a divisão.

Após as propriedades da soma e divisão elucidadas, será apresentada a propriedade da potenciação. Para isso, segue as atividades que deverão ser realizadas:

Encontre o resultado de 8^2 e procure no quadro. Agora responda qual a relação entre o logaritmo de 8 e o logaritmo do resultado obtido.

Quando o estudante resolve a potenciação obtém como produto o número 64. Feito isso, deverá calcular o logaritmo de 8 e o logaritmo de 64 para perceber que a relação existente é que o logaritmo de 64 é igual a duas vezes o logaritmo de 8.

Por fim, será deduzida as condições de existência dos logaritmos. Para isso, será explorado alguns cálculos, por exemplo: log(–2), log(–10), log(–32,1), log(–

123), etc. Essas atividades foram pensadas para que o estudante perceba que há um problema quando o logaritmo que deseja calcular é negativo, chegando a uma primeira condição de existência.

Na sequência, será solicitado que calcule: $\log_1 3$, $\log_{-2} 8$, $\log_0 7$, etc. Nessa etapa, o objetivo é mostrar que agora o problema se encontra na base do logaritmo, chegando a conclusão de ela deve ser maior que zero e diferente de 1.

Deixaremos como sugestão o uso de calculadoras científicas nesta etapa. Para isso, será necessário que o professor ensine o manuseio dela para dar continuidade.

Fase II (apêndice F)

Na Fase II, assim como em Beltrão (2009), neste momento os estudantes apresentarão outros modelos ou aplicações dos logaritmos. Sugerimos que haja uma pesquisa inicial por conta dos estudantes, em diversas fontes. Após essa primeira pesquisa, o professor orientará os grupos de estudantes a pesquisarem em fontes confiáveis e assim indicar alguns trabalhos realizados por outros pesquisadores.

Deixaremos como sugestão dois trabalhos: o primeiro é de um autor já mencionado, Vidigal (2014), onde há um exemplo da aplicação dos logaritmos na propagação do som, no caso, na escala decibel. A outra pesquisa que deixaremos como sugestão é Rossi (2010), onde serão apresentadas aplicações de escalas logarítmicas na mensuração da intensidade dos terremotos, no cálculo de pH para a mensuração de acidez de substâncias e em modelos matemáticos dados em funções logarítmicas.

Para essa proposta utilizaremos uma das atividades de Rossi (2010), intitulada como “logaritmos e funções”.

Nesta atividade há um texto base para o estudante onde será apresentado uma função que relaciona a altura de uma árvore em função do tempo. Com isso, é dado um modelo matemático que servirá de base para a resolução de todas as questões que virão na sequência. O modelo dado é: $h(t) = 1,5 + \log_3(t + 1)$, onde h(t) representa a altura da árvore em metros e t o tempo transcorrido em anos.

Na primeira questão é perguntado qual é a altura da árvore no momento que ela foi plantada. Para isso, o estudante deve ter em mente que no momento do plantio não se passou nenhum ano, portanto, t deverá ser zero. Segue modelo de resolução:

$$h(0) = 1,5 + \log_3(0 + 1)$$

$$h(0) = 1,5 + \log_3 1$$

$$h(0) = 1,5 + 0$$

$$h(0) = 1,5\ m$$

No item b desta mesma questão, é questionado qual a altura da árvore após 26 anos. Para a solução do problema, o estudante deverá substituir o t por 26. Segue o modelo de resolução:

$$h(26) = 1,5 + \log_3(26 + 1)$$

$$h(26) = 1,5 + \log_3(27)$$

$$h(26) = 1,5 + 3$$

$$h(26) = 4,5\ m$$

Por fim, no item c, pede-se que o estudante calcule o tempo transcorrido no momento em que a árvore atingiu a altura de 3,5 m. Agora será necessário que o estudante tenha claro que deverá substituir o h(t) por 3,5. Segue modelo de resolução:

$$3,5 = 1,5 + \log_3(t + 1)$$

$$2 = \log_3(t + 1)$$

$$3^2 = t + 1$$

t = 8 anos

Com isso, encerra-se a fase II, onde o objetivo principal é a apresentação por parte dos estudantes de novas aplicações do modelo estudado ou até mesmo a elaboração. Em nossa proposta, sugerimos que o estudantes faça a apresentação de novas aplicações de modelos e para isso o professor pode subsidiar a busca dando algumas sugestões de fontes de pesquisa.

Fase III (apêndice G)

A Fase III é a finalização do processo e pode-se considerar que seria uma avaliação do professor em relação a quanto os estudantes compreenderam a forma que podemos obter determinado conhecimento matemático, utilizando-se da Modelagem Matemática.

Essa avaliação não é a avaliação formal instituída nos diferentes níveis de ensino, é uma avaliação do estudante produzindo uma aplicação ou um modelo matemático. Em nossa proposta, apresentaremos uma aplicação do conceito de logaritmos que poderia ser elaborada por estudantes de diferentes níveis.

Na Fase III do processo de Modelagem Matemática por meio de fases proposta por Beltrão (2009) ocorre o processo de Modelagem Matemática proposto por Bassanezi (2002), pois neste momento, para a elaboração de um novo modelo ou de uma nova aplicação de um modelo matemático, o estudante deve seguir as etapas de Bassanezi (2002), sendo basicamente o processo de investigação empírica e a experimentação, chegando ao fim na aplucação e validação do processo.

Em nossa proposta, deixamos como exemplo uma atividade em que o estudante apresentaria uma aplicação no cálculo de juros compostos, utilizando-se dos logaritmos para resolver um problema real. A atividade se encontra na íntegra no apêndice G. Neste capítulo faremos a análise do que pode se esperar com essa atividade.

Na questão 1, seria trabalhado a investigação do estudante quanto a realidade do problema, espera-se que haja uma busca de preços atualizados de um smartphone recém lançado.

Na próxima questão, aproveitaria-se a pesquisa de preço realizada e, assim como proposto na Fase I – subfase II, seria suposta uma situação realística, ou seja, muito próxima do real. Segue a questão com o que espera-se como resposta:

2-) Aproveitando a pesquisa realizada na questão anterior, se coloque na posição do estudante curioso.

Sabe-se que grande parte da população mundial tem interesse neste mesmo smartphone. Imagine que você tenha uma certa quantia em dinheiro, que ainda não é o suficiente para comprar o aparelho na loja mais barata. Para conseguir adquirir o aparelho, você pretende fazer uma aplicação em um banco e pretende descobrir qual o tempo mínimo que você precisaria deixar seu dinheiro aplicado para que consiga comprar o aparelho pagando o menor preço.

Para isso, sabe-se que uma das aplicações mais seguras, que apresentam um rendimento mensal é a poupança.

Considere que, neste tipo de aplicação, a taxa de juros é de aproximadamente 0,5% ao mês.

Em quanto tempo, uma aplicação de R$ 1.000,00, à taxa de 0,5% ao mês, vai gerar a quantia suficiente para a aquisição do smartphone? Considere ainda que não serão realizados outros depósitos mensais, ou seja, novas aplicações.

Para a solução deste problema, pense nas seguintes situações:

a) Após 1 mês de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
b) Após 2 meses de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
c) Após 3 meses de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
d) Após quanto tempo ele terá condições de comprar o aparelho?

Obs.: faça um quadro que auxilie na visualização das operações a serem utilizadas.

Quadro 5 – Fase III – Resolução do exercício 2

Tempo	***Quantia acumulada (em R$)***
Início	*1000*
Mês 1	*1000 · 1,005 = 1005,00*
Mês 2	*1005 · 1,005 = 1010,03*
Mês 3	*1010,03 · 1,005 = 1015,08*

Assim como foi apontado na questão 4 (resolução no quadro 2), da Fase I (subfase II), a montagem deste quadro talvez não seja imediata. Portanto, novamente, deixaremos como sugestão, a leitura de Oliveira (2014).

A questão 3 será uma discussão sobre o que ocorre com a quantia investida. O estudante deverá dissertar sobre o tempo que levará para conseguir acumular o montante necessário para a compra. Neste caso, a resposta que esperamos não é um valor exato, mas que ele tente chegar intuitivamente à resposta.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

3-) Após a elaboração do quadro com os valores acumulados até o terceiro mês de aplicação, podemos dizer que em breve chegaríamos no valor necessário? Explique.

Não, pois a cada mês, o aumento da quantia é muito baixo.

Na sequência, será induzida a elaboração do quadro de acordo com a atividade realizada na Fase I – subfase II. Neste momento, espera-se que os estudantes já consigam fazer uma previsão de um modelo matemático que levará à equação. Vale ressaltar que como o objetivo é chegar na aplicação do logaritmo, a atividade continuará, caso o professor opte por trabalhar apenas com juros compostos, até esta questão é o suficiente.

4-) A partir do quadro, vamos reescrevê-lo de maneira que em todas as lacunas da quantia acumulada apareçam o valor inicial e a taxa de juros.

Quadro 6 – Fase III – Resolução do exercício 4

Tempo	***Quantia acumulada (em R$)***
Início	*1000*
Mês 1	$1000 \cdot 1{,}005 = 1005{,}00$
Mês 2	$1000 \cdot 1{,}005^2 = 1010{,}03$
Mês 3	$1000 \cdot 1{,}005^3 = 1015{,}08$
…	…

Por fim, a resolução do problema proposto inicialmente se dá pela aplicação do logaritmo. Segue a resolução esperada:

5-) Com esse novo quadro é possível fazer previsões do valor ou do mês que desejamos encontrar. Encontre uma função que permita descrever a situação proposta em qualquer momento t.

Quadro 7 – Fase III – Resolução do exercício 5

Tempo	***Quantia acumulada (em R$)***
Início	*1000*
Mês 1	$1000 \cdot 1{,}005 = 1005{,}00$
Mês 2	$1000 \cdot 1{,}005^2 = 1010{,}03$
Mês 3	$1000 \cdot 1{,}005^3 = 1015{,}08$
…	…
Mês n	$1000 \cdot 1{,}005^n = ?$

Como desejamos saber em que mês será acumulada a quantia de aproximadamente R$4500,00, temos que:

$$1000 \cdot 1{,}005^n = 4500$$
$$1{,}005^n = 4{,}5$$
$$\log_{1{,}005} 4{,}5 = n$$
$$n \cong 301 \text{ meses}$$

Em toda nossa sequência, apresentamos por diversas vezes, atividades que promovem a construção dos modelos matemáticos envolvidos em conjunto (professor e estudante). Porém, pensamos que esta escolha ficará a cargo do professor que se sentir seguro em seguir esta proposta. Em boa parte das atividades, como ocorre na questão 5, os quadros de valores são ilustrativos e podem favorecer a compreensão do conceito envolvido, portanto, uma sugestão que deixaremos para o leitor é a utilização de um software, sendo o Microsoft Excel, pois nele, a construção dos quadros de valores que seguem um determinado padrão, podem ser extendidos indefinidamente.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

As frustrações em relação à situação do ensino de matemática são diversas tanto no âmbito do ensino básico como do ensino superior. Em nossa prática docente é muito comum ficarmos com a sensação de que poderíamos melhorar algum aspecto de nossas aulas e essa sensação foi o principal motivador para que a pesquisa fosse iniciada.

Após o início de nossa pesquisa podemos dizer que mudanças foram as mais diversas. Tanto na escolha de nossos referenciais como na proposta de nossas atividades, o que demonstrou um certo grau de amadurecimento.

Como tínhamos que iniciar a partir de um ponto, este foi com a escolha da Modelagem Matemática aplicada ao ensino para a fundamentação de nosso trabalho. Ao pesquisar sobre o tema, vimos uma grande diversidade de trabalhos que traziam a abordagem da Modelagem Matemática com as ideias de Bassanezi (2002), o que nos levou a aprofundar cada vez mais nos ideias deste autor.

Neste ponto da pesquisa percebemos o quanto os obstáculos citados por Bassanezi (2002) eram recorrentes na aplicação da Modelagem Matemática no ensino. Há poucas semanas da qualificação, durante a elaboração das atividades e da sequência que adotaríamos, percebemos que o obstáculo instrucional seria a principal dificuldade. Diante disso, a indicação da leitura do trabalho de Beltrão (2009) fez com que a preocupação principal fosse a elaboração das atividades.

A proposta da Modelagem Matemática por meio de fases auxiliou na elaboração de nossas atividades pois, os obstáculos para os professores e os estudantes seriam contornados, visto que, o estranhamento não seria notado. Quanto ao obstáculo instrucional, não tivemos a oportunidade de verificar se haveria ou não, mas temos exemplos de pesquisas como as de Rossi (2010) e Oliveira (2014) que indicam que o tempo e cumprimento do currículo não ocorreu com a utilização desta mesma ideia.

Um obstáculo que não conseguimos superar foi a questão do tempo para a aplicação desta proposta. Em nosso cronograma percebemos que os prazos eram curtos e não conseguiríamos fazer uma análise completa de todos os dados que coletaríamos, por isso optamos pela pesquisa teórica. Mas temos completa ciência de que uma futura aplicação ocorrerá.

A nossa preocupação principal se tornou então a elaboração de atividades que pudessem suprir todas as necessidades de alguém que resolvesse aplicar esta sequência. Novamente na elaboração de nossa proposta nos deparamos com diversos trabalhos com o intuito de ensinar logaritmos aos estudantes relacionando-se com problemas reais, porém não seguem totalmente a linha da Modelagem Matemática. Fizemos então uma curadoria nesses trabalhos, selecionando aqueles em que as atividades propostas poderiam ser adaptadas para as fases de Beltrão (2009), obtendo assim, uma diversidade maior para o professor que optar por seguir nossa proposta.

Um aspecto que pensamos que seja um diferencial de nossa proposta são as intervenções que deixamos ao fim de cada análise de atividade proposta. Diversos trabalhos apontam os acertos e erros cometidos mas poucos apresentam sugestão de leitura ou interveção do professor para aquele momento.

Esperamos que diante de toda nossa pesquisa, o professor que se deparar com nosso trabalho consiga fazer a ruptura do pensamento tradicional e se adaptar ao movimento que está acontecendo no ensino das escolas. Espera-se também que com essa efetivação do trabalho no ensino de logaritmos, possamos responder ao questionamento comum dos estudantes na introdução de diversos conteúdos matemáticos: “onde vou usar isso?”. Lembrando que em Beltrão (2009), a autora aponta que essa questão deve ser respondida especificamente na Fase I – subfase II.

Nossas perspectivas para o futuro são diversas e dentre elas, podemos destacar de início a aplicação desta proposta para futuros professores, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, para que possamos aprimorar o material aqui elaborado, pois não encontramos pesquisas que façam essa abordagem. Vale ressaltar que pensamos neste grupo de estudantes devido à maturidade e conhecimento para que a reflexão da abordagem do real/cotidiano se torne um ponto a favor do nosso processo de ensino-aprendizagem.

A escolha da Modelagem Matemática como nosso aporte teórico para a elaboração do material contribuiu para minha prática docente. Apresento novamente a definição de Modelagem Matemática como sendo “a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los” (Bassanezi, 2002, p. 16), pois esta frase tem me acompanhado a cada aula planejada. Concomitantemente a essa frase, a questão a ser respondida “onde é que vou usar isto?” (Beltrão, 2009, p. 119) tem encaminhado a elaboração de cada planejamento.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. In: Reunião Anual da Anped, 24., 2001, Caxambu. Anais. Rio de Janeiro.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BELTRÃO, Maria Eli Puga. **Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações - Teoria e Prática** . 2009. 320f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia. Santa Catarina. Alexandria, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009. Disponível em: <http://alexandria.ppgect.ufsc.br/files/2012/03/mariasalett.pdf>. Acesso em: 19 maio 2014.

BRUCKI, Cristina Maria. **O uso de Modelagem no ensino de função exponencial**. 2011. 140f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática da 5ª série**. 1987. 188f. Dissertação (Metrado em Educação Matemática), Universidade Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro.

CIPRIANO, Tatiana Soares. **Modelagem Matemática como Metodologia no Ensino Regular: Estratégias e Possibilidades**. 2013. 56f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) — Departamento de matemática, instituto de ciências exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica.

CURY, Helena Noronha. **Análise de Erros**. X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador. p. 1-11. Jul. 2010.

DIAS, Rozangela Vieira. **O uso de porcentagem no cotidiano dos alunos**. 2008. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) — Faculdade de Física, PUCRS, Porto Alegre.

FELTES, Rejane Zeferino. **Análise de erros em potenciação e radiciação: um estudo com alunos de Ensino Fundamental e Médio**. 2007. 136f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, PUCRS, Porto Alegre.

FERREIRA, Ronize Lampert; BISOGNIN, Eleni. **O Estudo de Logaritmo por meio de uma sequência de ensino: a engenharia didática como apoio metodológico**. Revista Experiências em Ensino de Ciências. Cuiabá, v. 2, n. 1, p. 64-78, mar. 2007. Disponível em: <http://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID34/pdf/2007_2_1_34.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2015.

FIORENTINI, Dario. LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática – percursos teóricos e metodológicos**. 2 ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

LOPES, Keller Tadeu. **Uma investigação sobre o ensino de porcentagem no 6º ano do Ensino Fundamental**. 2013. 164f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

MERICHELLI, Marco Aurélio Jarreta. ALLEVATO, Norma Sueli Gomes. **O Ensino de Logaritmos em uma turma de Ensino Médio**. X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador. p. 1-10. Jul. 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T11_CC1108.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2015.

NIWA, Seiji; BARONI, Mariana Pelissari Monteiro Aguiar; TIAGO, Graziela Marchi. **Uma reflexão quanto Modelagem Matemática no Brasil à luz dos trabalhos de**

Rodney Carlos Bassanezi. In: 5º Congresso Científico da Semana Tecnológica – IFSP. 2014. Bragança Paulista. Anais. São Paulo.

OLIVEIRA, Andreia Julio de. **O Ensino de Logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**. 2005. 123f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

OLIVEIRA, Michelle Noberta Araújo de. **Análise da Contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos Livros Didáticos do Ensino Médio**. 2014. 118f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande.

PEREIRA, Eloi da Silva. **A importância do logaritmo para a sociedade**. X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador. p. 1-4. jul. 2010. Disponível em: <https:// http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/EX/T16_EX2025.pdf>. Acesso em: 14 jul. 2015.

ROSSI, Patrícia Rodrigues da Silva. **Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática**. 2010. 219f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

SANTOS, Ricardo Ferreira dos. **O uso da Modelagem para o Ensino da Função Seno no Ensino Médio**. 2014. 129f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SEVERINO, Joaquim Antônio. **Metodologia do Trabalho Científico**. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, Maria Regina Gomes da. **Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática**. Bolema, Rio Claro, UNESP, ano 11, n. 12, p. 13-27. 1996. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/bolema/sites/default/files/1996_11_12_11.pdf>. Acesso em: 28 dez. 2015.

SILVA, Rodrigo Sychocki da; BASSO, Marcos Vinicius de Azevedo. **Da interpretação à conceituação: uma sequência didática baseada no uso de problemas envolvendo funções exponenciais e logarítmicas**. Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 163-186, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p163/23459. Acesso em: 14 jan. 2016.

SPINA, Catharina de Oliveira Corcoll. **Modelagem Matemática no processo de ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio**. 2002. 177f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

VIDIGAL, Carlos Eduardo Ladeira. **(Re)Significando o conceito de logaritmo**. 2014. 133f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

APÊNDICE A: PRODUTO FINAL

Seiji Niwa
Orientadora: Profa. Dra. Graizela Marchi Tiago

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE LOGARITMOS UTILIZANDO OS CONCEITOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

São Paulo | 2016

Introdução

Este é o material obtido da pesquisa de dissertação do curso de Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, *campus* São Paulo. Neste material, apresentaremos nossa proposta de uma sequência didática que poderá ser utilizada para o ensino de logaritmos em cursos superiores de Licenciatura em Matemática.

Em nossa pesquisa utilizamos os conceitos de Modelagem Matemática apresentados por Bassanezi (2002) e os conceitos de Beltrão (2009) em relação a aplicação no ensino de logaritmos por meio da Modelagem Matemática por fases.

A procura por diferentes metodologias de ensino de Matemática que se diferenciem do ensino tradicional é algo comum e recorrente na prática docente. A concepção que temos sobre a metodologia de ensino tradicional é a mesma adotada por Baldino *apud* Silva (1996) onde segundo ela a denominação “metodologia tradicional” foi atribuída a essa autora desde o ano de 1989 nas discussões no Seminário de Matemática e Educação Matemática (SMEM) na UNESP, *campus* Rio Claro. Nessa metodologia existe a crença de que o aluno aprende durante a observação do professor que deve ensinar mostrando. Em relação à metodologia adotada pelo professor deve considerar que o mais abstrato é mais fácil para o aluno organizar as ideias.

Existem pesquisas sobre o ensino de logaritmos e pesquisas sobre a Modelagem Matemática aplicada ao ensino porém, poucas que utilizam estes dois temas concomitantemente. Diante disso, buscamos neste trabalho a junção destas ideiais e além disso em nosso material apresentaremos aos professores possíveis sugestões de interveção que poderá ser aplicada caso ocorra erros prejudiciais para a sequência didática.

Modelagem Matemática

Segundo Biembengut (2009), a discussão sobre Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino ocorre por volta dos anos de 1958 e 1965, nos Estados Unidos. No ano de 1968 em um simpósio na Suíça houve uma discussão sobre a maneira que era feito o ensino de matemática e concluiu-se que os problemas propostos não poderiam ser padronizados e comuns, mas sim, problemas que estimulassem o raciocínio e a criação de modelos matemáticos. Ainda segundo a autora, no Brasil, Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Carlos Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazetta e Eduardo Sebastini, são pesquisadores que iniciaram os estudos sobre ensinar matemática por meio da modelagem.

Em uma de suas obras, Bassanezi (2002) discorre de forma precisa e sucinta sobre seu objetivo: fazer com que estudantes de todos os níveis, docentes e as pessoas em geral, aprendam a gostar de Matemática. Para isso, deve-se rever os modelos de educação praticados. O autor defende que o ensino de matemática deve ser menos alienado e mais comprometido com a realidade.

> Um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A **modelagem consiste**, essencialmente, **na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual**. (BASSANEZI, 2002, p. 24. Grifo nosso)

Na obra de Bassanezi (2002), após apresentar a proposta de aplicação da Modelagem Matemática no ensino, o autor relata sobre os obstáculos apresentados por pesquisas posteriores e vivenciados por ele.

O obstáculo classificado como instrucional é caracterizado principalmente na aplicação em cursos regulares onde o programa de curso deve ser cumprido e desenvolvido na íntegra. O processo de Modelagem Matemática pode se tornar longo e demorado o que pode impedir o cumprimento do programa. Ainda em Bassanezi (2002), o autor diz que alguns professores pensam que as conexões com as outras ciências que possivelmente podem ocorrer com a Modelagem Matemática, podem distorcer a estética, a beleza e universalidade da Matemática.

O obstáculo para os estudantes é causado pelo estranhamento de um ensino diferenciado do tradicional. Segundo Bassanezi (2002), isso pode gerar uma certa apatia, tendo como consequência uma criação de um bloqueio por parte dos estudantes. Outro fator que pode causar essa apatia e um obstáculo por parte dos estudantes ocorre quanto ao tema escolhido para a Modelagem Matemática que pode não ser motivador.

Para os professores, o obstáculo é caracterizado quanto a insegurança causada pela sensação de não estar habilitados a trabalhar com a Modelagem Matemática em sua prática. Esta insegurança acaba tornando o processo de preparação da aula mais demorado e trabalhoso.

Ainda no obstáculo dos professores, Bassanezi (2002) apresenta outro fato que pode ocorrer: situações não previstas durante o processo de modelagem. Modelos selecionados podem não resolver a situação proposta ou até mesmo chegar em conclusões que não faziam parte do objetivo do curso. Com isso, retorna o obstáculo instrucional, em que o cumprimento do programa se torna inviável.

Modelagem Matemática na perspectiva de Beltrão (2009)

Na perspectiva de Beltrão (2009) o processo da Modelagem Matemática é realizado por meio de fases pensadas para que minimizem ao máximo os possíveis obstáculos citados anteriormente.

Antes de dar início ao processo de ensino por meio de fases, é necessário o levantamento de possíveis defasagens de determinados conteúdos que servirão de base para a continuidade do processo. Após a aplicação e análise dos conhecimentos prévios necessários que se iniciará o processo por meio de fases que são divididas em três etapas, sendo que a primeira é subdividida em mais três.

A seguir apresentaremos um esquema que ilustra as fases apresentadas por Beltrão (2009).

Modelagem Matemática por fases

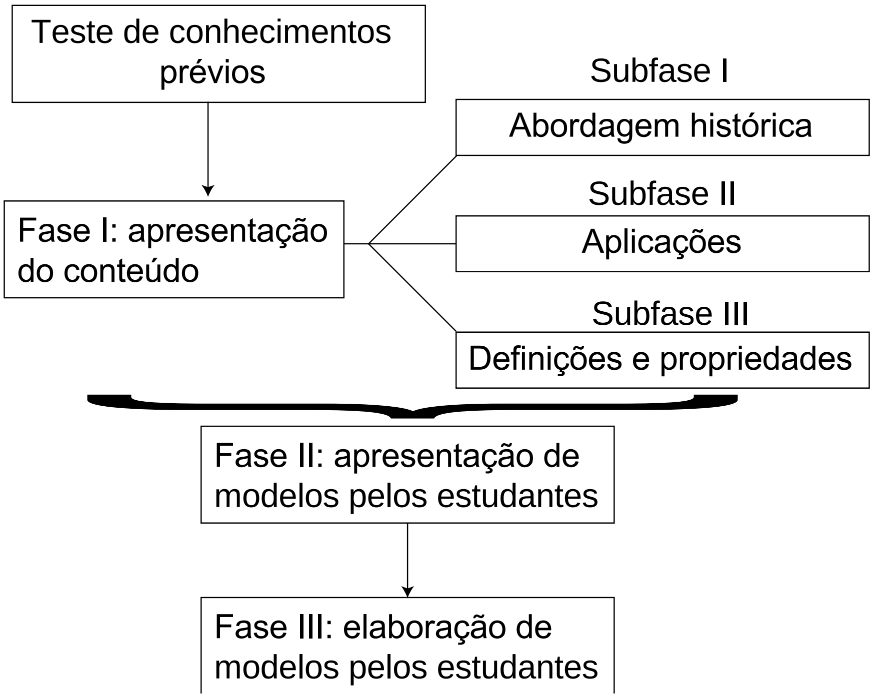


Figura 1 – Esquema de modelagem por meio de fases.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Teste de conhecimentos prévios

Inicialmente, aplica-se uma atividade diagnóstica que também pode ser referenciada como teste de conhecimentos prévios. Nesta etapa, o professor aplicará um teste em formato de avaliação com o intuito de observar e prever como será o andamento do processo de ensino. Caso algum conteúdo escolhido apresente uma certa dificuldade, o professor deverá retomá-lo.

Fase I: apresentação do conteúdo pelo professor

Nesta fase, há uma subdivisão em três subfases:

- **Primeira**: apresentação do conteúdo através de uma abordagem histórica, com o intuito de motivar os estudantes. Nesta etapa, é importante salientar que o conteúdo matemático e o desenvolvimento de toda ciência ali envolvida, não foi fruto de um trabalho simples, com o objetivo de despertar nos estudantes a vontade de aprofundar o conhecimento de determinado conteúdo;

- **Segunda**: exploração das possíveis aplicações. Nesta subfase, deverá ser respondida a pergunta: “onde eu vou usar isto?”. Ficará como atribuição ao professor apresentar situações-problema em que a solução seja feita através de um modelo matemático. Para tal, deverá fazer todo o processo de construção do modelo até a etapa de validação;
- **Terceira**: apresentação de definições e propriedades importantes daquele conteúdo e exemplos. Nesta subfase, o professor apresenta as definições matemáticas, ou seja, é o momento da formalização do conteúdo. Além das definições pertinentes, também deve-se apresentar as propriedades que existem e, por fim, apresentação de exemplos, que se possível, sejam direcionados a fenômenos específicos ao curso.

Na proposta da autora na terceira subfase, quando cita os exemplos direcionados a fenômenos específicos do curso, deve-se ressaltar que ela trabalhou com um grupo de estudantes do curso de Tecnologia de Alimentos, o que não impede a aplicação em outros cursos.

Fase II: estudantes apresentarão situações que envolvem o conteúdo matemático em estudo

Nesta fase, o trabalho principal é do estudante. Nela, deverá trazer para aula modelos ou aplicações diversificadas do conteúdo trabalhado e uma das propostas da autora, é que sejam sempre voltados às especificidades do curso em questão.

Durante a apresentação dos estudantes, o professor direcionará a discussão, enriquecendo os tópicos apresentados, mostrando a matemática ali envolvida.

Fase III: estudantes elaboram situações expressas por modelos ou aplicações

Nesta fase, os estudantes ainda são os princiapais atuantes da aula. Deverão aplicar os conceitos da Modelagem Matemática em um tema escolhido por eles. Diante de um tema ou situação-problema, os estudantes farão a construção de todo o processo da Modelagem Matemática, validada por modelos matemáticos que encaminharão para a solução do mesmo.

Proposta de Ensino de Logaritmos

Neste capítulo, faremos uma análise quanto ao objetivo que temos e as respostas que esperamos em cada momento da aplicação das atividades diante do processo.

Assim como em toda proposta de ensino, espera-se que os estudantes acertem todas as questões e assim, haja o entendimento de todos, porém existem pesquisas que apontam algumas consequências desses erros cometidos pelos estudantes e como que uma análise deles pode contribuir para a qualificação do ensino de matemática, como pode ser observado no trabalho de Cury (2010).

Neste trabalho Cury (2010) aponta que existem diversas pesquisas que tratam da análise de erros, no entanto, não estabelecem isso como uma abordagem de pesquisa e ensino.

Antes de tratar sobre a análise de possíveis erros que podem aparecer durante uma atividade, destacamos a concepção da autora para a palavra “erro”:

> proponho que se entenda como erro, na resolução de uma questão, o que não corresponde à produção esperada de um aluno (ou professor) que já deve ter tido contato com os conteúdos apresentados na referida questão ou com estratégias de resolução de problemas em Matemática. É, portanto, um referencial que toma como suposta verdade o conhecimento institucional, ou seja, o que a instituição “Escola” espera ver apresentado por alunos (ou professores) de um determinado nível de ensino, em suas produções escritas em Matemática. (Cury, 2010, p. 2)

Diante disto apresentaremos em nossa proposta possíveis sugestões de respostas que esperamos dos estudantes e as demais que poderão ocorrer, deixaremos como sugestão a leitura de alguns trabalhos que subsidiarão o trabalho do professor para uma intervenção naquele momento.

Segundo Borasi (1996) *apud* Cury (2010), existem três objetivos para o uso dos erros, sendo a remediação, a descoberta ou a pesquisa. Para a prática docente, a remediação se torna mais atrativa, pois a preocupação com as dificuldades do estudante é recorrente no cotidiano do professor. Diante desta preocupação e da nossa proposta de ensino, destacamos o seguinte trecho:

> a (falsa) crença de que a repetição vai fazer com que a falta de compreensão sobre o tópico em questão fará com que o aluno entenda e não mais cometa o mesmo erro. No entanto, se essa idéia fosse correta, não teríamos os erros sistemáticos, pois, detectados e remediados por uma nova explicação, já teriam sido eliminados. que a falta de compreensão sobre o tópico em questão vai fazer com que o aluno entenda e não mais cometa o mesmo erro. (Cury, 2010, p. 8)

Portanto, para não insistirmos no erro do estudante e para não cairmos na "falsa crença" citada por Cury (2010), em nossa proposta, a cada atividade listaremos uma sequência de trabalhos que poderão servir de subsídio para o professor que detectar determinados erros por parte dos estudantes.

Caso você leitor queira observar as atividades na íntegra, sem as sugestões de respostas e intervenções, elas se encontram no final do trabalho em apêndices indicados em cada uma das fases.

Atividade de teste de conhecimentos prévios

Na questão 1 do teste, temos como objetivo esclarecer eventuais dúvidas em relação ao cálculo de porcentagens simples, pois pensamos ser um conhecimento essencial no cálculo de juros ou até mesmo de meia-vida que serão propostos nas fases que seguem.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

1. Calcular as seguintes porcentagens:
    a. 10% de 500

       50
    b. 12% de 100

       12
    c. 210% de 12

       25,2
    d. 0,5% de 50

       0,25

Após o exercício 1, destacaremos o trabalho de Feltes (2007), em que um dos objetivos foi analisar os erros cometidos por estudantes do Ensino Fundamental e Médio. No trabalho dessa autora, ela elencou alguns conteúdos dentre os quais destacamos no momento o cálculo de porcentagens. Em uma de suas análises, ela observou que alguns erros cometidos pelos estudantes eram constantes.

Dentre as conclusões obtidas por Feltes (2007), destacamos que um dos erros mais frequentes eram relacionados às operações entre conjuntos e a dificuldade com a aplicação das propriedades de potenciação e radiciação.

Visto que em nosso trabalho apresentaremos uma sequência que poderá ser trabalhada em sala, uma sugestão de intervenção caso ocorram erros indesejáveis, são os trabalhos de Lopes (2013) ou o de Dias (2008). Em ambos, os autores fazem um estudo sobre o ensino de porcentagens utilizando problemas reais que se conectam com o cotidiano do estudante.

A questão 2, servirá de base para a resolução de questões sobre equações exponenciais. Isso ocorrerá pois, para a resolução de equações exponenciais, utilizaremos a decomposição do número em fatores primos, para que utilizemos a definição de que se as bases das potenciações são iguais, basta igualarmos os expoentes.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

2. Decomponha os números a seguir em uma potenciação de um único número e um expoente, seguindo o exemplo:

   Exemplo:

   $$8 = 2^3$$

   a. 27

      $27 = 3^3$

   b. 343

      $343 = 7^3$

   c. 1000

      $1000 = 10^3$

d. 1024

$1024 = 2^{10}$

Como sugestão de intervenção do professor caso ele sinta necessidade, deixaremos a leitura do trabalho de Oliveira (2014), onde a autora fez uma análise de dez livros didáticos de Matemática do Ensino Médio com relação a maneira que o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas é trabalhado. A autora classifica em “boa motivação” ou “motivação inadequada” as questões apresentadas pelos livros. A autora classifica em “boa motivação” as questões que apresentam uma boa contextualização dos exemplos e as inadequadas apresentam exemplos com informações incorentes, fictícias ou erradas. Além da análise da apresentação destes conteúdos, ela faz também uma proposta de novos exercícios.

Nessa análise dos livros didáticos, concluiu que dentre os dez livros analisados, apenas três deles apresentavam boas motivações no estudo de equações exponenciais.

Na questão 3, temos como objetivo a verificação do conceito envolvido nas equações exponenciais. O estudante deverá transformar a frase escrita na língua portuguesa, em uma expressão matemática cuja linguagem é algébrica.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

3. Para os enunciados a seguir, resolva tentando utilizar o conceito de equações (passe para a linguagem matemática).

   Exemplo: 2 elevado a que número resulta em 8?

   $2^x = 8$

   $2^x = 2^3$

   $x = 3$

   Portanto, 2 elevado a 3 é igual a 8.

   a. 3 elevado a que número resulta em 81?

   $3^x = 81$

   $3^x = 3^4$

   $x = 4$

Portanto, 3 elevado a 4 é igual a 8.

b. 8 elevado a que número resulta em 2?

$8^x = 2$

$(2^3)^x = 2$

$2^{3x} = 2^1$

$3x = 1$

$x = 1/3$

Portanto, 8 elevado a 1/3 é igual a 2.

c. 81 elevado a que número resulta em 3?

$81^x = 3$

$(3^4)^x = 3$

$3^{4x} = 3^1$

$4x = 1$

$x = 1/4$

Portanto, 81 elevado a 1/4 é igual a 3.

Assim como ocorrido na questão 2, deixaremos como sugestão de intervenção do professor a leitura e utilização do trabalho de Oliveira (2014) no que diz respeito ao conteúdo de equações exponenciais.

Na questão 4, tanto no exemplo como no item "a", buscamos a indagação dos estudantes a respeito do motivo de não haver uma resposta de imediato, assim como houve no exercício anterior. Essa indagação será explorada na questão seguinte, onde será proposto ao estudante que disserte sobre as hipóteses que ele tem sobre o porquê de não chegar a uma conclusão.

Nos itens "b" e "c" desta questão, trabalhamos com as potenciações de base 10, para que já seja dado, intuitivamente, uma das propriedades dos logaritmos.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

4. Para os enunciados a seguir, resolva tentando utilizar o conceito de equações (passe para a linguagem matemática), se possível.

   Exemplo: 10 elevado a que número resulta em 2?

$10^x = 2$

$x = ?$

Com os conhecimentos que temos até o momento, não foi possível chegar em uma resposta.

a. 10 elevado a que número resulta em 3?

$10^x = 3$

$x = ?$

Com os conhecimentos que temos até o momento, não foi possível chegar em uma resposta.

b. 10 elevado a que número resulta em 81?

$10^x = 81$

$10^x = 3^4$

$x = ?$

Com os conhecimentos que temos até o momento, não foi possível chegar em uma resposta.

c. 10 elevado a que número resulta em 100?

$10^x = 100$

$10^x = 10^2$

$x = 2$

Portanto, 10 elevado a 2 é igual a 100.

Nesta questão proposta, devemos levar em consideração uma possível resposta que pode ser dada através do raciocínio por aproximação. O estudante pode pensar nas aproximações conhecidas como no item “a” da questão 4: sabe-se que 10^1 é 10, portanto, para obter o resultado 3 é necessário escolhermos um expoente menor que 1. Com isso, poderá pensar em 10^0, mas chegará ao resultado 1 (um). Portanto, saberá que o expoente é um número entre zero e um. O estudante pode não chegar a uma conclusão exata, mas pode tentar aproximações com números decimais com o auxílio de uma calculadora ou concluir que o resultado será um número decimal maior que zero e menor que um.

No último exercício, assim como mencionado anteriormente, temos o objetivo de verificar como os estudantes dissertarão sobre a dificuldade encontrada no exercício 4. Diante dessa dificuldade, iniciaremos a discussão sobre o conceito de logaritmos, quando trabalharemos com as equações exponenciais de bases diferentes.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

5. Com relação ao exercício anterior, explique brevemente, com suas palavras:
    a. o problema que nos deparamos ao tentar resolver o exercício 4 comparando com o exercício 3?
    Esta questão não possui uma resposta certa ou errada, porém, esperamos que os estudantes percebam que, a dificuldade encontrada nos itens "a" e "b" da questão 4, são as bases das potenciações. No item "b", os estudantes ainda têm condições de transformar o número 81 em uma potenciação de base 3, porém, na igualdade aparece a base 10, o que não podemos utilizar a definição de igualar os expoentes.
    b. Você percebe alguma relação entre eles?
    A relação que espera-se que seja observada, é a utilização do conceito do exercício 3, pois nele utiliza-se a decomposição em fatores primos das potenciações.

Nas últimas questões propostas, nosso principal objetivo é analisar o quão preparado o estudante está em relação ao cálculo de equações exponenciais. Para isso salientamos que será imprescindível que os conhecimentos e aplicações de propriedades operatórias das potenciações e radiciações estejam bem fixados nos estudantes.

Novamente fazendo a leitura do trabalho de Feltes (2007), destacamos a análise da autora realizada nos erros cometidos pelos estudantes na aplicação das propriedades da potenciação e radiciação. Em uma de suas conclusões, a autora destaca que:

> os erros mais frequentes foram os das classes C – que envolve os erros em operações com conjuntos numéricos – e E, em que os

> estudantes desconsideram o expoente da potência ou não entendem a propriedade que envolve expoente negativo. (Feltes, 2007, p. 73)

Tendo em vista que segundo o trabalho de Feltes (2007) os erros na aplicação de propriedades da potenciação e radiciação podem ocorrer, o professor deverá estar preparado para esse tipo de situação.

Caso ele se depare com essa situação, deixamos como sugestão para o professor que apresente novamente as propriedades pertinentes e aplique-as no exercício proposto. Deixaremos como sugestão nesta etapa os trabalhos de Feltes (2007) e Oliveira (2014). Vale ressaltar que nas intervenções necessárias, o professor deverá ralizar a abordagem da maneira distinta da tradicional e não cometer a prática da repetição, retomando assim a ideia de Cury (2010), onde a autora diz que se a repetição resolvesse o problema do erro, eles não seriam comuns e recorrentes.

Fase I – Subfase I

Após a discussão da etapa denominada "Teste de conhecimentos prévios" e feita as devidas ponderações se necessário, o professor poderá dar início ao processo de Modelagem Matemática segundo a proposta de Beltrão (2009). Nesta etapa do processo, recomenda-se que o professor dê início a aula com uma breve introdução e faça a leitura junto com os estudantes, explicando para todos que o objetivo dessa leitura é fazer uma introdução dos logaritmos. O texto por si só, tratará sobre a origem e também será apresentada algumas aplicações que serão trabalhadas na etapa seguinte.

Fase I – Subfase II

Terminada a leitura do texto que trata da origem e de algumas aplicações dos logaritmos, temos a subfase II onde o objetivo é aprofundarmos uma aplicação do modelo matemático a ser trabalhado. Em nossa proposta buscamos uma aplicação do conceito de meia-vida no esporte. Abordamos esse tema pois, pensamos que um trabalho interdisciplinar que faça uma ligação dos conceitos discutidos entre diversas disciplinas torna essa aprendizagem mais próxima da realidade dos estudantes.

Na atividade, a proposta é fazer a leitura e discussão em conjunto com o grupo todo de estudantes. Após a leitura e discussão, a resolução da atividade se dá inicialmente com uma questão sobre o conceito de meia-vida. Nosso objetivo com ela é mostrar aos estudantes que um conceito aprendido na disciplina de Física ou Química pode ser conectado com a Matemática. Caso os estudantes não se recordem de tal conceito, apresentaremos a seguir uma possível resposta que o professor poderá discutir com os estudantes. Com o conceito em mente, esperamos dos estudantes uma reflexão quanto a relação existente entre estes dois temas: meia-vida e os exames anti-doping.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

1-) Escreva o que você conhece sobre *meia-vida* e qual a relação existente entre meia-vida e a questão do *doping* apontada pelos textos.

Nessa questão esperamos que a relação que os estudantes citem nesta questão é a relação existente entre duas grandezas: o tempo (meia-vida) e a atividade de determinada substância no corpo do atleta.

Após realizada a discussão sobre a analogia existente entre os dois conceitos, enunciamos que o atleta ingeriu 100 mg da substância dopante e apresentaríamos o tempo de meia-vida e perguntaríamos se, ao fim dos 30 dias, ainda haverá a presença desta substância no corpo do atleta para a realização do teste.

Com relação aos erros que possivelmente podem ocorrer, deixaremos como sugestão para o professor a leitura do trabalho de Brucki (2011). Nesta pesquisa, o professor que perceber um número expressivo de erros, pode utilizar as atividades apresentadas na página 70 deste presente trabalho.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

2-) De acordo com o primeiro texto, sabe-se que o atleta fez uso da substância *drostanolona*, comprovado por exames realizados posteriormente. Dado que essa substância possui um tempo de meia-vida de aproximadamente 48 horas, imagine a seguinte situação:

O atleta ingeriu 100 mg dessa substância no início do dia 10 de janeiro e que o teste antidoping tenha sido realizado apenas um mês depois, ou seja, passados 30 dias. Podemos afirmar que neste teste não havia mais a presença desta substância em seu organismo?

Considere que após a ingestão no dia 10 de janeiro, não houve mais nenhuma outra aplicação dessa substância e que o teste tenha sido realizado na manhã do fim dos 30 dias.

Nesta questão, esperamos que, dentre os diversos raciocínios que possam existir, que os estudantes cheguem à conclusão de que, embora o valor seja relativamente baixo, ainda exista a presença dessa substância.

Para o professor que achar necessário reforçar este conceito, deixamos também a sugestão da leitura de Brucki (2011) a mesma atividade citada na questão anteior. Neste trabalho, a autora elabora duas atividades que tratam da função exponencial com a problemática da utilização de usinas nucleares nos países, abordando o conceito de função exponencial com uma analogia com as progressões geométricas e fazendo uso de diversas representações para a função com enfoque na abordagem gráfica.

A questão 3, foi pensada utilizando-se a ideia do exercício anterior, porém, na execução desta, induziremos o pensamento do grupo de estudantes para a utilização de um quadro para a formalização do raciocínio, pois no quadro o estudante conseguirá observar o que ocorre com cada uma das grandezas com o passar do tempo.

No segundo item desta questão, propusemos a elaboração de um gráfico, com o intuito favorecer a observação e o levantamento de hipóteses com a visualização gráfica, o que a pesquisa de Brucki (2011) comprova.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

3-) Complete o quadro a seguir:

Quadro 1 – Fase I (subfase II) – Resolução do exercício 3

Número de meias-vidas	**Tempo**	**Quantidade de substância em mg**
0	0 hora	100
1	48 horas	*50*
2	96 horas	*25*
3	*144 horas*	*12,5*
4	*192 horas*	*6,25*
5	*240 horas*	*3,125*
6	*288 horas*	*1,5625*

Faça um gráfico que relacione a quantidade dessa substância no corpo com o tempo. Como sugestão deixaremos a utilização do Microsoft Excel.

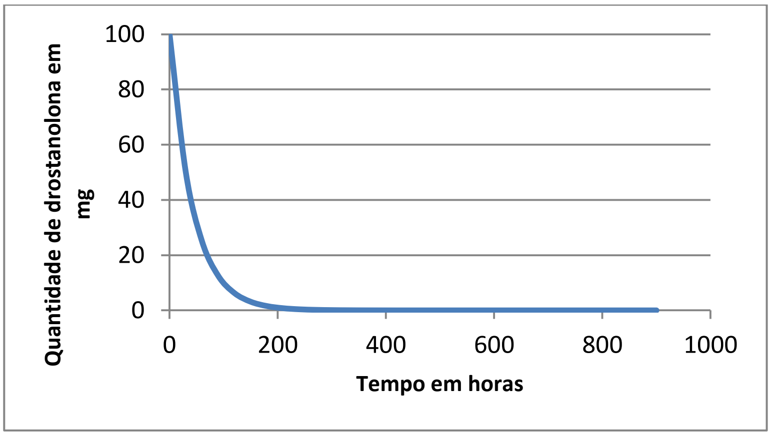


Figura 2 – Quantidade de drostanolona pelo tempo.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta questão, um trabalho que poderá subsidiar o professor caso sinta necessidade, de acordo com os erros cometidos, deixaremos como sugestão a leitura do trabalho de Ferreira e Bisognin (2007). Neste artigo, destacamos o trabalho realizado por estes autores na “1ª atividade”. Nela os autores trabalham o conceito de funções exponencias baseando-se também no gráfico.

A próxima questão tem como objetivo a elaboração de uma equação genérica, que sirva de base para os estudantes em qualquer situação que trate do mesmo assunto.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

4-) A partir do quadro, vamos reescrevê-lo de maneira que em todas as lacunas da quantidade de substância apareçam o valor inicial e o número de meias-vidas.

Quadro 2 – Fase I (subfase II) – Resolução do exercício 4

Número de meias-vidas	Tempo	Quantidade de substância em mg
0	0 hora	$100 \cdot 0{,}5^{0}$
1	48 horas	$100 \cdot 0{,}5^{1}$
2	96 horas	$100 \cdot 0{,}5^{2}$
3	*144 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{3}$
4	*192 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{4}$
5	*240 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{5}$
6	*288 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{6}$

Obs.: Vale ressaltar nesta questão que o professor, durante a execução, deve deixar explícita a ideia utilizada em cada lacuna, principalmente do significado existente em cada parte: o 100 representa a quantidade inicial, o 0,5 da base representa a metade e o expoente é representado pelo número de meias-vidas.

Vale ressaltar que esta questão deve ser trabalhada de forma cautelosa por parte do professor. Não podemos considerar que logo de início os estudantes consigam fazer essa relação das multiplicações e de potênciações. Portanto, deixaremos como uma sugestão de leitura para o professor, antes de iniciar o trabalho com esta questão, o trabalho de Oliveira (2014). Nos capítulos anteriores, fizemos um breve resumo sobre esta pesquisa, mas neste momento, destacaremos a página 20 deste trabalho, quando a autora caracteriza um livro didático que apresenta uma abordagem semelhante a esta como uma “boa motivação para o uso da função exponencial”.

A questão 5, para finalizarmos a ideia do conceito de logaritmos, propusemos uma situação em que o estudante se deparará com um obstáculo semelhante ao que encontrou no exercício do teste de conhecimentos prévios.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

5-) Com esse novo quadro é possível fazer previsões da quantidade de substância ou do tempo decorrido ou o número de meias-vidas que desejamos encontrar. Você conseguiria elaborar um quadro para determinarmos após quantas meias-vidas haverá a quantia de 0,01220703 mg?

Quadro 3 – Fase I (subfase II) – Resolução do exercício 5

Número de meias-vidas	**Tempo**	**Quantidade de substância em mg**
0	0 hora	100
1	48 horas	*50*
2	96 horas	*25*
3	*144 horas*	*12,5*
4	*192 horas*	*6,25*
5	*240 horas*	*3,125*
6	*288 horas*	*1,5625*
7	*336 horas*	*0,7812*
8	*384 horas*	*0,3906*
9	*432 horas*	*0,1953*
10	*480 horas*	*0,0976*
11	*528 horas*	*0,0488*
12	*576 horas*	*0,0244*
13	*624 horas*	*0,0122*

Fase I – Subfase III

Neste momento, os estudantes já tem conhecimento sobre os logaritmos, porém ainda não conhecem as condições de existência e as propriedades operatórias. Para isso, propusemos a aplicação das atividades extraídas de Vidigal (2014).

Essas atividades, dentre diversas outras possibilidades, foram selecionadas pois a resolução será realizada de forma experimental para os estudantes. Além dos resultados que são induzidos pelas perguntas feitas, as conclusões retiradas são as condições de existência e as propriedades operatórias.

Antes de iniciar a atividade, será apresentado um texto retratando novamente a história dos logaritmos e como foi criado o conceito através de conhecimentos das progressões aritmética e geométrica.

O estudante deverá fazer uma analogia com o exercício já resolvido no teste de conhecimentos prévios, onde era induzido a resolver equações exponenciais com a decomposição do número em potenciações de mesma base.

Segue uma das atividades propostas no trabalho:

Quadro 4 – Fase I (subfase III) – Resolução do exercício 1

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Para cada termo da progressão geométrica, o termo correspondente na progressão aritmética será o seu logaritmo na base 2 (pois a razão da progressão geométrica é 2). Ou seja, o logaritmo na base 2 de 512 é 9.

Com base nessa associação qual é:

a) o logaritmo de 2048 na base 2?

Para chegar a resposta o estudante deverá verificar que número se encontra acima do 2048 no quadro apresentado, chegando em 11 como resposta.

b) o logaritmo de 1/2 na base 2?

Nesta pergunta o estudante não conseguirá fazer a analogia de imediato, pois quando solicitado o valor 1/2, ele deverá seguir para a esquerda do quadro, não para a direita, retornando dois termos chegando em –1 na PA e 1/2 na PG.

Na sequência das atividades realizadas, será dada a formalização do conceito de logaritmo, onde a linguagem matemática daquilo que foi calculado será apresentada.

Após a formalização, há uma proposta de alguns exercícios que o estudante deverá resolver utilizando a definição.

Ainda com o auxílio do quadro dado inicialmente, o professor vai introduzir as propriedades operatórias dos logaritmos. A ideia será a transformação de produtos em somas e de maneira análoga, transformar divisões em subtrações. Segue proposta:

Faça a multiplicação 2×512 e procure o resultado no quadro. Agora responda qual a relação existente entre os valores dos logaritmos na base 2 dos números multiplicados e o logaritmo também na base 2 do número obtido na multiplicação?

Quando o estudante resolve a multiplicação obtém como produto o número 1024. Feito isso, deverá calcular o logaritmo de 2, o logaritmo de 512 e por fim, o logaritmo de 1024 e perceber que a relação existente é que o logaritmo de 1024 é igual a soma dos logaritmos de 2 e 512.

De maneira análoga deverá proceder para a divisão.

Após as propriedades da soma e divisão elucidadas, será apresentada a propriedade da potenciação. Para isso, segue as atividades que deverão ser realizadas:

Encontre o resultado de 8^2 e procure no quadro. Agora responda qual a relação entre o logaritmo de 8 e o logaritmo do resultado obtido.

Quando o estudante resolve a potenciação obtém como produto o número 64. Feito isso, deverá calcular o logaritmo de 8 e o logaritmo de 64 para perceber que a relação existente é que o logaritmo de 64 é igual a duas vezes o logaritmo de 8.

Por fim, será deduzida as condições de existência dos logaritmos. Para isso, será explorado alguns cálculos, por exemplo: log(–2), log(–10), log(–32,1), log(–

123), etc. Essas atividades foram pensadas para que o estudante perceba que há um problema quando o logaritmo que deseja calcular é negativo, chegando a uma primeira condição de existência.

Na sequência, será solicitado que calcule: $\log_1 3$, $\log_{-2} 8$, $\log_0 7$, etc. Nessa etapa, o objetivo é mostrar que agora o problema se encontra na base do logaritmo, chegando a conclusão de ela deve ser maior que zero e diferente de 1.

Deixaremos como sugestão o uso de calculadoras científicas nesta etapa. Para isso, será necessário que o professor ensine o manuseio dela para dar continuidade.

Fase II

Na Fase II, assim como em Beltrão (2009), neste momento os estudantes apresentarão outros modelos ou aplicações dos logaritmos. Sugerimos que haja uma pesquisa inicial por conta dos estudantes, em diversas fontes. Após essa primeira pesquisa, o professor orientará os grupos de estudantes a pesquisarem em fontes confiáveis e assim indicar alguns trabalhos realizados por outros pesquisadores.

Deixaremos como sugestão dois trabalhos: o primeiro é de um autor já mencionado, Vidigal (2014), onde há um exemplo da aplicação dos logaritmos na propagação do som, no caso, na escala decibel. A outra pesquisa que deixaremos como sugestão é Rossi (2010), onde serão apresentadas aplicações de escalas logarítmicas na mensuração da intensidade dos terremotos, no cálculo de pH para a mensuração de acidez de substâncias e em modelos matemáticos dados em funções logarítmicas.

Para essa proposta utilizaremos uma das atividades de Rossi (2010), intitulada como “logaritmos e funções”.

Nesta atividade há um texto base para o estudante onde será apresentado uma função que relaciona a altura de uma árvore em função do tempo. Com isso, é dado um modelo matemático que servirá de base para a resolução de todas as questões que virão na sequência. O modelo dado é: $h(t) = 1,5 + \log_3(t + 1)$, onde $h(t)$ representa a altura da árvore em metros e t o tempo transcorrido em anos.

Na primeira questão é perguntado qual é a altura da árvore no momento que ela foi plantada. Para isso, o estudante deve ter em mente que no momento do plantio não se passou nenhum ano, portanto, t deverá ser zero. Segue modelo de resolução:

$$h(0) = 1,5 + \log_3(0 + 1)$$

$$h(0) = 1,5 + \log_3 1$$

$$h(0) = 1,5 + 0$$

$$h(0) = 1,5\ m$$

No item b desta mesma questão, é questionado qual a altura da árvore após 26 anos. Para a solução do problema, o estudante deverá substituir o t por 26. Segue o modelo de resolução:

$$h(26) = 1,5 + \log_3(26 + 1)$$

$$h(26) = 1,5 + \log_3(27)$$

$$h(26) = 1,5 + 3$$

$$h(26) = 4,5\ m$$

Por fim, no item c, pede-se que o estudante calcule o tempo transcorrido no momento em que a árvore atingiu a altura de 3,5 m. Agora será necessário que o estudante tenha claro que deverá substituir o $h(t)$ por 3,5. Segue modelo de resolução:

$$3,5 = 1,5 + \log_3(t + 1)$$

$$2 = \log_3(t + 1)$$

$$3^2 = t + 1$$

$$t = 8 \text{ anos}$$

Com isso, encerra-se a fase II, onde o objetivo principal é a apresentação por parte dos estudantes de novas aplicações do modelo estudado ou até mesmo a elaboração. Em nossa proposta, sugerimos que o estudantes faça a apresentação de novas aplicações de modelos e para isso o professor pode subsidiar a busca dando algumas sugestões de fontes de pesquisa.

Fase III

A Fase III é a finalização do processo e pode-se considerar que seria uma avaliação do professor em relação a quanto os estudantes compreenderam a forma que podemos obter determinado conhecimento matemático, utilizando-se da Modelagem Matemática.

Essa avaliação não é a avaliação formal instituída nos diferentes níveis de ensino, é uma avaliação do estudante produzindo uma aplicação ou um modelo matemático. Em nossa proposta, apresentaremos uma aplicação do conceito de logaritmos que poderia ser elaborada por estudantes de diferentes níveis.

Na Fase III do processo de Modelagem Matemática por meio de fases proposta por Beltrão (2009) ocorre o processo de Modelagem Matemática proposto por Bassanezi (2002), pois neste momento, para a elaboração de um novo modelo ou de uma nova aplicação de um modelo matemático, o estudante deve seguir as etapas de Bassanezi (2002), sendo basicamente o processo de investigação empírica e a experimentação, chegando ao fim na aplucação e validação do processo.

Em nossa proposta, deixamos como exemplo uma atividade em que o estudante apresentaria uma aplicação no cálculo de juros compostos, utilizando-se dos logaritmos para resolver um problema real. A atividade se encontra na íntegra no apêndice G. Neste capítulo faremos a análise do que pode se esperar com essa atividade.

Na questão 1, seria trabalhado a investigação do estudante quanto a realidade do problema, espera-se que haja uma busca de preços atualizados de um smartphone recém lançado.

Na próxima questão, aproveitaria-se a pesquisa de preço realizada e, assim como proposto na Fase I – subfase II, seria suposta uma situação realística, ou seja, muito próxima do real. Segue a questão com o que espera-se como resposta:

2-) Aproveitando a pesquisa realizada na questão anterior, se coloque na posição do estudante curioso.

Sabe-se que grande parte da população mundial tem interesse neste mesmo smartphone. Imagine que você tenha uma certa quantia em dinheiro, que ainda não é o suficiente para comprar o aparelho na loja mais barata. Para conseguir adquirir o aparelho, você pretende fazer uma aplicação em um banco e pretende descobrir qual o tempo mínimo que você precisaria deixar seu dinheiro aplicado para que consiga comprar o aparelho pagando o menor preço.

Para isso, sabe-se que uma das aplicações mais seguras, que apresentam um rendimento mensal é a poupança.

Considere que, neste tipo de aplicação, a taxa de juros é de aproximadamente 0,5% ao mês.

Em quanto tempo, uma aplicação de R$ 1.000,00, à taxa de 0,5% ao mês, vai gerar a quantia suficiente para a aquisição do smartphone? Considere ainda que não serão realizados outros depósitos mensais, ou seja, novas aplicações.

Para a solução deste problema, pense nas seguintes situações:

e) Após 1 mês de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
f) Após 2 meses de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
g) Após 3 meses de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
h) Após quanto tempo ele terá condições de comprar o aparelho?

Obs.: faça um quadro que auxilie na visualização das operações a serem utilizadas.

Quadro 5 – Fase III – Resolução do exercício 2

Tempo	***Quantia acumulada (em R$)***
Início	*1000*
Mês 1	*1000 · 1,005 = 1005,00*
Mês 2	*1005 · 1,005 = 1010,03*
Mês 3	*1010,03 · 1,005 = 1015,08*

Assim como foi apontado na questão 4 (resolução no quadro 2), da Fase I (subfase II), a montagem deste quadro talvez não seja imediata. Portanto, novamente, deixaremos como sugestão, a leitura de Oliveira (2014).

A questão 3 será uma discussão sobre o que ocorre com a quantia investida. O estudante deverá dissertar sobre o tempo que levará para conseguir acumular o montante necessário para a compra. Neste caso, a resposta que esperamos não é um valor exato, mas que ele tente chegar intuitivamente à resposta.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

3-) Após a elaboração do quadro com os valores acumulados até o terceiro mês de aplicação, podemos dizer que em breve chegaríamos no valor necessário? Explique.

Não, pois a cada mês, o aumento da quantia é muito baixo.

Na sequência, será induzida a elaboração do quadro de acordo com a atividade realizada na Fase I – subfase II. Neste momento, espera-se que os estudantes já consigam fazer uma previsão de um modelo matemático que levará à equação. Vale ressaltar que como o objetivo é chegar na aplicação do logaritmo, a atividade continuará, caso o professor opte por trabalhar apenas com juros compostos, até esta questão é o suficiente.

4-) A partir do quadro, vamos reescrevê-lo de maneira que em todas as lacunas da quantia acumulada apareçam o valor inicial e a taxa de juros.

Quadro 6 – Fase III – Resolução do exercício 4

Tempo	***Quantia acumulada (em R$)***
Início	*1000*
Mês 1	$1000 \cdot 1{,}005 = 1005{,}00$
Mês 2	$1000 \cdot 1{,}005^2 = 1010{,}03$
Mês 3	$1000 \cdot 1{,}005^3 = 1015{,}08$
...	...

Por fim, a resolução do problema proposto inicialmente se dá pela aplicação do logaritmo. Segue a resolução esperada:

5-) Com esse novo quadro é possível fazer previsões do valor ou do mês que desejamos encontrar. Encontre uma função que permita descrever a situação proposta em qualquer momento t.

Quadro 7 – Fase III – Resolução do exercício 5

Tempo	***Quantia acumulada (em R$)***
Início	*1000*
Mês 1	$1000 \cdot 1{,}005 = 1005{,}00$
Mês 2	$1000 \cdot 1{,}005^2 = 1010{,}03$
Mês 3	$1000 \cdot 1{,}005^3 = 1015{,}08$
...	...
Mês n	$1000 \cdot 1{,}005^n = ?$

Como desejamos saber em que mês será acumulada a quantia de aproximadamente R$4500,00, temos que:

$$1000 \cdot 1{,}005^n = 4500$$
$$1{,}005^n = 4{,}5$$
$$\log_{1,005} 4{,}5 = n$$
$$n \cong 301 \text{ meses}$$

Em toda nossa sequência, apresentamos por diversas vezes, atividades que promovem a construção dos modelos matemáticos envolvidos em conjunto (professor e estudante). Porém, pensamos que esta escolha ficará a cargo do professor que se sentir seguro em seguir esta proposta. Em boa parte das atividades, como ocorre na questão 5, os quadros de valores são ilustrativos e podem favorecer a compreensão do conceito envolvido, portanto, uma sugestão que deixaremos para o leitor é a utilização de um software, sendo o Microsoft Excel, pois nele, a construção dos quadros de valores que seguem um determinado padrão, podem ser extendidos indefinidamente.

APÊNDICE B: TESTE DE CONHECIMENTOS PRÉVIOS

1. Calcular as seguintes porcentagens:
    a. 10% de 500
    b. 12% de 100
    c. 210% de 12
    d. 0,5% de 50

2. Decomponha os números a seguir em uma potenciação de um único número e um expoente, seguindo o exemplo:
   Exemplo:
   $8 = 2^3$
    a. 27
    b. 343
    c. 1000
    d. 1024

3. Para os enunciados a seguir, resolva tentando utilizar o conceito de equações (passe para a linguagem matemática).
   Exemplo: 2 elevado a que número que resulta em 8?
   $2^x = 8$
   $2^x = 2^3$
   $x = 3$
   Portanto, 2 elevado a 3 é igual a 8.
    a. 3 elevado a que número resulta em 81?
    b. 8 elevado a que número resulta em 2?
    c. 81 elevado a que número resulta em 3?

4. Para os enunciados a seguir, resolva tentando utilizar o conceito de equações (passe para a linguagem matemática), se possível.
   Exemplo: 10 elevado a que número resulta em 2?
   $10^x = 2$
   $x = ?$
    a. 10 elevado a que número resulta em 3?
    b. 10 elevado a que número resulta em 81?
    c. 10 elevado a que número resulta em 100?

5. Com relação ao exercício anterior, explique brevemente, com suas palavras:
    a. o problema que nos deparamos ao tentar resolver o exercício 4 comparando com o exercício 3?
    b. Você percebe alguma relação entre eles?

APÊNDICE C: FASE I – SUBFASE I

A IMPORTÂNCIA DO LOGARITMO PARA A SOCIEDADE

Eloi da Silva Pereira

Entre os séculos XVI e XVII, vários matemáticos desenvolveram estudos objetivando simplificar cálculos, construíram tabelas relacionando números naturais nos expoentes de 10 correspondentes a cada um. Todo número positivo pode ser escrito como potência de 10. A esses expoentes deram o nome de logaritmos. A palavra logaritmo vem do grego: *logos* (razão) + *arithmos* (números). Esses logaritmos são com a exceção das potências de 10, números irracionais. Assim, o número 0,301 é a aproximação do logaritmo de 2 na base 10.

O log surgiu quando já havia a carência de facilitar cálculos na trigonometria, astronomia e na navegação. O plano era tomar o lugar de operações complicadas pelas mais fáceis. Os principais descobridores do log foram o suíço Burgi (1552-1632) e John Neper (1550-1617).

Os logaritmos foram aplaudidos e aprazíveis como engenho singular que teve choque categórico no progresso científico e tecnológico. O astrônomo Kepler (1517-1630) aclamou aos logaritmos como uma benção e os empregou nos cálculos que o levaram a descobrir a Terceira lei de Kepler: do Tempo.

A utilidade dos logaritmos

A descoberta dos logaritmos está ligada a ideia de simplificar o trabalho de cálculos, pois para adicionarem-se dois números de quatro algarismos efetuamos uma operação já para os multiplicarmos as operações quintuplicam.

O uso dos logaritmos não fica limitado às resoluções de problemas matemáticos, eles foram de grande valia para o desenvolvimento da ciência. Enfoca-se que ele foi bastante útil para a construção do conhecimento cientifico, para as grandes navegações, por exemplo, pois elas solicitavam novos conhecimentos e tecnologia. Logo, a evolução do uso do logaritmo está vinculada ao contexto social da época, dos séculos passados e ao contexto atual da nossa sociedade. A expansão comercial e a necessidade de melhorar técnicas de navegação exigiram sistemas práticos e rápidos a fim de que facilitasse os cálculos. Não era moleza ser marinheiro nos séculos XV e XVI, para que novas terras além-mar fossem descobertas, os navegantes enfrentavam fome, doenças, saques e naufrágios. Com isso a época exigia a simplificação dos cálculos da astronomia, pois ela era utilizada como referencial para eles se localizarem ao mar; também precisavam imediatamente saber quanto cada viagem os tinha rendido em riqueza e juros.

A natureza e os logaritmos

As vibrações que são provocadas pelos terremotos são conhecidas por ondas sísmicas acontecendo com frequência na Terra. Para gravar essas ondas no papel há um sismógrafo, aparelhos que utilizam os traços enviesados das vibrações, que mostram a variação de amplitudes dos terremotos de terra .

A duração, localização e amplitude de cada terremoto podem ser fixadas pelos sismógrafos instalados em estações sismológicas na Terra. Na Califórnia nos Estados Unidos da America, em 1935, Charles Francis Richter desenvolveu uma escala, Escala Richter, para comparar informações e efeitos dos terremotos utilizando o logaritmo. Charles Richter fez uso de uma equação matemática para comensurar a força de destruição dos terremotos. Nesta equação, são envolvidas grandezas como magnitude, amplitude, intervalo de tempo entre ondas e pressão máxima no sismógrafo.

Outra situação que podemos adotar, é a grandeza do nível sonoro que também obedece a uma escala logarítimica. Podemos relacionar esses conceitos com algumas situações corriqueiras. O ouvido humano apresenta lesões irrecuperáveis sempre que é exposto por um determinado tempo a níveis sonoros (N) superiores a 80 dB. A unidade bel (B) e a decibel (dB) representam uma homenagem ao físico Alexander Graham Bell (1897-1922).

Considerações finais

Pode-se ressaltar a importância da matemática para a as aplicações humanas, desde as ciências até a tecnologia para as sociedades distintas, conclui-se que não tendo como trabalhar a matemática, em qual nível de aprendizado for, sem evidenciar-se a carência de promover discussões e meditações que envolvam o saber científico bem como as condições em que ele foi criado seu patamar em circunstâncias sociais de cada época e sua íntima relação com a matemática.

APÊNDICE D: FASE I – SUBFASE II

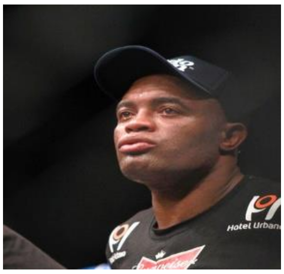
Leia o texto a seguir:

Anderson Silva é pego novamente no antidoping, agora após o UFC 183

12/02/2015 01h22 - Atualizado em 12/02/2015 09h58

Exame do lutador ainda não foi divulgado pela Comissão Atlética de Nevada, que deve ouvi-lo em audiência no dia 17 de fevereiro, em Las Vegas.

Por combate.com, Las Vegas, EUA



(Foto: Steve Marcus / Getty Images)

O que era considerado impossível, e o maior pesadelo para Anderson Silva e para o próprio MMA brasileiro, aconteceu. Segundo informações, o resultado do exame antidoping feito por **Anderson Silva** no dia 31 de janeiro, **data da sua vitória sobre Nick Diaz no UFC 183**, deu positivo para substâncias proibidas. O exame ainda não foi divulgado pela Comissão Atlética do Estado de Nevada, apesar da requisição de nossa equipe para o envio de uma cópia dos testes.

Anderson Silva foi flagrado pela primeira vez em um **exame antidoping no teste feito dia 9 de janeiro**, que continha em sua amostra de urina a presença de dois esteroides anabolizantes: **androsterona** e **drostanolona**.

Extraído com adaptações de: http://sportv.globo.com/site/combate/noticia/2015/02/anderson-silva-e-pego-novamente-no-antidoping-agora-apos-o-ufc-183.html.
Acesso em: 5 de abr. de 2015. Adaptado.

Exame anti-doping e procedimentos do exame:

O uso de drogas ou qualquer outro tipo de substância que melhore de forma artificial o rendimento de um atleta durante uma competição e que tragam efeitos prejudiciais ao mesmo é denominado doping. Aquele que faz uso de doping leva certa vantagem (desleal) em relação aos que não o fazem, por isso é considerado antiético e é proibido no esporte. O teste antidoping tem a função de detectar essas substâncias, bem como sua quantidade no organismo dos atletas, classificadas pela Agência Mundial de Antidoping.

O teste é feito com urina, aproximadamente 65 mL, uma vez que é pela urina que são eliminadas substâncias tóxicas ao organismo. Para fazer o exame, o atleta é encaminhado para o controle de doping, onde fará a coleta da urina na presença de um responsável do evento de mesmo sexo, para que não haja fraude na coleta. No ato da coleta são analisados o pH e o volume da amostra, que depois é transferida para dois recipientes: prova e contraprova e enviada ao laboratório olímpico.

Quando são encontradas substâncias proibidas na prova, é feito um novo exame com a amostra contraprova, obedecendo aos mesmos parâmetros do primeiro. Nos casos em que a contraprova também gera resultado positivo, a infração do esportista é informada ao órgão que controlam o processo e o atleta é punido, podendo ser eliminado da competição ou até julgado pelo comitê. O laudo do exame é entregue em envelope lacrado primeiramente ao órgão responsável, e não ao atleta.

As substâncias vetadas são, geralmente, classificadas em quatro grupos:

- Estimulantes: tornam o atleta mais excitado, agindo diretamente no sistema nervoso. São capazes de eliminar a sensação de fadiga e potencializar o desempenho do atleta. Dentre as mais comuns estão a anfetamina, a cocaína e o ecstasy.
- Narcóticos analgésicos: têm o poder de amenizar a dor e são usados com maior frequência no ciclismo e no pugilismo. Morfina e derivados são exemplos de doping dessa classe.
- Diuréticos: atuam na eliminação de água do organismo para que haja perda de peso, além de serem utilizados também para eliminar outras substâncias proibidas.
- Esteroides anabolizantes: aumentam a massa muscular do atleta (não-atletas também os utilizam para esse fim) e diminuem o tempo de recuperação. Podem ser consideradas as mais nocivas das substâncias vetadas.

O doping pode trazer efeitos colaterais como comportamento agressivo, acne, lesões hepáticas, sudorese excessiva, choque anafilático, insônia, arritmia cardíaca, acidente vascular cerebral, cânceres, entre outros.
Somente os laboratórios credenciados pela WADA – *World Anti-doping Agency* – são aptos a fazer o exame antidoping. Todos os atletas são submetidos ao teste sem serem avisados previamente.

Extraído de: http://www.infoescola.com/esportes/exames-antidoping/
Acesso em: 17 de jul. 2015. Adaptado.

Com base nas informações contidas nos textos, discuta e responda as questões.

1-) Escreva o que você conhece sobre *meia-vida* e qual a relação existente entre meia-vida e a questão do *doping* apontada pelos textos.

2-) De acordo com o primeiro texto, sabe-se que o atleta fez uso da substância *drostanolona*, comprovado por exames realizados posteriormente. Dado que essa substância possui um tempo de meia-vida de aproximadamente 48 horas, imagine a seguinte situação:
O atleta ingeriu essa substância no início do dia 10 de janeiro e que o teste antidoping tenha sido realizado apenas um mês depois, ou seja, passados 30 dias. Podemos afirmar que neste teste não havia mais a presença desta substância em seu organismo?
Considere que após a ingestão no dia 10 de janeiro, não houve mais nenhuma outra aplicação dessa substância.

3-) Complete o quadro a seguir:

Número de meias-vidas	**Tempo**	**Quantidade de substância em mg**
0	0 hora	100
1	48 horas	
2	96 horas	
3		
4		

5		
6		

Faça um gráfico que relacione a quantidade dessa substância no corpo com o tempo.

4-) A partir do quadro, vamos reescrevê-lo de maneira que em todas as lacunas da quantidade de substância apareçam o valor inicial e o número de meia-vida.

Número de meias-vidas	**Tempo**	**Quantidade de substância em mg**
0	0	$100 \cdot 0{,}5^{0}$
1	48 horas	$100 \cdot 0{,}5^{1}$
2	96 horas	$100 \cdot 0{,}5^{2}$
3	144 horas	$100 \cdot 0{,}5^{3}$
4	192 horas	$100 \cdot 0{,}5^{4}$
5	240 horas	$100 \cdot 0{,}5^{5}$
6	288 horas	$100 \cdot 0{,}5^{6}$

5-) Com esse novo quadro é possível fazer previsões da quantidade de substância ou do tempo decorrido ou o número de meia-vida que desejamos encontrar. Você conseguiria elaborar uma equação para determinarmos após quantas meias-vidas haverá a quantia de 0,01220703 mg?

APÊNDICE E: FASE I – SUBFASE III

Invenção dos logaritmos:
Leia o seguinte texto que destaca alguns aspectos importantes da criação dos logaritmos.

Os logaritmos, como instrumento de cálculo, surgiram para realizar simplificações, uma vez que transformam multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração.
Napier foi um dos que impulsionaram fortemente seu desenvolvimento, perto do início do século XVII. Ele é considerado o inventor dos logaritmos, muito embora outros matemáticos da época também tenham trabalhado com ele.
Já antes dos logaritmos, a simplificação das operações era realizada através das conhecidas relações trigonométricas, que relacionam produtos com somas ou subtrações. Esse processo de simplificação das operações envolvidas passou a ser conhecido como prostaférese, sendo largamente utilizado numa época em que as questões relativas à navegação e à astronomia estavam no centro das atenções. De fato, efetuar multiplicações ou divisões entre números muito grandes era um processo bastante dispendioso em termos de tempo. A simplificação, provocada pela prostaférese, era relativa e, sendo assim, o problema ainda permanecia. O método de Napier baseou-se no fato de que associando aos termos de uma progressão geométrica

$$\mathbf{b, b^2, b^3, b^4, b^5, \ldots , b^n, \ldots}$$

os termos da progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots , n, \ldots$$

então ao produto de dois termos da primeira progressão, bm.bp, está associada a soma m+p dos termos correspondentes na segunda progressão.
Considerando, por exemplo,

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Para efetuar, por exemplo, 256 x 32, basta observar que: 256 na segunda linha corresponde a 8 na primeira; 32 na segunda linha corresponde a 5 na primeira; como 8 + 5 = 13, 13 na primeira linha corresponde a 8192 na segunda.
Assim, 256 x 32 = 8192 resultado esse que foi encontrado através de uma simples operação de adição.

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm

O texto apresenta uma relação entre uma progressão aritmética e uma progressão geométrica.

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Para cada termo da progressão geométrica, o termo correspondente é seu logaritmo na base 2 (pois a razão da progressão geométrica é 2). Ou seja, o logaritmo na base 2 de 512 é 9.
1) Com base nessa associação qual é:

a) o logaritmo de 2048 na base 2?
b) o logaritmo de 1/2 na base 2?
c) o logaritmo de 1 na base 2?

2) De acordo com o texto, uma propriedade que motivou a criação dos logaritmos foi a possibilidade de transformar produtos em somas. Verifique esta e outras propriedades fazendo o que se pede a seguir:

a) Faça a multiplicação 2 x 512 e procure o resultado no quadro. Qual é a relação entre os logaritmos dos números multiplicados e o logaritmo do resultado da multiplicação?

Em linguagem matemática, podemos escrever que:

$$\log_2(2 \times 512) = \log_2 2 + \log_2 512$$

Generalizando, podemos dizer que:

$$\mathbf{\log_b(a \times c) = \log_b a + \log_b c}$$

3) Da mesma forma que você procedeu para a multiplicação, pense o que aconteceria com a divisão.

a) Faça a divisão 16384 ÷ 128 e procure o resultado no quadro. Qual é a relação entre os logaritmos dos números divididos e o logaritmo do resultado da divisão?

Em linguagem matemática, podemos escrever que:

$$\log_2(16384 \div 128) = \log_2 16384 - \log_2 128$$

Generalizando, podemos dizer que:

$$\mathbf{\log_b(a \div c) = \log_b a - \log_b c}$$

4) Encontre o resultado da potenciação 64^2 e procure o resultado obtido no quadro. Qual é a relação entre o logaritmo de 64 e o logaritmo do resultado obtido?

Generalizando, podemos dizer que:

$$\mathbf{\log_b(a^d) = d \times \log_b a}$$

Condições de Existência

Agora que você já calculou alguns logaritmos e se deparou com as diversas propriedades, apresentaremos algumas condições de existência. Para isso, faça o que se pede:

1) Usando a definição, tente calcular os logaritmos a seguir:

a) $\log_2(-2)$
b) $\log(-10)$
c) $\log_3(-32{,}1)$

Com os logaritmos dados anteriormente, você deve ter percebido que houve um problema na resolução deles. Isso ocorre pois o logaritmando (nome dado ao número entre parênteses) deve ser positivo.

2) Usando a definição, tente calcular os logaritmos a seguir:

a) $\log_1 3$
b) $\log_{-2} 8$
c) $\log_0 7$

Assim como no exercício anterior, você percebeu que houve um problema na resolução deste exercício. Observe que o problema se encontra nos números das bases dos logaritmos. Com isso, conclui-se que a base deve ser ser um número diferente de 1 e positivo.

Generalizando, temos:

$$\mathbf{b^c = a \iff \log_b a = c}$$

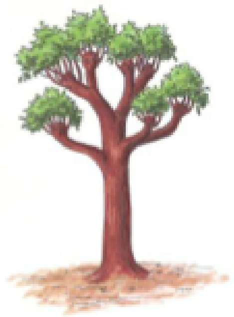
Onde devemos ter que:

$a > 0$

$b \neq 1$ e $b > 0$

APÊNDICE F: FASE II

Logaritmos e funções:



Ao se estudar fenômenos físicos, químicos ou biológicos, temos muitas vezes a presença dos logaritmos como modelo de certas situações. Vejamos uma delas:

A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira evolui, desde que a muda é plantada (t = 0), segundo o seguinte modelo matemático:

$h(t) = 1{,}5 + \log_3(t + 1)$, com h(t) em metros e t em anos.

a) No momento em que a muda é plantada, qual é a sua altura?

b) Transcorridos 26 anos, qual será a altura de uma dessas árvores?

c) Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, calcule o tempo transcorrido (em anos) do momento da plantação até o corte.

Logaritmos e a acidez:

Para caracterizar a acidez de um líquido, usa-se um indicador chamado de pH (potencial hidrogeniônico), determinado pela presença de hidrônios H_3O^+. A água tem íons H^+ livres, são poucos, mas existem, cerca de 1 íon-grama para cada 10^7 litros, ou seja a razão é $1/10^7$. Assim dizemos que o pH da água é 7. No suco de limão existem mais íons que na água, 1 íon-grama para cada 10^2 litros, a razão é $1/10^2$. Assim o pH do suco de limão é 2. Observe que *quanto* ***maior*** *é a concentração de hidrônios,* ***mais ácida*** *é a substância*.

O pH dá uma ideia da quantidade de íons H^+ que se encontram livres na substância, indicando a quantidade por unidade de volume.

Para medir a acidez de substâncias é mais prático considerar uma escala logarítmica.

O pH é definido por $pH = -\log\,[H_3O^+]$, sendo $[H_3O^+]$ a quantidade de íon-grama por litro. Por definição, o pH igual a 7 é considerado neutro, de 0 a 7, ácido e de 7 a 14, básico.

A seguir temos o pH de algumas substâncias:

Ácido (maior concentração de hidrônios)

Substância	pH
Suco de limão	2
Suco de tomate	4
Leite	6,9
Água	7
Leite de magnésia	10

Básico (menor concentração de hidrônios)

a) Com base nas informações do texto anterior responda: se um líquido tem 1 íon-grama H^+ para cada 1000 litros, qual o seu pH?
Resposta: Se um líquido tem 1 íon-grama H+ para cada 1000 litros, seu pH é 3.

b) O que significa dizer que uma substância tem pH igual a 9?
Resposta: Significa dizer que sua concentração é de 1 íon grama de H^+ para cada 1000000000 litros da substância. E seu pH é básico.

c) O suco de laranja tem concentração de hidrônios $[H_3O^+]$ 10 vezes menor que o suco de limão. Qual é o pH da laranja?
Resposta: Como o pH do limão é 2, isso significa que sua concentração é de 1 íon grama de H^+ para cada 100 litros de suco. Se a laranja tem a concentração 10 vezes menor, ela tem 1 íon grama de H^+ para cada 1000 litros de suco, assim seu pH é 3.

d) O café preto tem concentração de hidrônios $[H_3O^+]$ 100 vezes maior do que a água pura. Qual é seu pH?
Resposta: O pH da água, de acordo com o quadro acima é 7. Se o pH do café é 100 vezes maior que o da água pura, sua concentração é de 1 íon grama de H^+ para cada 100000 litros de café e seu pH é 5.

APÊNDICE G: FASE III

Matemática financeira: logaritmos

Leia os textos a seguir e responda as questões.

iPhone 6 no Brasil: lançamento é marcado por filas, mesmo com preço salgado

14/11/2014 às 00h01

Os tão aguardados iPhone 6 e iPhone 6 Plus finalmente chegaram ao Brasil nesta sexta-feira (14) e parece que os preços salgados não foram um problema para os clientes. Filas preenchidas com fãs ansiosos movimentaram as lojas de operadoras de shoppings do Rio de Janeiro e de São Paulo — que permaneceram abertas durante a madrugada de quinta-feira (13).

Tudo pelos dois novos modelos de smartphone da Apple — lançados oficialmente nos Estados Unidos no fim de setembro —, que trouxeram muitas novidades para os usuários. Infelizmente, nem todas foram positivas, como os preços altíssimos dos aparelhos. A **versão mais simples** do smart **sai por R$ 3.199**, enquanto o mais caro do iPhone 6 Plus, contendo 128 GB de armazenamento, está sendo vendido por **"apenas" R$ 4.399.**

Antes mesmo das 23h, senhas para comprar os aparelhos mais caros — iPhone 6 Plus de 64 GB, por R$ 3.999 e o iPhone 6 Plus de 128 GB, por 4.399 —, já haviam esgotado em algumas lojas do Rio de Janeiro.

Como já era esperado, algumas confusões marcaram o lançamento no Brasil. Entre elas, usuários insatisfeitos com o sistema de vendas de uma operadora no Rio de Janeiro, que organizou quem iria comprar cada aparelho ainda na fila, sem nem deixar que os usuários olhassem os iPhones antes da compra.

Apesar da disparidade nos valores, o iPhone 6 e o iPhone 6 Plus têm mais semelhanças do que diferenças, mas a essencial é o tamanho. O primeiro tem display de 4,7 polegadas e o segundo é a estreia da marca em foblets, com uma tela de 5,5 polegadas. O iPhone 6 tem 6,8 mm de espessura e possui um processador A8 com 64 bits e um coprocessador M8, enquanto a versão Plus conta com um processador A8 com 64 bits e um coprocessador M8. O aparelho traz ainda uma bateria, que segundo a Apple, dura 24 horas de conversação.

Extraído de: http://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2014/11/iphone-6-no-brasil-lancamento-e-marcado-por-filas-mesmo-com-preco-salgado.html. Acesso em: 5 abr. 2015.

O que podemos esperar do iPhone 7?

22/10/2015 às 15h15

O iPhone 6s e iPhone 6s Plus ainda são novidades. No entanto, isso não parece ser nenhum problema para os fãs da Apple, que já sonham com as novidades que a empresa deve trazer para a sua próxima geração de smartphones. Isso mesmo: enquanto muitos ainda sonham em pegar a versão que chegou às lojas no fim de 2014, já tem gente olhando para o futuro. Parece coisa de fã maluco ou mesmo dos famosos "fiéis da Maçã", mas a verdade é que é exatamente essa a graça da coisa. No mundo da tecnologia, a gente se interessa (e se diverte) muito mais com os rumores e a especulação do que com aquilo que já está no mercado. E, como não poderia deixar de ser, esse tão sonhado iPhone 7 já vem colecionando alguns rumores. A primeira coisa que podemos dar como certa é que a Apple deve manter o padrão estabelecido no ano passado e trazer duas versões do dispositivo. Com os modelos de 5,5 polegadas caindo cada vez mais no gosto do público, seria estranho vermos apenas um iPhone 7 sendo anunciado e não um iPhone 7 Plus. Assim, pode marcar na sua cartela do bingo das possibilidades que veremos esses dois irmãos juntos novamente.

Mas a pergunta é: quando? Quem acompanha a fabricante há mais tempo já percebeu que ela segue um cronograma bem definido de anúncios e lançamento, o que faz com que seja fácil prever quando essa revelação deve acontecer. Como acontece todos os anos, todas essas novidades relacionadas aos próximos iPhones devem se concentrar no segundo semestre de 2016. Em geral, a Apple sempre realiza uma conferência próximo à IFA, feira alemã de tecnologia que ocorre em setembro. No ano que vem, o evento ocorre entre os dias 2 e 7, o que já serve como um belo indicativo de quando devemos ver a apresentação desses novos modelos. Já o lançamento mesmo ocorre algumas semanas depois, mais próximo do fim do mês. E, como nenhum rumor sugeriu mudanças nesse calendário, é bem provável que esse padrão seja respeitado mais uma vez.

O preço é outra grande incógnita. De maneira geral, o fabricante sempre tenta manter os valores congelados, ou seja, o iPhone 7 deve custar o mesmo do iPhone 6s em seu lançamento. Porém, isso não é algo tão certo assim, uma vez que há outros fatores na equação que podem aumentar o número presente na etiqueta. Se a Apple trouxer grandes mudanças no aparelho de modo que o seu custo de produção aumente, isso também deve se refletir no preço que chega ao consumidor final.

Extraído de: http://canaltech.com.br/noticia/iphone/o-que-podemos-esperar-do-iphone-7-51383/. Acesso em: 21 dez. 2015. Adaptado.

Com base nas informações contidas no texto, responda as questões.

1-) Um estudante, ao ler as matérias, ficou muito interessado em obter esse smartphone.

Como tinha esse interesse de longa data, pesquisou os preços do aparelho, obtendo como resultado alguns valores.

Faça uma breve pesquisa sobre os valores desse mesmo smartphone em pelo menos três lojas.

2-) Aproveitando a pesquisa realizada na questão anterior, se coloque na posição do estudante curioso.

Sabe-se que grande parte da população mundial tem interesse neste mesmo smartphone. Imagine que você tenha uma certa quantia em dinheiro, que ainda não é o suficiente para comprar o aparelho na loja mais barata. Para conseguir adquirir o aparelho, você pretende fazer uma aplicação em um banco e pretende descobrir qual o tempo mínimo que você precisaria deixar seu dinheiro aplicado para que consiga comprar o aparelho pagando o menor preço.

Para isso, sabe-se que uma das aplicações mais seguras, que apresentam um rendimento mensal é a poupança.

Considere que, neste tipo de aplicação, a taxa de juros é de aproximadamente 0,5% ao mês.

Em quanto tempo, uma aplicação de R$ 1.000,00, à taxa de 0,5% ao mês, vai gerar a quantia suficiente para a aquisição do smartphone? Considere ainda que não serão realizados outros depósitos mensais, ou seja, novas aplicações.

Para a solução deste problema, pense nas seguintes situações:

a) Após 1 mês de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
b) Após 2 meses de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?

c) Após 3 meses de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
Obs.: faça um quadro que auxilie na vizualização das operações a serem utilizadas.

3-) Após a elaboração do quadro com os valores acumulados até o terceiro mês de aplicação, podemos dizer que em breve chegaríamos no valor necessário? Explique.

4-) A partir do quadro, vamos reescrevê-lo de maneira que em todas as lacunas da quantia acumulada apareçam o valor inicial e a taxa de juros.

5-) Com esse novo quadro é possível fazer previsões do valor ou do mês que desejamos encontrar. Você conseguiria elaborar uma equação para determinarmos em que mês conseguiríamos acumular o valor do aparelho?