INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

Sequência de ensino: Uma proposta de ensino de logaritmos utilizando os conceitos de modelagem matemática

Seiji Niwa

Graziela Marchi Tiago

São Paulo (SP)

2016

Produto Educacional apresentado como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituo Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo. Defesa realizada em 01/03/2016.

AUTORES

Seiji Niwa: Possui graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (2011) e Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (2016). Atualmente é professor de matemática no Colégio Miranda, Colégio Rio Branco e Escola Perspectiva. Tem experiência na área de Matemática atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática e ensino-aprendizagem. Tem experiência de 3 anos em edição de materiais didáticos do Sistema de Ensino Abril Educação.

Graziela Marchi Tiago: Possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP - SJRP) (2000), Bacharelado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP - SJRP) (1998), Mestrado em Matématica Aplicada pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP - SJRP) (2001) e Doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade de São Paulo (2007). Sou professora da Área de Matemática do IFSP Câmpus São José dos Campos; email: graziela@ifsp.edu.br. Tem experiência nas áreas de Matemática Aplicada e Educação Matemática.

Introdução

Este é o material obtido da pesquisa de dissertação do curso de Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, *campus* São Paulo. Neste material, apresentaremos nossa proposta de uma sequência didática que poderá ser utilizada para o ensino de logaritmos em cursos superiores de Licenciatura em Matemática.

Em nossa pesquisa utilizamos os conceitos de Modelagem Matemática apresentados por Bassanezi (2002) e os conceitos de Beltrão (2009) em relação a aplicação no ensino de logaritmos por meio da Modelagem Matemática por fases.

A procura por diferentes metodologias de ensino de Matemática que se diferenciem do ensino tradicional é algo comum e recorrente na prática docente. A concepção que temos sobre a metodologia de ensino tradicional é a mesma adotada por Baldino *apud* Silva (1996) onde segundo ela a denominação “metodologia tradicional” foi atribuída a essa autora desde o ano de 1989 nas discussões no Seminário de Matemática e Educação Matemática (SMEM) na UNESP, *campus* Rio Claro. Nessa metodologia existe a crença de que o aluno aprende durante a observação do professor que deve ensinar mostrando. Em relação à metodologia adotada pelo professor deve considerar que o mais abstrato é mais fácil para o aluno organizar as ideias.

Existem pesquisas sobre o ensino de logaritmos e pesquisas sobre a Modelagem Matemática aplicada ao ensino porém, poucas que utilizam estes dois temas concomitantemente. Diante disso, buscamos neste trabalho a junção destas ideiais e além disso em nosso material apresentaremos aos professores possíveis sugestões de interveção que poderá ser aplicada caso ocorra erros prejudiciais para a sequência didática.

Modelagem Matemática

Segundo Biembengut (2009), a discussão sobre Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino ocorre por volta dos anos de 1958 e 1965, nos Estados Unidos. No ano de 1968 em um simpósio na Suíça houve uma discussão sobre a maneira que era feito o ensino de matemática e concluiu-se que os problemas propostos não poderiam ser padronizados e comuns, mas sim, problemas que estimulassem o raciocínio e a criação de modelos matemáticos. Ainda segundo a autora, no Brasil, Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Carlos Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazetta e Eduardo Sebastini, são pesquisadores que iniciaram os estudos sobre ensinar matemática por meio da modelagem.

Em uma de suas obras, Bassanezi (2002) discorre de forma precisa e sucinta sobre seu objetivo: fazer com que estudantes de todos os níveis, docentes e as pessoas em geral, aprendam a gostar de Matemática. Para isso, deve-se rever os modelos de educação praticados. O autor defende que o ensino de matemática deve ser menos alienado e mais comprometido com a realidade.

> Um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A **modelagem consiste**, essencialmente, **na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual**. (BASSANEZI, 2002, p. 24. Grifo nosso)

Na obra de Bassanezi (2002), após apresentar a proposta de aplicação da Modelagem Matemática no ensino, o autor relata sobre os obstáculos apresentados por pesquisas posteriores e vivenciados por ele.

O obstáculo classificado como instrucional é caracterizado principalmente na aplicação em cursos regulares onde o programa de curso deve ser cumprido e desenvolvido na íntegra. O processo de Modelagem Matemática pode se tornar longo e demorado o que pode impedir o cumprimento do programa. Ainda em Bassanezi (2002), o autor diz que alguns professores pensam que as conexões com as outras ciências que possivelmente podem ocorrer com a Modelagem Matemática, podem distorcer a estética, a beleza e universalidade da Matemática.

O obstáculo para os estudantes é causado pelo estranhamento de um ensino diferenciado do tradicional. Segundo Bassanezi (2002), isso pode gerar uma certa apatia, tendo como consequência uma criação de um bloqueio por parte dos estudantes. Outro fator que pode causar essa apatia e um obstáculo por parte dos estudantes ocorre quanto ao tema escolhido para a Modelagem Matemática que pode não ser motivador.

Para os professores, o obstáculo é caracterizado quanto a insegurança causada pela sensação de não estar habilitados a trabalhar com a Modelagem Matemática em sua prática. Esta insegurança acaba tornando o processo de preparação da aula mais demorado e trabalhoso.

Ainda no obstáculo dos professores, Bassanezi (2002) apresenta outro fato que pode ocorrer: situações não previstas durante o processo de modelagem. Modelos selecionados podem não resolver a situação proposta ou até mesmo chegar em conclusões que não faziam parte do objetivo do curso. Com isso, retorna o obstáculo instrucional, em que o cumprimento do programa se torna inviável.

Modelagem Matemática na perspectiva de Beltrão (2009)

Na perspectiva de Beltrão (2009) o processo da Modelagem Matemática é realizado por meio de fases pensadas para que minimizem ao máximo os possíveis obstáculos citados anteriormente.

Antes de dar início ao processo de ensino por meio de fases, é necessário o levantamento de possíveis defasagens de determinados conteúdos que servirão de base para a continuidade do processo. Após a aplicação e análise dos conhecimentos prévios necessários que se iniciará o processo por meio de fases que são divididas em três etapas, sendo que a primeira é subdividida em mais três.

A seguir apresentaremos um esquema que ilustra as fases apresentadas por Beltrão (2009).

Modelagem Matemática por fases

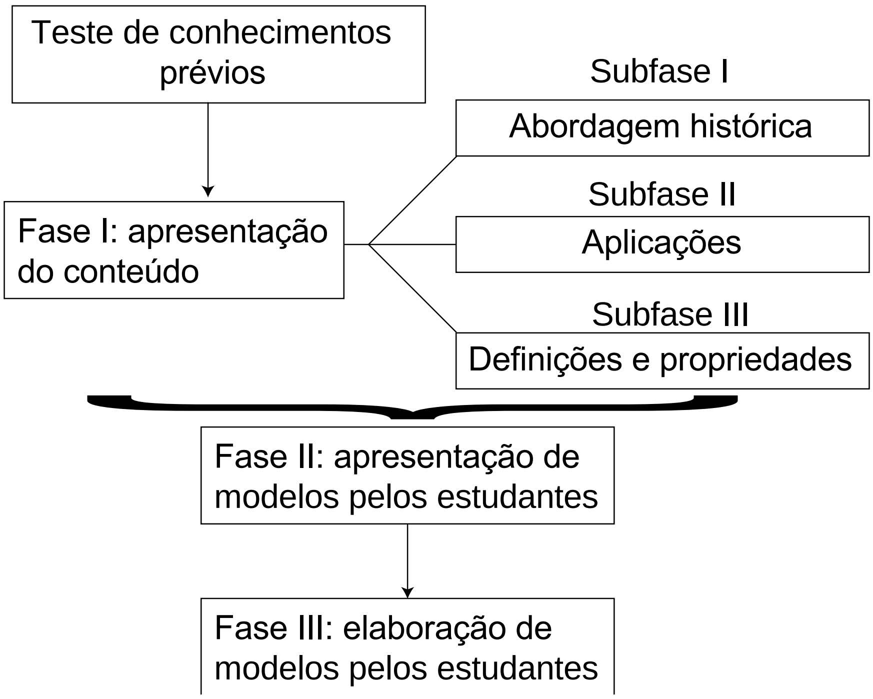

Figura 1 – Esquema de modelagem por meio de fases.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Teste de conhecimentos prévios

Inicialmente, aplica-se uma atividade diagnóstica que também pode ser referenciada como teste de conhecimentos prévios. Nesta etapa, o professor aplicará um teste em formato de avaliação com o intuito de observar e prever como será o andamento do processo de ensino. Caso algum conteúdo escolhido apresente uma certa dificuldade, o professor deverá retomá-lo.

Fase I: apresentação do conteúdo pelo professor

Nesta fase, há uma subdivisão em três subfases:

- **Primeira**: apresentação do conteúdo através de uma abordagem histórica, com o intuito de motivar os estudantes. Nesta etapa, é importante salientar que o conteúdo matemático e o desenvolvimento de toda ciência ali envolvida, não foi fruto de um trabalho simples, com o objetivo de despertar nos estudantes a vontade de aprofundar o conhecimento de determinado conteúdo;

- **Segunda**: exploração das possíveis aplicações. Nesta subfase, deverá ser respondida a pergunta: “onde eu vou usar isto?”. Ficará como atribuição ao professor apresentar situações-problema em que a solução seja feita através de um modelo matemático. Para tal, deverá fazer todo o processo de construção do modelo até a etapa de validação;
- **Terceira**: apresentação de definições e propriedades importantes daquele conteúdo e exemplos. Nesta subfase, o professor apresenta as definições matemáticas, ou seja, é o momento da formalização do conteúdo. Além das definições pertinentes, também deve-se apresentar as propriedades que existem e, por fim, apresentação de exemplos, que se possível, sejam direcionados a fenômenos específicos ao curso.

Na proposta da autora na terceira subfase, quando cita os exemplos direcionados a fenômenos específicos do curso, deve-se ressaltar que ela trabalhou com um grupo de estudantes do curso de Tecnologia de Alimentos, o que não impede a aplicação em outros cursos.

Fase II: estudantes apresentarão situações que envolvem o conteúdo matemático em estudo

Nesta fase, o trabalho principal é do estudante. Nela, deverá trazer para aula modelos ou aplicações diversificadas do conteúdo trabalhado e uma das propostas da autora, é que sejam sempre voltados às especificidades do curso em questão.

Durante a apresentação dos estudantes, o professor direcionará a discussão, enriquecendo os tópicos apresentados, mostrando a matemática ali envolvida.

Fase III: estudantes elaboram situações expressas por modelos ou aplicações

Nesta fase, os estudantes ainda são os princiapais atuantes da aula. Deverão aplicar os conceitos da Modelagem Matemática em um tema escolhido por eles. Diante de um tema ou situação-problema, os estudantes farão a construção de todo o processo da Modelagem Matemática, validada por modelos matemáticos que encaminharão para a solução do mesmo.

Proposta de Ensino de Logaritmos

Neste capítulo, faremos uma análise quanto ao objetivo que temos e as respostas que esperamos em cada momento da aplicação das atividades diante do processo.

Assim como em toda proposta de ensino, espera-se que os estudantes acertem todas as questões e assim, haja o entendimento de todos, porém existem pesquisas que apontam algumas consequências desses erros cometidos pelos estudantes e como que uma análise deles pode contribuir para a qualificação do ensino de matemática, como pode ser observado no trabalho de Cury (2010).

Neste trabalho Cury (2010) aponta que existem diversas pesquisas que tratam da análise de erros, no entanto, não estabelecem isso como uma abordagem de pesquisa e ensino.

Antes de tratar sobre a análise de possíveis erros que podem aparecer durante uma atividade, destacamos a concepção da autora para a palavra “erro”:

> proponho que se entenda como erro, na resolução de uma questão, o que não corresponde à produção esperada de um aluno (ou professor) que já deve ter tido contato com os conteúdos apresentados na referida questão ou com estratégias de resolução de problemas em Matemática. É, portanto, um referencial que toma como suposta verdade o conhecimento institucional, ou seja, o que a instituição “Escola” espera ver apresentado por alunos (ou professores) de um determinado nível de ensino, em suas produções escritas em Matemática. (Cury, 2010, p. 2)

Diante disto apresentaremos em nossa proposta possíveis sugestões de respostas que esperamos dos estudantes e as demais que poderão ocorrer, deixaremos como sugestão a leitura de alguns trabalhos que subsidiarão o trabalho do professor para uma intervenção naquele momento.

Segundo Borasi (1996) *apud* Cury (2010), existem três objetivos para o uso dos erros, sendo a remediação, a descoberta ou a pesquisa. Para a prática docente, a remediação se torna mais atrativa, pois a preocupação com as dificuldades do estudante é recorrente no cotidiano do professor. Diante desta preocupação e da nossa proposta de ensino, destacamos o seguinte trecho:

> a (falsa) crença de que a repetição vai fazer com que a falta de compreensão sobre o tópico em questão fará com que o aluno entenda e não mais cometa o mesmo erro. No entanto, se essa idéia fosse correta, não teríamos os erros sistemáticos, pois, detectados e remediados por uma nova explicação, já teriam sido eliminados. que a falta de compreensão sobre o tópico em questão vai fazer com que o aluno entenda e não mais cometa o mesmo erro. (Cury, 2010, p. 8)

Portanto, para não insistirmos no erro do estudante e para não cairmos na "falsa crença" citada por Cury (2010), em nossa proposta, a cada atividade listaremos uma sequência de trabalhos que poderão servir de subsídio para o professor que detectar determinados erros por parte dos estudantes.

Caso você leitor queira observar as atividades na íntegra, sem as sugestões de respostas e intervenções, elas se encontram no final do trabalho em apêndices indicados em cada uma das fases.

Atividade de teste de conhecimentos prévios

Na questão 1 do teste, temos como objetivo esclarecer eventuais dúvidas em relação ao cálculo de porcentagens simples, pois pensamos ser um conhecimento essencial no cálculo de juros ou até mesmo de meia-vida que serão propostos nas fases que seguem.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

1. Calcular as seguintes porcentagens:
    a. 10% de 500
       50
    b. 12% de 100
       12
    c. 210% de 12
       25,2
    d. 0,5% de 50
       0,25

Após o exercício 1, destacaremos o trabalho de Feltes (2007), em que um dos objetivos foi analisar os erros cometidos por estudantes do Ensino Fundamental e Médio. No trabalho dessa autora, ela elencou alguns conteúdos dentre os quais destacamos no momento o cálculo de porcentagens. Em uma de suas análises, ela observou que alguns erros cometidos pelos estudantes eram constantes.

Dentre as conclusões obtidas por Feltes (2007), destacamos que um dos erros mais frequentes eram relacionados às operações entre conjuntos e a dificuldade com a aplicação das propriedades de potenciação e radiciação.

Visto que em nosso trabalho apresentaremos uma sequência que poderá ser trabalhada em sala, uma sugestão de intervenção caso ocorram erros indesejáveis, são os trabalhos de Lopes (2013) ou o de Dias (2008). Em ambos, os autores fazem um estudo sobre o ensino de porcentagens utilizando problemas reais que se conectam com o cotidiano do estudante.

A questão 2, servirá de base para a resolução de questões sobre equações exponenciais. Isso ocorrerá pois, para a resolução de equações exponenciais, utilizaremos a decomposição do número em fatores primos, para que utilizemos a definição de que se as bases das potenciações são iguais, basta igualarmos os expoentes.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

2. Decomponha os números a seguir em uma potenciação de um único número e um expoente, seguindo o exemplo:

   Exemplo:

   $8 = 2^3$

   a. 27

      $27 = 3^3$

   b. 343

      $343 = 7^3$

   c. 1000

      $1000 = 10^3$

d. 1024

$1024 = 2^{10}$

Como sugestão de intervenção do professor caso ele sinta necessidade, deixaremos a leitura do trabalho de Oliveira (2014), onde a autora fez uma análise de dez livros didáticos de Matemática do Ensino Médio com relação a maneira que o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas é trabalhado. A autora classifica em “boa motivação” ou “motivação inadequada” as questões apresentadas pelos livros. A autora classifica em “boa motivação” as questões que apresentam uma boa contextualização dos exemplos e as inadequadas apresentam exemplos com informações incorentes, fictícias ou erradas. Além da análise da apresentação destes conteúdos, ela faz também uma proposta de novos exercícios.

Nessa análise dos livros didáticos, concluiu que dentre os dez livros analisados, apenas três deles apresentavam boas motivações no estudo de equações exponenciais.

Na questão 3, temos como objetivo a verificação do conceito envolvido nas equações exponenciais. O estudante deverá transformar a frase escrita na língua portuguesa, em uma expressão matemática cuja linguagem é algébrica.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

3. Para os enunciados a seguir, resolva tentando utilizar o conceito de equações (passe para a linguagem matemática).

   Exemplo: 2 elevado a que número resulta em 8?

   $2^x = 8$

   $2^x = 2^3$

   $x = 3$

   Portanto, 2 elevado a 3 é igual a 8.

   a. 3 elevado a que número resulta em 81?

   $3^x = 81$

   $3^x = 3^4$

   $x = 4$

Portanto, 3 elevado a 4 é igual a 8.

b. 8 elevado a que número resulta em 2?

$8^x = 2$

$(2^3)^x = 2$

$2^{3x} = 2^1$

$3x = 1$

$x = 1/3$

Portanto, 8 elevado a 1/3 é igual a 2.

c. 81 elevado a que número resulta em 3?

$81^x = 3$

$(3^4)^x = 3$

$3^{4x} = 3^1$

$4x = 1$

$x = 1/4$

Portanto, 81 elevado a 1/4 é igual a 3.

Assim como ocorrido na questão 2, deixaremos como sugestão de intervenção do professor a leitura e utilização do trabalho de Oliveira (2014) no que diz respeito ao conteúdo de equações exponenciais.

Na questão 4, tanto no exemplo como no item “a”, buscamos a indagação dos estudantes a respeito do motivo de não haver uma resposta de imediato, assim como houve no exercício anterior. Essa indagação será explorada na questão seguinte, onde será proposto ao estudante que disserte sobre as hipóteses que ele tem sobre o porquê de não chegar a uma conclusão.

Nos itens “b” e “c” desta questão, trabalhamos com as potenciações de base 10, para que já seja dado, intuitivamente, uma das propriedades dos logaritmos.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

4. Para os enunciados a seguir, resolva tentando utilizar o conceito de equações (passe para a linguagem matemática), se possível.

   Exemplo: 10 elevado a que número resulta em 2?

$10^x = 2$

$x = ?$

Com os conhecimentos que temos até o momento, não foi possível chegar em uma resposta.

a. 10 elevado a que número resulta em 3?

$10^x = 3$

$x = ?$

Com os conhecimentos que temos até o momento, não foi possível chegar em uma resposta.

b. 10 elevado a que número resulta em 81?

$10^x = 81$

$10^x = 3^4$

$x = ?$

Com os conhecimentos que temos até o momento, não foi possível chegar em uma resposta.

c. 10 elevado a que número resulta em 100?

$10^x = 100$

$10^x = 10^2$

$x = 2$

Portanto, 10 elevado a 2 é igual a 100.

Nesta questão proposta, devemos levar em consideração uma possível resposta que pode ser dada através do raciocínio por aproximação. O estudante pode pensar nas aproximações conhecidas como no item “a” da questão 4: sabe-se que 10^1 é 10, portanto, para obter o resultado 3 é necessário escolhermos um expoente menor que 1. Com isso, poderá pensar em 10^0, mas chegará ao resultado 1 (um). Portanto, saberá que o expoente é um número entre zero e um. O estudante pode não chegar a uma conclusão exata, mas pode tentar aproximações com números decimais com o auxílio de uma calculadora ou concluir que o resultado será um número decimal maior que zero e menor que um.

No último exercício, assim como mencionado anteriormente, temos o objetivo de verificar como os estudantes dissertarão sobre a dificuldade encontrada no exercício 4. Diante dessa dificuldade, iniciaremos a discussão sobre o conceito de logaritmos, quando trabalharemos com as equações exponenciais de bases diferentes.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

5. Com relação ao exercício anterior, explique brevemente, com suas palavras:
    a. o problema que nos deparamos ao tentar resolver o exercício 4 comparando com o exercício 3?

       Esta questão não possui uma resposta certa ou errada, porém, esperamos que os estudantes percebam que, a dificuldade encontrada nos itens "a" e "b" da questão 4, são as bases das potenciações. No item "b", os estudantes ainda têm condições de transformar o número 81 em uma potenciação de base 3, porém, na igualdade aparece a base 10, o que não podemos utilizar a definição de igualar os expoentes.
    b. Você percebe alguma relação entre eles?

       A relação que espera-se que seja observada, é a utilização do conceito do exercício 3, pois nele utiliza-se a decomposição em fatores primos das potenciações.

Nas últimas questões propostas, nosso principal objetivo é analisar o quão preparado o estudante está em relação ao cálculo de equações exponenciais. Para isso salientamos que será imprescindível que os conhecimentos e aplicações de propriedades operatórias das potenciações e radiciações estejam bem fixados nos estudantes.

Novamente fazendo a leitura do trabalho de Feltes (2007), destacamos a análise da autora realizada nos erros cometidos pelos estudantes na aplicação das propriedades da potenciação e radiciação. Em uma de suas conclusões, a autora destaca que:

> os erros mais frequentes foram os das classes C – que envolve os erros em operações com conjuntos numéricos – e E, em que os

> estudantes desconsideram o expoente da potência ou não entendem a propriedade que envolve expoente negativo. (Feltes, 2007, p. 73)

Tendo em vista que segundo o trabalho de Feltes (2007) os erros na aplicação de propriedades da potenciação e radiciação podem ocorrer, o professor deverá estar preparado para esse tipo de situação.

Caso ele se depare com essa situação, deixamos como sugestão para o professor que apresente novamente as propriedades pertinentes e aplique-as no exercício proposto. Deixaremos como sugestão nesta etapa os trabalhos de Feltes (2007) e Oliveira (2014). Vale ressaltar que nas intervenções necessárias, o professor deverá ralizar a abordagem da maneira distinta da tradicional e não cometer a prática da repetição, retomando assim a ideia de Cury (2010), onde a autora diz que se a repetição resolvesse o problema do erro, eles não seriam comuns e recorrentes.

Fase I – Subfase I

Após a discussão da etapa denominada “Teste de conhecimentos prévios” e feita as devidas ponderações se necessário, o professor poderá dar início ao processo de Modelagem Matemática segundo a proposta de Beltrão (2009). Nesta etapa do processo, recomenda-se que o professor dê início a aula com uma breve introdução e faça a leitura junto com os estudantes, explicando para todos que o objetivo dessa leitura é fazer uma introdução dos logaritmos. O texto por si só, tratará sobre a origem e também será apresentada algumas aplicações que serão trabalhadas na etapa seguinte.

Fase I – Subfase II

Terminada a leitura do texto que trata da origem e de algumas aplicações dos logaritmos, temos a subfase II onde o objetivo é aprofundarmos uma aplicação do modelo matemático a ser trabalhado. Em nossa proposta buscamos uma aplicação do conceito de meia-vida no esporte. Abordamos esse tema pois, pensamos que um trabalho interdisciplinar que faça uma ligação dos conceitos discutidos entre diversas disciplinas torna essa aprendizagem mais próxima da realidade dos estudantes.

Na atividade, a proposta é fazer a leitura e discussão em conjunto com o grupo todo de estudantes. Após a leitura e discussão, a resolução da atividade se dá inicialmente com uma questão sobre o conceito de meia-vida. Nosso objetivo com ela é mostrar aos estudantes que um conceito aprendido na disciplina de Física ou Química pode ser conectado com a Matemática. Caso os estudantes não se recordem de tal conceito, apresentaremos a seguir uma possível resposta que o professor poderá discutir com os estudantes. Com o conceito em mente, esperamos dos estudantes uma reflexão quanto a relação existente entre estes dois temas: meia-vida e os exames anti-doping.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

1-) Escreva o que você conhece sobre *meia-vida* e qual a relação existente entre meia-vida e a questão do *doping* apontada pelos textos.

Nessa questão esperamos que a relação que os estudantes citem nesta questão é a relação existente entre duas grandezas: o tempo (meia-vida) e a atividade de determinada substância no corpo do atleta.

Após realizada a discussão sobre a analogia existente entre os dois conceitos, enunciamos que o atleta ingeriu 100 mg da substância dopante e apresentaríamos o tempo de meia-vida e perguntaríamos se, ao fim dos 30 dias, ainda haverá a presença desta substância no corpo do atleta para a realização do teste.

Com relação aos erros que possivelmente podem ocorrer, deixaremos como sugestão para o professor a leitura do trabalho de Brucki (2011). Nesta pesquisa, o professor que perceber um número expressivo de erros, pode utilizar as atividades apresentadas na página 70 deste presente trabalho.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

2-) De acordo com o primeiro texto, sabe-se que o atleta fez uso da substância *drostanolona*, comprovado por exames realizados posteriormente. Dado que essa substância possui um tempo de meia-vida de aproximadamente 48 horas, imagine a seguinte situação:

O atleta ingeriu 100 mg dessa substância no início do dia 10 de janeiro e que o teste antidoping tenha sido realizado apenas um mês depois, ou seja, passados 30 dias. Podemos afirmar que neste teste não havia mais a presença desta substância em seu organismo?

Considere que após a ingestão no dia 10 de janeiro, não houve mais nenhuma outra aplicação dessa substância e que o teste tenha sido realizado na manhã do fim dos 30 dias.

Nesta questão, esperamos que, dentre os diversos raciocínios que possam existir, que os estudantes cheguem à conclusão de que, embora o valor seja relativamente baixo, ainda exista a presença dessa substância.

Para o professor que achar necessário reforçar este conceito, deixamos também a sugestão da leitura de Brucki (2011) a mesma atividade citada na questão anteior. Neste trabalho, a autora elabora duas atividades que tratam da função exponencial com a problemática da utilização de usinas nucleares nos países, abordando o conceito de função exponencial com uma analogia com as progressões geométricas e fazendo uso de diversas representações para a função com enfoque na abordagem gráfica.

A questão 3, foi pensada utilizando-se a ideia do exercício anterior, porém, na execução desta, induziremos o pensamento do grupo de estudantes para a utilização de um quadro para a formalização do raciocínio, pois no quadro o estudante conseguirá observar o que ocorre com cada uma das grandezas com o passar do tempo.

No segundo item desta questão, propusemos a elaboração de um gráfico, com o intuito favorecer a observação e o levantamento de hipóteses com a visualização gráfica, o que a pesquisa de Brucki (2011) comprova.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

3-) Complete o quadro a seguir:

Quadro 1 – Fase I (subfase II) – Resolução do exercício 3

Número de meias-vidas	**Tempo**	**Quantidade de substância em mg**
0	0 hora	100
1	48 horas	*50*
2	96 horas	*25*
3	*144 horas*	*12,5*
4	*192 horas*	*6,25*
5	*240 horas*	*3,125*
6	*288 horas*	*1,5625*

Faça um gráfico que relacione a quantidade dessa substância no corpo com o tempo. Como sugestão deixaremos a utilização do Microsoft Excel.

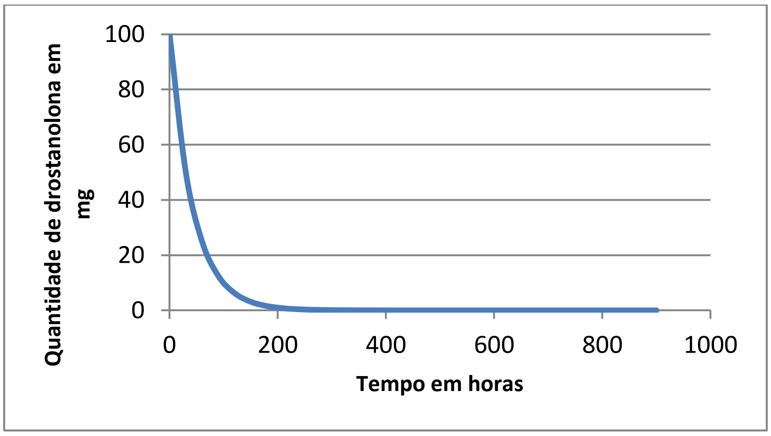

Figura 2 – Quantidade de drostanolona pelo tempo.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta questão, um trabalho que poderá subsidiar o professor caso sinta necessidade, de acordo com os erros cometidos, deixaremos como sugestão a leitura do trabalho de Ferreira e Bisognin (2007). Neste artigo, destacamos o trabalho realizado por estes autores na “1ª atividade”. Nela os autores trabalham o conceito de funções exponencias baseando-se também no gráfico.

A próxima questão tem como objetivo a elaboração de uma equação genérica, que sirva de base para os estudantes em qualquer situação que trate do mesmo assunto.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

4-) A partir do quadro, vamos reescrevê-lo de maneira que em todas as lacunas da quantidade de substância apareçam o valor inicial e o número de meias-vidas.

Quadro 2 – Fase I (subfase II) – Resolução do exercício 4

Número de meias-vidas	**Tempo**	**Quantidade de substância em mg**
0	0 hora	$100 \cdot 0{,}5^{0}$
1	48 horas	$100 \cdot 0{,}5^{1}$
2	96 horas	$100 \cdot 0{,}5^{2}$
3	*144 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{3}$
4	*192 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{4}$
5	*240 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{5}$
6	*288 horas*	$100 \cdot 0{,}5^{6}$

Obs.: Vale ressaltar nesta questão que o professor, durante a execução, deve deixar explícita a ideia utilizada em cada lacuna, principalmente do significado existente em cada parte: o 100 representa a quantidade inicial, o 0,5 da base representa a metade e o expoente é representado pelo número de meias-vidas.

Vale ressaltar que esta questão deve ser trabalhada de forma cautelosa por parte do professor. Não podemos considerar que logo de início os estudantes consigam fazer essa relação das multiplicações e de potênciações. Portanto, deixaremos como uma sugestão de leitura para o professor, antes de iniciar o trabalho com esta questão, o trabalho de Oliveira (2014). Nos capítulos anteriores, fizemos um breve resumo sobre esta pesquisa, mas neste momento, destacaremos a página 20 deste trabalho, quando a autora caracteriza um livro didático que apresenta uma abordagem semelhante a esta como uma “boa motivação para o uso da função exponencial”.

A questão 5, para finalizarmos a ideia do conceito de logaritmos, propusemos uma situação em que o estudante se deparará com um obstáculo semelhante ao que encontrou no exercício do teste de conhecimentos prévios.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

5-) Com esse novo quadro é possível fazer previsões da quantidade de substância ou do tempo decorrido ou o número de meias-vidas que desejamos encontrar. Você conseguiria elaborar um quadro para determinarmos após quantas meias-vidas haverá a quantia de 0,01220703 mg?

Quadro 3 – Fase I (subfase II) – Resolução do exercício 5

Número de meias-vidas	**Tempo**	**Quantidade de substância em mg**
0	0 hora	100
1	48 horas	*50*
2	96 horas	*25*
3	*144 horas*	*12,5*
4	*192 horas*	*6,25*
5	*240 horas*	*3,125*
6	*288 horas*	*1,5625*
7	*336 horas*	*0,7812*
8	*384 horas*	*0,3906*
9	*432 horas*	*0,1953*
10	*480 horas*	*0,0976*
11	*528 horas*	*0,0488*
12	*576 horas*	*0,0244*
13	*624 horas*	*0,0122*

Fase I – Subfase III

Neste momento, os estudantes já tem conhecimento sobre os logaritmos, porém ainda não conhecem as condições de existência e as propriedades operatórias. Para isso, propusemos a aplicação das atividades extraídas de Vidigal (2014).

Essas atividades, dentre diversas outras possibilidades, foram selecionadas pois a resolução será realizada de forma experimental para os estudantes. Além dos resultados que são induzidos pelas perguntas feitas, as conclusões retiradas são as condições de existência e as propriedades operatórias.

Antes de iniciar a atividade, será apresentado um texto retratando novamente a história dos logaritmos e como foi criado o conceito através de conhecimentos das progressões aritmética e geométrica.

O estudante deverá fazer uma analogia com o exercício já resolvido no teste de conhecimentos prévios, onde era induzido a resolver equações exponenciais com a decomposição do número em potenciações de mesma base.

Segue uma das atividades propostas no trabalho:

Quadro 4 – Fase I (subfase III) – Resolução do exercício 1

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Para cada termo da progressão geométrica, o termo correspondente na progressão aritmética será o seu logaritmo na base 2 (pois a razão da progressão geométrica é 2). Ou seja, o logaritmo na base 2 de 512 é 9.

Com base nessa associação qual é:

a) o logaritmo de 2048 na base 2?

Para chegar a resposta o estudante deverá verificar que número se encontra acima do 2048 no quadro apresentado, chegando em 11 como resposta.

b) o logaritmo de 1/2 na base 2?

Nesta pergunta o estudante não conseguirá fazer a analogia de imediato, pois quando solicitado o valor 1/2, ele deverá seguir para a esquerda do quadro, não para a direita, retornando dois termos chegando em –1 na PA e 1/2 na PG.

Na sequência das atividades realizadas, será dada a formalização do conceito de logaritmo, onde a linguagem matemática daquilo que foi calculado será apresentada.

Após a formalização, há uma proposta de alguns exercícios que o estudante deverá resolver utilizando a definição.

Ainda com o auxílio do quadro dado inicialmente, o professor vai introduzir as propriedades operatórias dos logaritmos. A ideia será a transformação de produtos em somas e de maneira análoga, transformar divisões em subtrações. Segue proposta:

Faça a multiplicação 2 × 512 e procure o resultado no quadro. Agora responda qual a relação existente entre os valores dos logaritmos na base 2 dos números multiplicados e o logaritmo também na base 2 do número obtido na multiplicação?

Quando o estudante resolve a multiplicação obtém como produto o número 1024. Feito isso, deverá calcular o logaritmo de 2, o logaritmo de 512 e por fim, o logaritmo de 1024 e perceber que a relação existente é que o logaritmo de 1024 é igual a soma dos logaritmos de 2 e 512.

De maneira análoga deverá proceder para a divisão.

Após as propriedades da soma e divisão elucidadas, será apresentada a propriedade da potenciação. Para isso, segue as atividades que deverão ser realizadas:

Encontre o resultado de 8^2 e procure no quadro. Agora responda qual a relação entre o logaritmo de 8 e o logaritmo do resultado obtido.

Quando o estudante resolve a potenciação obtém como produto o número 64. Feito isso, deverá calcular o logaritmo de 8 e o logaritmo de 64 para perceber que a relação existente é que o logaritmo de 64 é igual a duas vezes o logaritmo de 8.

Por fim, será deduzida as condições de existência dos logaritmos. Para isso, será explorado alguns cálculos, por exemplo: log(–2), log(–10), log(–32,1), log(–

123), etc. Essas atividades foram pensadas para que o estudante perceba que há um problema quando o logaritmo que deseja calcular é negativo, chegando a uma primeira condição de existência.

Na sequência, será solicitado que calcule: $\log_1 3$, $\log_{-2} 8$, $\log_0 7$, etc. Nessa etapa, o objetivo é mostrar que agora o problema se encontra na base do logaritmo, chegando a conclusão de ela deve ser maior que zero e diferente de 1.

Deixaremos como sugestão o uso de calculadoras científicas nesta etapa. Para isso, será necessário que o professor ensine o manuseio dela para dar continuidade.

Fase II

Na Fase II, assim como em Beltrão (2009), neste momento os estudantes apresentarão outros modelos ou aplicações dos logaritmos. Sugerimos que haja uma pesquisa inicial por conta dos estudantes, em diversas fontes. Após essa primeira pesquisa, o professor orientará os grupos de estudantes a pesquisarem em fontes confiáveis e assim indicar alguns trabalhos realizados por outros pesquisadores.

Deixaremos como sugestão dois trabalhos: o primeiro é de um autor já mencionado, Vidigal (2014), onde há um exemplo da aplicação dos logaritmos na propagação do som, no caso, na escala decibel. A outra pesquisa que deixaremos como sugestão é Rossi (2010), onde serão apresentadas aplicações de escalas logarítmicas na mensuração da intensidade dos terremotos, no cálculo de pH para a mensuração de acidez de substâncias e em modelos matemáticos dados em funções logarítmicas.

Para essa proposta utilizaremos uma das atividades de Rossi (2010), intitulada como “logaritmos e funções”.

Nesta atividade há um texto base para o estudante onde será apresentado uma função que relaciona a altura de uma árvore em função do tempo. Com isso, é dado um modelo matemático que servirá de base para a resolução de todas as questões que virão na sequência. O modelo dado é: $h(t) = 1,5 + \log_3(t + 1)$, onde h(t) representa a altura da árvore em metros e t o tempo transcorrido em anos.

Na primeira questão é perguntado qual é a altura da árvore no momento que ela foi plantada. Para isso, o estudante deve ter em mente que no momento do plantio não se passou nenhum ano, portanto, t deverá ser zero. Segue modelo de resolução:

$$h(0) = 1,5 + \log_3(0 + 1)$$

$$h(0) = 1,5 + \log_3 1$$

$$h(0) = 1,5 + 0$$

$$h(0) = 1,5 \text{ m}$$

No item b desta mesma questão, é questionado qual a altura da árvore após 26 anos. Para a solução do problema, o estudante deverá substituir o t por 26. Segue o modelo de resolução:

$$h(26) = 1,5 + \log_3(26 + 1)$$

$$h(26) = 1,5 + \log_3(27)$$

$$h(26) = 1,5 + 3$$

$$h(26) = 4,5 \text{ m}$$

Por fim, no item c, pede-se que o estudante calcule o tempo transcorrido no momento em que a árvore atingiu a altura de 3,5 m. Agora será necessário que o estudante tenha claro que deverá substituir o h(t) por 3,5. Segue modelo de resolução:

$$3,5 = 1,5 + \log_3(t + 1)$$

$$2 = \log_3(t + 1)$$

$$3^2 = t + 1$$

$$t = 8 \text{ anos}$$

Com isso, encerra-se a fase II, onde o objetivo principal é a apresentação por parte dos estudantes de novas aplicações do modelo estudado ou até mesmo a elaboração. Em nossa proposta, sugerimos que o estudantes faça a apresentação de novas aplicações de modelos e para isso o professor pode subsidiar a busca dando algumas sugestões de fontes de pesquisa.

Fase III

A Fase III é a finalização do processo e pode-se considerar que seria uma avaliação do professor em relação a quanto os estudantes compreenderam a forma que podemos obter determinado conhecimento matemático, utilizando-se da Modelagem Matemática.

Essa avaliação não é a avaliação formal instituída nos diferentes níveis de ensino, é uma avaliação do estudante produzindo uma aplicação ou um modelo matemático. Em nossa proposta, apresentaremos uma aplicação do conceito de logaritmos que poderia ser elaborada por estudantes de diferentes níveis.

Na Fase III do processo de Modelagem Matemática por meio de fases proposta por Beltrão (2009) ocorre o processo de Modelagem Matemática proposto por Bassanezi (2002), pois neste momento, para a elaboração de um novo modelo ou de uma nova aplicação de um modelo matemático, o estudante deve seguir as etapas de Bassanezi (2002), sendo basicamente o processo de investigação empírica e a experimentação, chegando ao fim na aplucação e validação do processo.

Em nossa proposta, deixamos como exemplo uma atividade em que o estudante apresentaria uma aplicação no cálculo de juros compostos, utilizando-se dos logaritmos para resolver um problema real. A atividade se encontra na íntegra no apêndice G. Neste capítulo faremos a análise do que pode se esperar com essa atividade.

Na questão 1, seria trabalhado a investigação do estudante quanto a realidade do problema, espera-se que haja uma busca de preços atualizados de um smartphone recém lançado.

Na próxima questão, aproveitaria-se a pesquisa de preço realizada e, assim como proposto na Fase I – subfase II, seria suposta uma situação realística, ou seja, muito próxima do real. Segue a questão com o que espera-se como resposta:

2-) Aproveitando a pesquisa realizada na questão anterior, se coloque na posição do estudante curioso.

Sabe-se que grande parte da população mundial tem interesse neste mesmo smartphone. Imagine que você tenha uma certa quantia em dinheiro, que ainda não é o suficiente para comprar o aparelho na loja mais barata. Para conseguir adquirir o aparelho, você pretende fazer uma aplicação em um banco e pretende descobrir qual o tempo mínimo que você precisaria deixar seu dinheiro aplicado para que consiga comprar o aparelho pagando o menor preço.

Para isso, sabe-se que uma das aplicações mais seguras, que apresentam um rendimento mensal é a poupança.

Considere que, neste tipo de aplicação, a taxa de juros é de aproximadamente 0,5% ao mês.

Em quanto tempo, uma aplicação de R$ 1.000,00, à taxa de 0,5% ao mês, vai gerar a quantia suficiente para a aquisição do smartphone? Considere ainda que não serão realizados outros depósitos mensais, ou seja, novas aplicações.

Para a solução deste problema, pense nas seguintes situações:

e) Após 1 mês de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
f) Após 2 meses de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
g) Após 3 meses de investimento, qual a quantia que esse estudante terá?
h) Após quanto tempo ele terá condições de comprar o aparelho?

Obs.: faça um quadro que auxilie na visualização das operações a serem utilizadas.

Quadro 5 – Fase III – Resolução do exercício 2

Tempo	***Quantia acumulada (em R$)***
Início	*1000*
Mês 1	*1000 · 1,005 = 1005,00*
Mês 2	*1005 · 1,005 = 1010,03*
Mês 3	*1010,03 · 1,005 = 1015,08*

Assim como foi apontado na questão 4 (resolução no quadro 2), da Fase I (subfase II), a montagem deste quadro talvez não seja imediata. Portanto, novamente, deixaremos como sugestão, a leitura de Oliveira (2014).

A questão 3 será uma discussão sobre o que ocorre com a quantia investida. O estudante deverá dissertar sobre o tempo que levará para conseguir acumular o montante necessário para a compra. Neste caso, a resposta que esperamos não é um valor exato, mas que ele tente chegar intuitivamente à resposta.

Respostas esperadas dos estudantes e sugestões de intervenções para o professor.

3-) Após a elaboração do quadro com os valores acumulados até o terceiro mês de aplicação, podemos dizer que em breve chegaríamos no valor necessário? Explique.

Não, pois a cada mês, o aumento da quantia é muito baixo.

Na sequência, será induzida a elaboração do quadro de acordo com a atividade realizada na Fase I – subfase II. Neste momento, espera-se que os estudantes já consigam fazer uma previsão de um modelo matemático que levará à equação. Vale ressaltar que como o objetivo é chegar na aplicação do logaritmo, a atividade continuará, caso o professor opte por trabalhar apenas com juros compostos, até esta questão é o suficiente.

4-) A partir do quadro, vamos reescrevê-lo de maneira que em todas as lacunas da quantia acumulada apareçam o valor inicial e a taxa de juros.

Quadro 6 – Fase III – Resolução do exercício 4

Tempo	***Quantia acumulada (em R$)***
Início	*1000*
Mês 1	$1000 \cdot 1{,}005 = 1005{,}00$
Mês 2	$1000 \cdot 1{,}005^2 = 1010{,}03$
Mês 3	$1000 \cdot 1{,}005^3 = 1015{,}08$
…	…

Por fim, a resolução do problema proposto inicialmente se dá pela aplicação do logaritmo. Segue a resolução esperada:

5-) Com esse novo quadro é possível fazer previsões do valor ou do mês que desejamos encontrar. Encontre uma função que permita descrever a situação proposta em qualquer momento t.

Quadro 7 – Fase III – Resolução do exercício 5

Tempo	***Quantia acumulada (em R$)***
Início	*1000*
Mês 1	$1000 \cdot 1{,}005 = 1005{,}00$
Mês 2	$1000 \cdot 1{,}005^2 = 1010{,}03$
Mês 3	$1000 \cdot 1{,}005^3 = 1015{,}08$
…	…
Mês n	$1000 \cdot 1{,}005^n = ?$

Como desejamos saber em que mês será acumulada a quantia de aproximadamente R$4500,00, temos que:

$$1000 \cdot 1{,}005^n = 4500$$
$$1{,}005^n = 4{,}5$$
$$\log_{1{,}005} 4{,}5 = n$$
$$n \cong 301 \text{ meses}$$

Em toda nossa sequência, apresentamos por diversas vezes, atividades que promovem a construção dos modelos matemáticos envolvidos em conjunto (professor e estudante). Porém, pensamos que esta escolha ficará a cargo do professor que se sentir seguro em seguir esta proposta. Em boa parte das atividades, como ocorre na questão 5, os quadros de valores são ilustrativos e podem favorecer a compreensão do conceito envolvido, portanto, uma sugestão que deixaremos para o leitor é a utilização de um software, sendo o Microsoft Excel, pois nele, a construção dos quadros de valores que seguem um determinado padrão, podem ser extendidos indefinidamente.